Formulaire mathématique

I Identités remarquables

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\ (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

II Équation du 2nd degré

Méthode de résolution générale de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

Plusieurs cas de figures :

- $\Delta > 0$, 2 racines réelles : $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0$, 1 racine réelle double : $x = \frac{-b}{2a}$
- $\Delta < 0$, 2 racines complexes conjuguées : $x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

III Produits de vecteurs

1) Produits scalaires

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos(\vec{A}, \vec{B}) \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_z B_z \end{aligned}$$

2) Produits vectoriels

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{bmatrix}$$

Norme : $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin(\vec{A}, \vec{B})$

IV Trigonométrie

1) Relations de base

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} & \tan(a) &= \frac{\sin(a)}{\cos(a)} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \\ \sin(a) &= \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} & \cot(a) &= \frac{1}{\tan(a)} \\ 1 &= \cos^2(a) + \sin^2(a) & 1 + \tan^2(a) &= \frac{1}{\cos^2(a)} \end{aligned}$$

2) Cercle trigonométrique

$$\begin{aligned} \cos(\pi - a) &= -\cos(a) & \sin(\pi - a) &= +\sin(a) \\ \cos(\pi + a) &= -\cos(a) & \sin(\pi + a) &= -\sin(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= +\sin(a) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= +\cos(a) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= -\sin(a) & \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= +\cos(a) \end{aligned}$$

3) Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X

4) Formules d'addition

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a-b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a) \\ \sin(a-b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) - \sin(b) \cdot \cos(a) \end{aligned}$$

5) Formules de duplication

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\ \sin(2a) &= 2\sin(a) \cos(a) \end{aligned}$$

6) Formules de linéarisation

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \text{ et } \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

V Longueurs, surfaces et volumes

1) Cercle/Disque/Secteur

- Périmètre d'un cercle : $L_{\text{cercle}} = 2\pi R$
- Longueur d'un secteur : $L_{\text{secteur}} = \alpha R$
- Surface d'un disque : $S_{\text{disque}} = \pi R^2$
- Surface d'un secteur : $S_{\text{secteur}} = \frac{\alpha}{2} R^2$

2) Sphère

- Surface d'une sphère : $S_{\text{sphère}} = 4\pi R^2$
- Volume d'une sphère : $V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3}\pi R^3$

3) Autres

- Volume d'un cône : $V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} S_{\text{base}} H_{\text{cône}}$
- Volume d'un cylindre : $V_{\text{cylindre}} = \pi R^2 H_{\text{cylindre}}$

VI Les chiffres significatifs

1) Nombre de chiffres significatifs

Il faut faire attention lorsqu'on manipule des données physiques à bien tenir compte du nombre de chiffres ayant une réelle signification. Il s'agit du nombre de chiffres donnés à partir du premier non nul.

Exemples	Nombre de chiffres significatifs
3300	4
0033	2
0,0030	2
$3 \cdot 10^{-4}$	1
$3,00 \cdot 10^{-4}$	3
$0,03 \cdot 10^{-5}$	1

2) Choisir le nombre de chiffres significatifs

Lorsqu'on manipule plusieurs nombres pour effectuer un calcul, il faut tenir compte des chiffres significatifs (abréviation CS) de chacun. On applique ensuite deux règles simples :

- Le résultat d'une multiplication ou division ne doit **pas avoir plus de CS que la donnée qui en a le moins**.
- Le résultat d'une addition ou soustraction ne doit **pas avoir plus de décimales que la donnée qui en a le moins**.

Ainsi ne vous fiez pas uniquement à l'affichage de la calculatrice !

Exemples :

- $\frac{1033}{3,0} = 3,4 \cdot 10^2$ et non 344,333
- $0,0055 + 1,01 = 1,02$ et non 1,0155 car le second chiffre est précis à 10^{-2} seulement.
- $3,6342 - 3,5 = 0,1$ et non 0,1342 car le second chiffre est précis à 10^{-1} .
- $3,634 + 0,02 = 3,65$.

Il y a cela dit une **exception**, lors d'une multiplication/division avec des chiffres exacts. Par exemple, on mesure que

$$2R = 3,4532 \Omega$$

alors

$$R = \frac{3,4532}{2} = 1,7266$$

et non 2 si on avait gardé un seul CS.