

Propagation d'un signal

Questions de cours :

- Donner sans démonstration les deux formes mathématiques par lesquelles on peut modéliser une onde progressive quelconque se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants. Que deviennent ces deux formes dans le cas où l'onde se propage dans le sens des x décroissants ?
- Présenter l'onde progressive sinusoïdale, avec la formule selon le sens de propagation, la double périodicité.
- Démontrer la relation liant la longueur d'onde, la période et la célérité d'une onde progressive harmonique.
- Rappeler sans démonstration la forme mathématique permettant de modéliser une onde stationnaire. En déduire la distance entre deux nœuds en fonction de la longueur d'onde.
- Exprimer la longueur d'onde et la fréquence des modes propres d'une corde de Melde en fonction de la célérité des ondes sur la corde et de la longueur de la corde.

Capacités exigibles du BO :

- Écrire les signaux sous la forme $f(x \pm ct)$ ou $f(t \pm x/c)$ pour des ondes progressives dans le cas d'une propagation 1D non dispersive.
- Prévoir dans le cas d'une onde progressive pure l'évolution temporelle à position fixée, et prévoir la forme à différents instants.
- Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la célérité.
- Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour visualiser le phénomène d'interférence de deux ondes.
- Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives.
- Décrire une onde stationnaire observée par stroboscopie sur la corde de Melde.
- Caractériser une onde stationnaire par l'existence de nœuds et de ventres.
- Exprimer les fréquences des modes propres connaissant la célérité et la longueur de la corde.
- Savoir qu'une vibration quelconque d'une corde accrochée entre deux extrémités fixes se décompose en modes propres.
- Choisir les conditions expérimentales permettant de mettre en évidence le phénomène de diffraction en optique ou en mécanique.
- Utiliser la relation $\sin \theta \simeq \lambda/d$.

Manipulations de cours :

- Laser et interférences / diffraction (avec élargisseur de faisceau)
- Dispositif de corde de Melde avec stroboscopie

Introduction

Ce chapitre permet d'aborder la notion de **propagation** d'un signal physique dans l'espace et dans le temps, un enjeu majeur alors que l'on cherche à transmettre toujours plus d'informations et le plus loin possible. Il ne sera pas question d'expliquer véritablement les phénomènes qui donnent naissance à la propagation de ces signaux, ni les équations mathématiques sous-jacentes – traités en seconde année – mais plutôt de s'attacher à la description en tout point de l'espace du signal qui peut être perçu, sa composition, son écriture mathématique et ses interactions avec d'autres signaux de même nature ce qui permettra d'évoquer les **interférences**. Ce chapitre est d'autant plus important qu'il fait référence à des propriétés que l'on retrouve dans de nombreux pans de la physique, que ce soit en optique, en mécanique, en acoustique ou encore en dynamique des fluides.

On se restreindra enfin à des phénomènes de propagation dans une seule direction de l'espace, ce qui limite peu la généralité car dans de nombreux cas une seule coordonnée d'espace est mise en jeu.

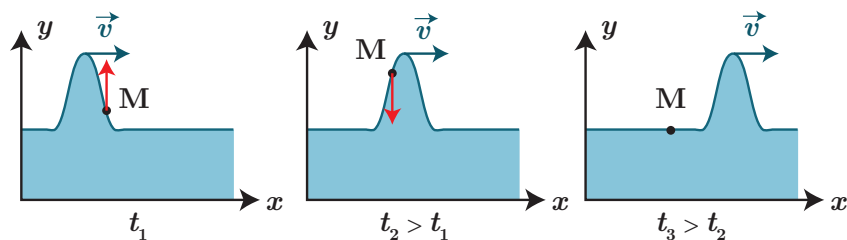
I. Le phénomène de propagation

I.1 Exemples expérimentaux

Observons quelques cas concrets de phénomènes de propagation, afin d'en tirer des éléments-clés.

a) Le soliton

L'exemple le plus simple de perturbation de l'eau s'appelle un soliton, observée pour la première fois sur un canal écossais par John Scott Russel en 1834. La particularité est que cette déformation localisée se déplace dans le canal sans changement de forme ni variation de vitesse : on dit qu'elle se **propage**. Du fait de la vitesse finie de propagation, il faut un certain temps pour que la déformation se propage d'un point à un autre.



On constate sur la figure précédente qu'un point M à la surface de l'eau se déplace verticalement, sans aucun déplacement horizontal, mais une fois le soliton passé, il revient à sa position d'origine. On peut résumer ces observations ainsi :

Définition

On appelle **onde** une perturbation locale des propriétés physiques d'un milieu se propageant dans l'espace à une vitesse finie appelée **célérité** c . Dans le cas d'un milieu matériel, **aucun transport de matière** n'est perceptible en moyenne.

Dans certains milieux on observe :

- une atténuation de l'onde - le milieu est alors dit **absorbant**
- une déformation de l'onde - le milieu est alors dit **dispersif**

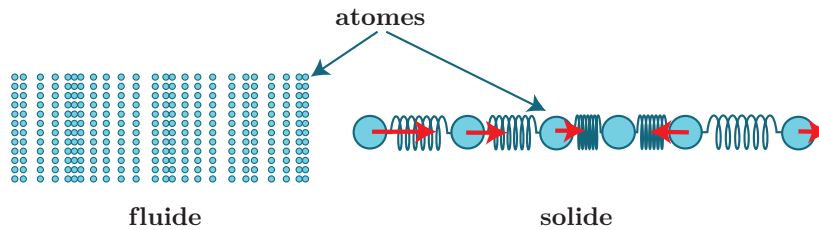
Dans toute la suite, on considérera des milieux non-dispersifs et non-absorbants.

b) Les ondes sonores

On a tous en tête l'image d'un individu au temps du Far West l'oreille collée aux rails de chemin de fer, afin de prévoir le passage d'un train. Au sein d'un solide comme d'un fluide, le son se propage avec une certaine vitesse. Néanmoins les mécanismes microscopiques mis en jeu sont différents :

- pour des fluides, tels que l'air, on observe une modification locale de vitesse et de pression qui se transmet de proche en proche (et à laquelle notre oreille est sensible), et donc une augmentation de la densité locale de particules de fluides ;

- pour des solides, la situation est la même, hormis que l'onde ne se propage pas par l'intermédiaire de chocs mais grâce à d'autres forces répulsives : on peut y modéliser la liaison entre les constituants microscopiques (atomes, ions, molécules) comme un ressort qui se comprime ou se détend.



Définitions

On distingue deux types d'ondes :

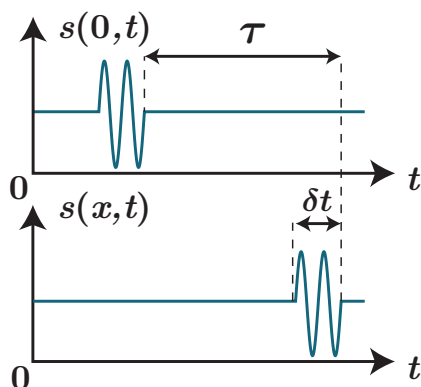
- * les ondes **longitudinales**, où la direction de la perturbation est la même que celle de la propagation (cas des ondes acoustiques schématisées ci-dessus)
- les ondes **transversales**, où la direction de la perturbation est perpendiculaire à celle de la propagation (ondes à la surface d'une corde ou de l'eau)

I.2 Onde progressive

On a pu constater sur l'exemple du soliton que la description de la hauteur d'eau faisait intervenir à la fois l'aspect temporel (variable t) et spatial (variable x) de manière conjointe. On va donc définir une fonction de deux variables $s(x, t)$, où s sera une coordonnée d'espace, une pression, une vitesse, une intensité électrique, etc.

a) Évolution temporelle

Prenons l'exemple concret d'un haut-parleur fixé en un point de l'espace que l'on prendra comme origine et émettant dans la direction $\vec{e}_x$, et un microphone à une distance x quelconque. Un enregistrement au cours du temps du même signal à différentes positions indique qu'il y a un **retard temporel** τ dépendant de la distance :



Le signal à un point de l'espace repéré par son abscisse x $s(x, t)$ correspond à celui en $x = 0$ translaté de ce retard $\tau = \frac{x}{c}$ qui est le temps mis par la perturbation pour parcourir la distance x , d'où $s(0, t) = s(x, t + \tau)$ soit

$$s(x, t) = s(x = 0, t - \tau) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (2.1)$$

où l'on introduit une fonction f à une variable pour simplifier l'écriture.

Dans le cas d'une propagation dans la direction opposée, il suffit de remplacer x par $-x$ et l'onde s'écrit alors

$$s(x, t) = s\left(0, t + \frac{x}{c}\right) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (2.2)$$

b) Évolution spatiale

Représentons maintenant le profil de l'onde dans l'espace à deux instants différents. On remarque plusieurs éléments sur la figure ci-dessous :

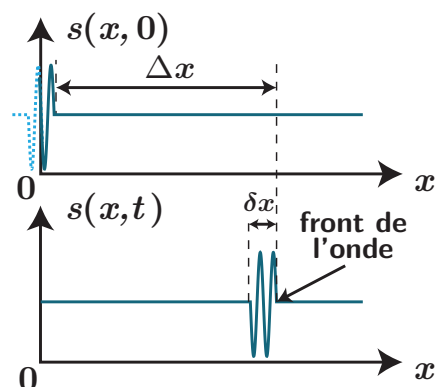
- la courbe associée à la perturbation semble similaire à la précédente mais inversée : c'est prévisible, ce qui est joué dans un premier temps par le haut-parleur est ce qui constituera le **front de l'onde**, et se trouvera donc le plus loin de la source ;
- les motifs n'ont pas la même taille : δx et δt n'ont pas la même dimension, il n'y a pas lieu de représenter les signaux avec la même largeur.

On remarque de plus qu'à deux instants différents, l'onde s'est propagée d'une distance

$$\Delta x = ct$$

* ainsi $s(x, t) = s(x - \Delta x, 0)$ Cela permet d'introduire une fonction F telle que

$$s(x, t) = s(x - ct, 0) = F(x - ct) \quad (2.3)$$



De manière équivalente, si l'onde se propage dans le sens $-\vec{e}_x$, on peut introduire une fonction G telle que $s(x, t) = G(x + ct)$

À retenir

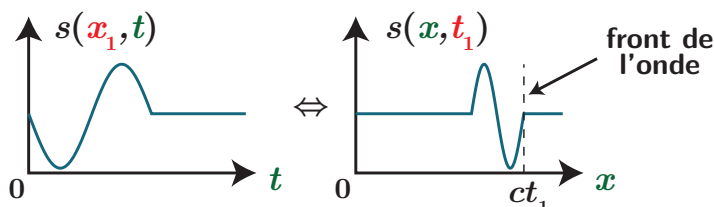
Une onde progressive se propageant à la célérité c dans la direction de l'axe (Ox) dans le sens positif est de la forme mathématique

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = F(x - ct) \quad (2.4)$$

tandis que dans le sens négatif :

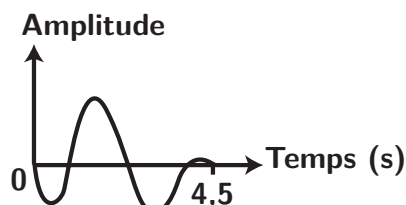
$$s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) = G(x + ct) \quad (2.5)$$

À noter enfin que pour passer d'une représentation spatiale à une représentation temporelle, il faut non seulement tracer le symétrique de la courbe par rapport à la verticale, mais aussi réfléchir à quelle partie du signal sera effectivement déjà propagée, et enfin changer d'abscisse où le facteur de conversion entre coordonnée spatiale et temporelle est la célérité c :



Exercice

Un dispositif vibrant commandé en tension permet d'exercer un mouvement d'une corde horizontale en $x = 0$ selon la fonction représentée ci-contre.



Prévoir l'évolution temporelle en un point $x = 1,0$ m si la vitesse de propagation des ondes dans la corde est de $c = 0,40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Prévoir l'évolution de la forme de la corde à $3,1$ s

c) Exemples de célérité

Il faut impérativement savoir par coeur :

- * la célérité des ondes sonores dans l'air à $T = 20^\circ\text{C}$ est de $340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;
- * la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide est de $3,00\cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

On peut aussi connaître le cas des ondes acoustiques dans l'eau ($1480 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$), dans les solides (autour de $5000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$).

I.3 Cas de l'onde progressive sinusoïdale

D'après le chapitre SP1, on a vu que tout signal périodique pouvait s'écrire sous la forme d'une somme de sinusoïdes de fréquences multiples du fondamental. Étudions une seule de ces composantes pour pouvoir en retirer quelques propriétés, et ensuite généraliser.

a) Expression d'une onde progressive sinusoïdale

Considérons dans toute la suite une onde progressive se propageant selon $\vec{e}_x$, de fréquence ν et pulsation ω . On parle d'**onde sinusoïdale** si en tout point de l'espace, elle prend la forme

$$s(x, t) = S_0 \cos(2\pi\nu t + \varphi(x)) = S_0 \cos(\omega t + \varphi(x)) \quad (2.6)$$

où S_0 est l'amplitude en tout point (on ne considère pas d'atténuation) et $\varphi(x)$ est la phase initiale de l'onde au point d'abscisse x .

Cette onde se propageant à la célérité c , elle est donc l'image de la vibration issue de $x = 0$ mais avec un retard $\tau = \frac{x}{c}$, soit $s(x, t) = s(0, t - \tau)$ d'où on conclut que :

Définition

Une **onde progressive sinusoïdale** se propageant dans le sens des x croissants admet pour expression

$$s(x, t) = S_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right) \quad (2.7)$$

$$= S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (2.8)$$

* où $k = \frac{\omega}{c}$ est appelé **nombre d'onde** et $\varphi_0 = \varphi(x = 0)$ la phase initiale à l'origine du repère.

Dans le cas où l'onde se propage dans le sens $-\vec{e}_x$, les expressions précédentes doivent être modifiées en substituant $-x$ à x , soit

$$s(x, t) = S_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_0)$$

b) Périodicité spatiale : la longueur d'onde

Le signal précédemment introduit est périodique pour la variable temporelle, de période $T = \frac{1}{\nu}$, mais on constate qu'il existe également une périodicité spatiale. En effet, fixons le temps et regardons l'évolution spatiale de la fonction $s(x, t_0)$:

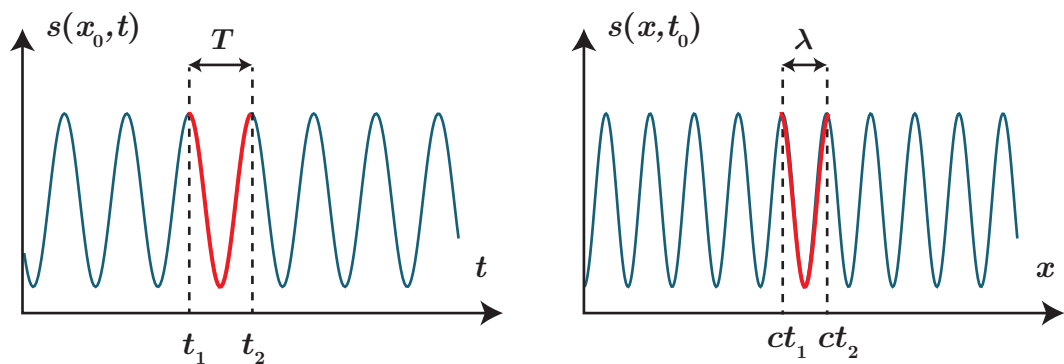
$$s(x, t_0) = S_0 \cos(-kx + \omega t_0 + \varphi_0) = S_0 \cos(-kx + \varphi(t_0)) \quad (2.9)$$

$$= S_0 \cos\left(-\frac{\omega x}{c} + \varphi(t_0)\right) = S_0 \cos\left(-\frac{2\pi f x}{c} + \varphi(t_0)\right) \quad (2.10)$$

Propriété

* L'onde plane progressive sinusoïdale possède une périodicité spatiale, de période $\lambda = \frac{c}{f} = cT = \frac{2\pi}{k}$ appelée **longueur d'onde**.

La formule $\lambda = cT$ se comprend physiquement : au bout d'un temps T , le front de l'onde a parcouru spatialement une période, correspondant à une distance cT :



On parle alors de **double-périodicité** pour une onde progressive sinusoïdale, comme on peut écrire de manière générale :

$$s(x, t) = S_0 \cos \left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right) \quad (2.11)$$



Exercice

Préciser la gamme de longueur d'onde pour les ondes sonores audibles par l'oreille humaine, si la célérité du son dans l'air vaut $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$$\lambda \in [17 \text{ mm}; 17 \text{ m}]$$



Exercice

Lorsque ces ondes se propagent dans l'eau plutôt que dans l'air, quelles sont les caractéristiques modifiées parmi la célérité, la fréquence, la longueur d'onde et la période ?

Fréquence et période inchangés (car caractéristique de la source émettant l'onde), mais λ pourra changer si c diffère selon le milieu : ici c'est bien le cas entre l'air et l'eau.

c) Déphasage

On peut enfin étudier le déphasage entre deux points différents x_1 et x_2 , dû à la propagation. Avec en chaque point x_i ($i = 1, 2$) $s(x_i, t) = S_0 \cos(\omega t - kx_i + \varphi_0)$, le déphasage est donc

$$\Delta\varphi_{2/1} = (-kx_2 + \varphi_0) - (-kx_1 + \varphi_0) = kx_1 - kx_2 = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda} = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{cT} = 2\pi \frac{\tau}{T} \quad (2.12)$$

avec $\tau = \frac{x_1 - x_2}{c}$ le retard temporel entre les deux positions.

On en tire plusieurs conséquences :

- * deux points en lesquels l'onde est en phase ($\Delta\varphi = 2n\pi$) sont distants d'un multiple entier de λ ;
- * deux points en opposition de phase ($\Delta\varphi = (2n + 1)\pi$) sont distants de $(n + \frac{1}{2})\lambda$ avec n entier.

II. Superposition de signaux

II.1 Interférence entre deux ondes de même fréquence

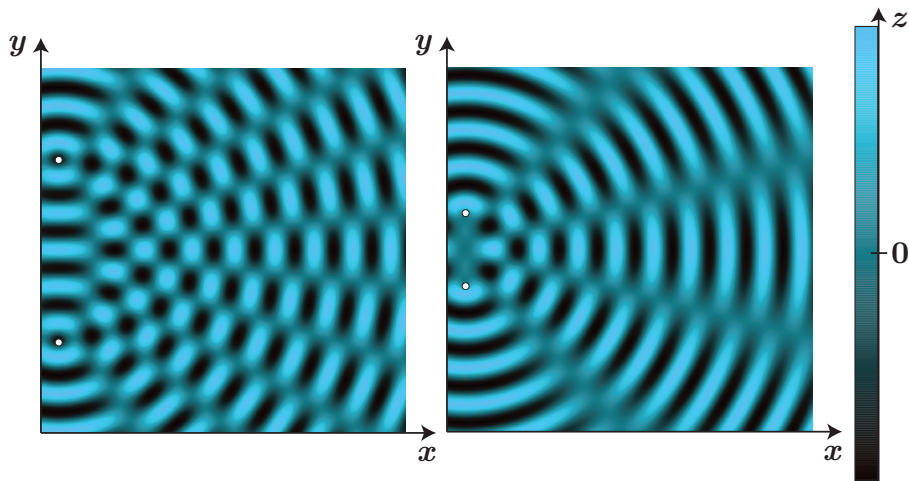
Les phénomènes d'**interférences** en acoustique sont relativement communs et n'ont pas besoin de matériel de laboratoire pour être observés. On va considérer ici la superposition de deux signaux **de même nature** et de même fréquence. On constate alors que ces signaux s'additionnent, mais **l'amplitude résultante dépend de la position**.

a) Expérience

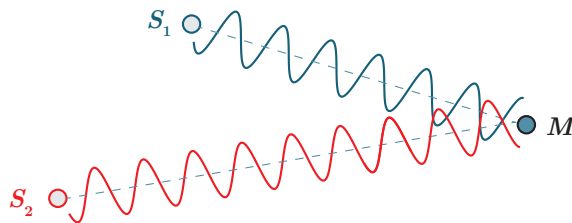
Lançons un caillou à la surface de l'eau : il crée une onde progressive harmonique qui se propage radialement autour du lieu de l'impact. Si on en lance un deuxième non loin, les deux ondes ainsi créées se superposent et forment des motifs bien particuliers, des zones où la surface de l'eau reste constamment immobile, d'autres où la surface oscille.

Afin d'étudier un peu plus en détail, on peut se servir d'une cuve à ondes. On a représenté ci-dessous le résultat de l'expérience avec deux sources dont l'éloignement diffère. Plusieurs constatations :

- il y a des zones où il n'y a pas de variation de surfaces au cours du temps alors que chaque signal produit une onde dans tout l'espace : on parle d'**interférences destructives** ;
- ailleurs l'onde résultante possède une amplitude plus importante que pour l'onde issue de chaque source : on parle d'**interférences constructives** ;
- ces zones possèdent une répartition spatiale dépendant de la distance entre les deux sources : ainsi changer les caractéristiques des sources (éloignement ou fréquence) impose des changements sur la figure observée.



b) Interprétation physique



Calculons l'amplitude résultante de $S(M, t)$ associée à la somme de deux ondes sinusoïdales de pulsation ω à un point de l'espace quelconque M . Pour cela considérons que $s_1(S_1, t) = A \cos(\omega t)$ et $s_2(S_2, t) = B \cos(\omega t)$. Du fait du retard lors de la propagation, on peut écrire

$$s_1(M, t) = A \cos(\omega(t - \tau_1)) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{S_1 M}{c}\right)\right)$$

(avec $S_1 M$ la distance entre les deux points). Soit avec $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, $s_1(M, t) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_1 M\right)$.

De même $s_2(M, t) = B \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_2 M\right)$. Donc la somme des deux signaux au point M peut s'écrire

$$S(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) + B \cos(\omega t + \psi) \quad (2.13)$$

en posant $\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} S_1 M$ et $\psi = -\frac{2\pi}{\lambda} S_2 M$ les phases associées à la propagation de chaque onde. En décomposant chaque fonction sinusoïdale on obtient :

$$S(x, t) = [A \cos \varphi + B \cos \psi] \cos(\omega t) - [A \sin \varphi + B \sin \psi] \sin(\omega t) \quad (2.14)$$

Ce signal se met donc sous la forme $S(x, t) = C \cos(\omega t + \alpha)$ ayant une amplitude C telle que (cf chap. SP1)

$$C^2 = (A \cos \varphi + B \cos \psi)^2 + (A \sin \varphi + B \sin \psi)^2 \quad (2.15)$$

$$= A^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + B^2(\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) + 2AB(\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) \quad (2.16)$$

soit finalement :

$$* \quad C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\varphi - \psi) \quad (2.17)$$

Par conséquent, on constate que l'amplitude dépend de la position dans l'espace car

$$\varphi - \psi = 2\pi \frac{S_2 M - S_1 M}{\lambda} = \frac{2\pi \delta}{\lambda} \quad (2.18)$$

où S_i est la position de la source i , $\lambda = \frac{c}{\nu}$ la longueur d'onde des ondes.

Propriétés

On introduit $\delta = S_2 M - S_1 M$ la **différence de marche**. Selon sa valeur, l'amplitude résultante pourra passer par des valeurs diverses dont :

- * ▪ une amplitude maximale lorsque $\Delta\varphi = 0 [2\pi]$ soit encore lorsque δ est un multiple entier de λ , où $C = A + B$ lors d'interférences **constructives**,
- une amplitude minimale lorsque $\Delta\varphi = \pi [2\pi]$ avec δ de la forme $\left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda$ où $A = |A - B|$ lors d'interférences **destructives**.)



Exercice

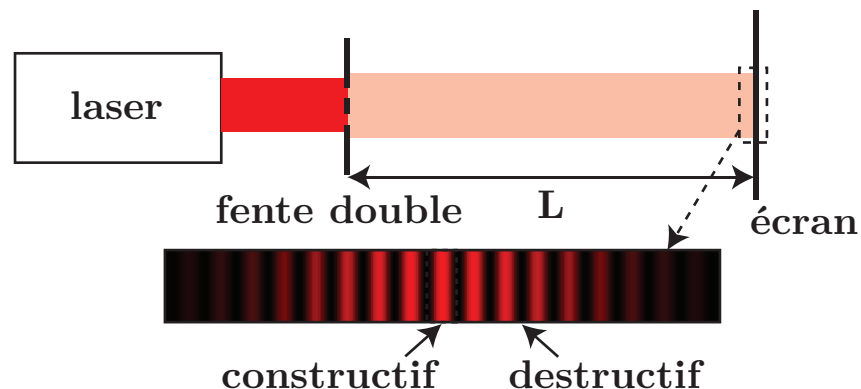
Quelle doit être la distance minimale à appliquer entre deux hauts-parleurs en vis-à-vis alimentés par le même signal sinusoïdal de pulsation ω pour obtenir entre ceux-ci une interférence constructive ? destructive ? On calculera la différence de marche en un point quelconque entre les deux hauts-parleurs.

Introduisons un axe (Ox) où le premier haut-parleur est en $x = 0$, le second en $x = \ell$. À un point x quelconque, la différence de marche vaut $\delta = (\ell - x) - x = \ell - 2x \in [-\ell; \ell]$. On a donc, quel que soit ℓ , une interférence constructive en $x = \ell/2$. Pour avoir des interférences destructives, il faut au minimum que $\ell = \lambda/2$ (et donc interférences destructives en $x = 0$ et $x = \ell$).

c) Autres expériences d'interférences

Outre les interférences d'ondes mécaniques à la surface de l'onde, notons que le même phénomène se produit avec des ondes acoustiques de même fréquence, mais également avec la lumière. Prenons l'expérience classique consistant à envoyer un faisceau laser sur deux fentes très proches l'une de l'autre :

Pour une superposition d'ondes de fréquences légèrement décalées on peut citer le phénomène de battements qui est utilisé pour accorder un instrument avec un diapason.



* On constate sur l'écran loin du dispositif une suite de franges sombres et brillantes, indiquant les lieux d'interférences respectivement destructives et constructives. En effet, une fois le laser passé dans les deux fentes, ces dernières jouent le rôle de sources de lumière secondaire d'intensité et de déphasage à l'origine identiques. Par conséquent les interférences destructives sont d'amplitude nulles ($|A - B| = 0$). On peut d'ailleurs prévoir que les interférences sont constructives là où on ne s'y attendait "pas", au niveau de la projection orthogonale sur l'écran du milieu des deux fentes : la distance entre les deux fentes et ce point est la même par symétrie, donc la différence de marche est nulle et les interférences sont constructives.

II.2 Ondes stationnaires

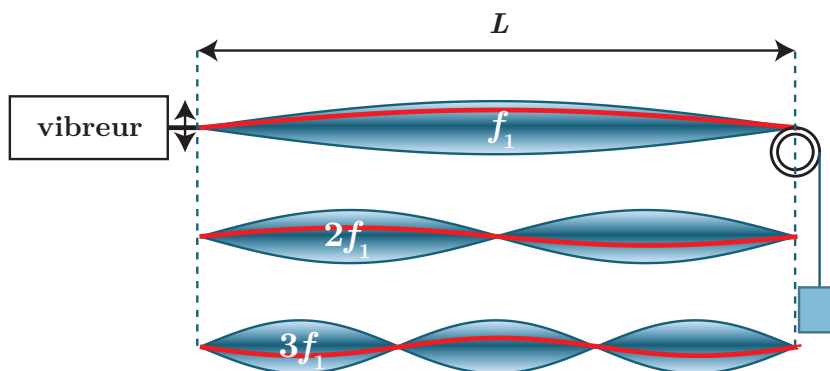
Pour terminer cette section, on va étudier ce qu'il se passe lorsqu'il y a superposition d'ondes progressives se déplaçant dans les deux sens, à cause de réflexions : cela va nous permettre de découvrir de nouveaux effets.

a) Exemple de la corde de Melde

i) Observations expérimentales

On va prendre l'exemple d'une corde horizontale tendue entre un vibreur et une poulie, par le biais d'une masse : ce système est appelé **corde de Melde**. Le vibreur produit un déplacement transversal harmonique et sinusoïdal dont l'amplitude est de l'ordre de quelques millimètres.

* À partir d'une fréquence que l'on notera f_1 , on observe une amplitude plus importante de la corde, qui prend la forme d'un fuseau. Pour des fréquences nf_1 avec n entier, ce phénomène réapparaît avec cette fois n fuseaux, comme le montre la figure du dessous. On parle alors de phénomène de **résonance** car le déplacement de la corde passe par un maximum plus grand que le déplacement induit par vibreur, pour ces fréquences bien précises. L'observation peut être effectuée à l'aide d'un **stroboscope**, qui envoie des flashes lumineux à intervalles réguliers T : lorsque l'onde paraît immobile, T est alors un multiple entier de la période d'excitation. Dans le cas contraire, l'onde semble osciller au ralenti.



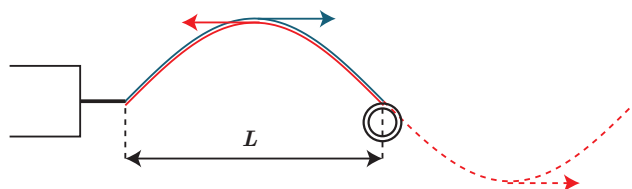
On constate alors qu'il existe des zones de la corde qui restent immobiles, ce sont les **nœuds** de vibration, et à l'opposé on parle de **ventres** de vibration lorsque l'amplitude du déplacement est maximale : ces zones sont fixes dans le temps, seule l'amplitude change – mais notre œil, du fait de la persistance rétinienne, observe des faisceaux – on parle d'**onde stationnaire**.

ii) Première interprétation physique

Concrètement, le vibreur émet une onde progressive sinusoïdale : lorsqu'elle rencontre la poulie, elle se réfléchit sur la corde – cette dernière correspond alors à la réflexion par rapport à l'axe horizontal de l'onde incidente – et d'autres réflexions se poursuivent à chaque extrémité. Il y a alors superposition entre une infinité d'ondes progressives de même fréquence et de sens opposé. Majoritairement il se produit des interférences destructives sauf pour des fréquences telles que la longueur de la corde L est un multiple de $\frac{\lambda}{2}$ où l'onde réfléchie coïncide avec l'onde qui continue à être émise par le vibreur :

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$

(2.19)



iii) Expression mathématique d'une onde stationnaire

Exprimons mathématiquement la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de sens opposés et de même amplitude :

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) \quad (2.20)$$

$$= A \cos(\omega t - kx + \varphi_1) + A \cos(\omega t + kx + \varphi_2) \quad (2.21)$$

$$= 2A \cos\left(\omega t + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\right) \cos\left(kx + \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)\right) \quad (2.22)$$

à l'aide de la formule trigonométrique $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$. On constate que les deux variables x et t sont découplées : l'onde ne se propage pas, elle reste sur place et seule son amplitude varie au cours du temps, conformément aux observations précédentes.

Définition

Une onde est dite **stationnaire** si elle peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux fonctions, l'une dépendant exclusivement des coordonnées d'espace, l'autre du temps :

$$* \quad s(x, t) = S_0 f(x) \times g(t) \quad (2.23)$$

où $f(x)$ caractérise l'enveloppe spatiale de l'onde, et $g(t)$ la dépendance temporelle impliquant une variation d'amplitude de l'onde au cours du temps. **Elle ne se propage donc pas dans l'espace.**



Exercice

Lors de l'expérience avec une corde de Melde de longueur 0,95 m alimentée par un vibreur à la fréquence de 56 Hz, on observe trois noeuds entre ses deux extrémités. Déterminer la célérité des ondes.

D'après l'information donnée, on excite la corde à la fréquence $4f_1$, car il y a trois nœuds. Donc $f_1 = 14$ Hz, et $L = 2\lambda$ donc $\lambda = 0,48$ m. Ainsi $c = \lambda f = 6,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, ordre de grandeur cohérent pour une onde mécanique sur une corde.

b) Modes propres et conditions aux limites

Pour terminer cette étude, on va déterminer la forme que peut prendre une corde maintenue en ses deux extrémités.

i) Modes propres d'une corde

D'après ce qui précède, on peut chercher le profil de la corde sous la forme d'une onde stationnaire sinusoïdale

$$s(x, t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \quad (2.24)$$

Pour que cette onde décrive bien la situation physique, il faut qu'en chacune de ses extrémités, l'amplitude soit nulle : on parle de **conditions aux limites**, qui s'écrivent ici :

$$\begin{cases} s(0, t) = 0 & \forall t \\ s(L, t) = 0 & \forall t \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\quad (2.26)$$

*

On a alors par conséquent, comme $S_0 \neq 0$ et que $\cos(\omega t + \varphi) \neq 0$ quasiment tout le temps (avec $\omega \neq 0$) :

$$\begin{cases} \cos(\psi) = 0 \\ \cos(kL + \psi) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\quad (2.28)$$

Choisissons $\psi = -\frac{\pi}{2}$, il vient $\sin(kL) = 0$, impliquant que $kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire : $k = \frac{n\pi}{L}$, et donc $\omega = \frac{n\pi c}{L}$ ou $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$. Il vient également que $\lambda = \frac{2L}{n}$, exactement la même relation déterminée pour la corde de Melde.

La forme d'une corde tendue en ses deux extrémités s'écrit donc mathématiquement :

$$s(x, t) = S_0 \cos(2\pi f_n t + \varphi) \sin(k_n x) \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{et} \quad f_n = \frac{nc}{2L}$$

On en tire plusieurs éléments :

- il apparaît des **modes propres** à la corde définissant les seules fréquences où l'on observe une onde stationnaire $f_n = \frac{nc}{2L}$ indicées par un entier n . On observe alors n ventres et $n - 1$ nœuds (sans compter les deux extrémités) ;
- ce sont ces modes propres que l'on observe lors de l'expérience de la corde de Melde de manière individuelle lors d'une **résonance**.

Exercice

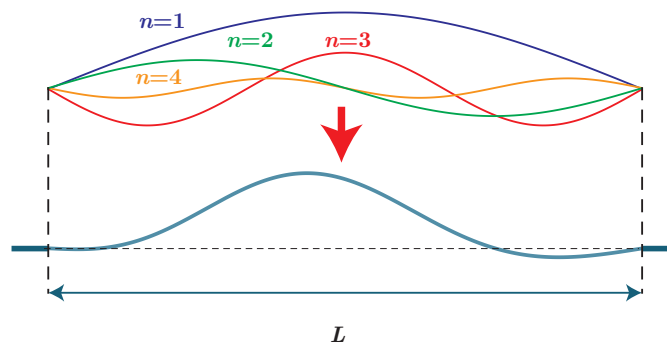
Déterminer pour un mode n quelconque la position des nœuds de vibration d'une corde tendue en ses deux extrémités. Retrouver le nombre de nœuds que l'on peut observer pour ce mode.

ii) Forme générale d'une corde tendue

On peut enfin se poser la question de l'allure d'une corde de guitare lorsqu'on applique une déformation initiale. On peut alors montrer que la forme générale de la corde est constituée d'une **superposition des différents modes propres** de la corde de longueur L :

$$s(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) \quad (2.29)$$

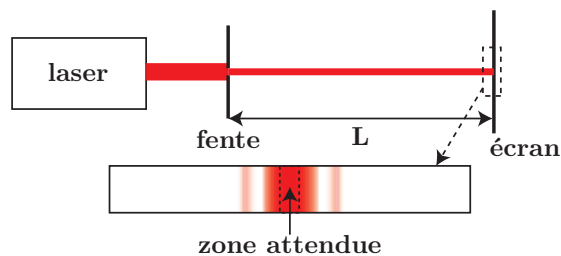
avec $k_n = \frac{n\pi}{L}$, $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$, S_n et φ_n des constantes dépendant des conditions initiales. La longueur et la tension de la corde étant fixées, on peut alors connaître la fréquence du mode fondamental et des harmoniques, indispensable lorsque l'on conçoit un instrument de musique.



III. Limitation spatiale d'une onde : la diffraction

III.1 Introductions expérimentales

a) Isoler un faisceau lumineux



On peut essayer expérimentalement d'isoler un faisceau de lumière, que l'on va prendre pour simplifier monochromatique (c'est-à-dire que l'onde lumineuse est caractérisée par une seule fréquence ν et une pulsation $\omega = \frac{c}{\nu}$ où c est la célérité de la lumière). Le but est d'avoir un unique **rayon lumineux** de diamètre quasi-nul. On effectue donc l'expérience schématisée précédemment, faisant intervenir un laser dont la taille du faisceau est de quelques centimètres et une fente de largeur a réglable. On observe alors sur un écran distant de L de la fente.

On constate alors que pour une fente d'environ 1 cm, la tâche à l'écran correspond à la largeur de la fente, tandis qu'il se produit un phénomène assez particulier à mesure que la fente est rétrécie : au lieu de diminuer en largeur, la tâche à l'écran s'élargit, de manière d'autant plus prononcée que la fente est petite.

b) Écouter aux portes



Afin de voir si ce phénomène n'est pas une propriété purement optique, on peut tenter une expérience analogue à l'aide d'une porte et d'un micro. Il s'avère aussi que la propagation d'une onde sonore monochromatique au travers d'une porte entrebâillée est perturbée et peut être captée par le micro alors même que ce dernier n'est pas face à l'ouverture. Il s'agit du phénomène de **diffraction**, où l'on constate que la longueur d'onde associée $\lambda \simeq 0,5 \text{ m}$ est de l'ordre de la largeur de l'ouverture.

On retrouve ce même phénomène à l'entrée d'un port avec des vagues sur l'eau.

III.2 Le phénomène de diffraction

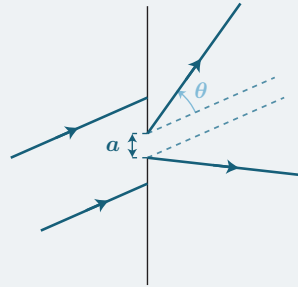
Diffraction

De manière générale, lorsqu'une onde traverse une ouverture **dont la taille est comparable à la longueur d'onde**, cette dernière est diffractée, c'est-à-dire que la propagation en sortie de la fente s'étale sur un cône de demi-angle d'ouverture θ tel que

*

$$\sin(\theta) \simeq \frac{\lambda}{a} \quad (2.30)$$

où λ est la longueur d'onde et a la dimension de l'ouverture.

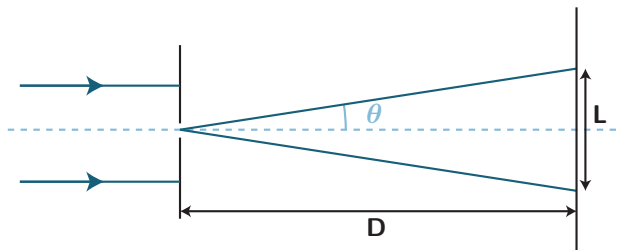


Cette formule est conforme aux observations précédentes de variation de la taille de la fente a (expérience optique) ou de λ (expérience acoustique).

À noter que ce phénomène est à l'origine de nombreuses limitations en physique :

- détails limités à l'aide d'un appareil photo ou d'un télescope : la lentille d'entrée joue le rôle de diaphragme pour les rayons lumineux et peut amener un manque de netteté à l'observation (tâche au lieu d'un point)
- taille de stockage sur un CD limitée, ayant conduit le développement de lasers ayant des longueurs d'onde de plus en plus petites pour stocker davantage d'informations.

III.3 Largeur de la tache de diffraction



Exercice

Établir la relation entre d , λ , L et la largeur de la fente de diffraction a . Évaluer l'ordre de grandeur typique de la largeur d'une tache de diffraction pour un laser rouge $\lambda \sim 630 \text{ nm}$.

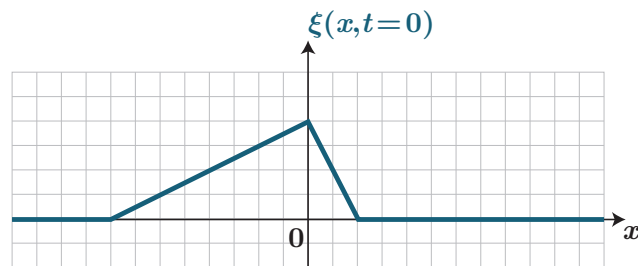
On peut prévoir quantitativement la largeur de la tache de diffraction en se servant du fait que l'angle θ est petit, et donc $\sin \theta \simeq \theta \simeq \tan \theta$. Il vient alors que $\sin \theta \simeq \frac{\lambda}{a} \simeq \tan \theta = \frac{d}{L}$ soit $d \simeq \frac{\lambda L}{a}$ (odg typique qqes mm pour $L = 1 \text{ m}$).

Dans le cas d'une fente circulaire, on peut montrer que $d = 1,22 \frac{\lambda L}{a}$.

Exercices

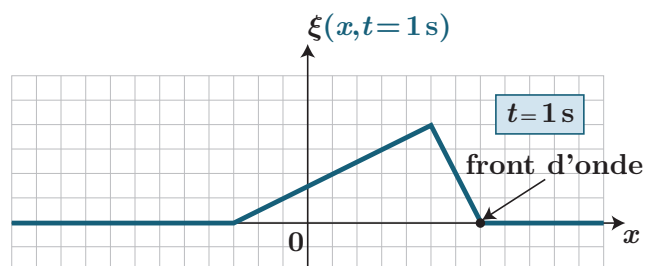
2.1 Onde sur une corde d'escalade

Une onde est générée sur une longue corde d'escalade tendue. On suppose qu'elle se propage de la gauche vers la droite, sans déformation, à la célérité $c = 50 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. La figure ci-dessous représente schématiquement l'allure d'une photo de la corde prise à un instant que nous prendrons comme origine des temps $t = 0$. Une graduation d'abscisse représente 10 cm alors qu'une graduation d'ordonnée représente 1 cm.

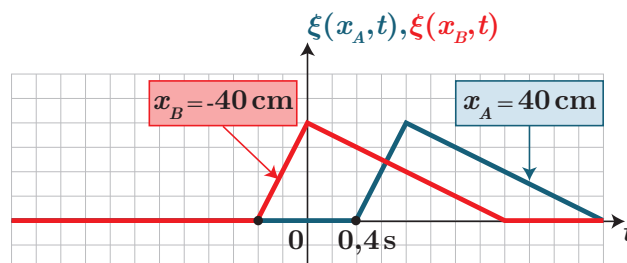


1. Représenter l'allure du profil de la corde 1 s après la prise de la photo.
2. Représenter l'allure du chronogramme de l'ébranlement $\xi(x = x_A, t)$ au point A d'abscisse $x_A = 40 \text{ cm}$. Même question au point B d'abscisse $x_B = -40 \text{ cm}$.

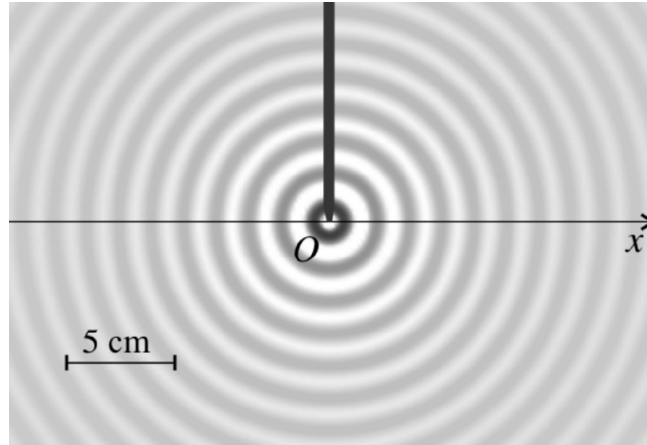
-
1. On demande une représentation de l'onde **dans l'espace**, un instant après la première prise de vue. Il faut donc représenter la même onde (pas de déformation), mais décalée spatialement d'une distance $\Delta x = c\Delta t = 50 \text{ cm}$ (soit 5 carreaux).



2. On représente maintenant l'onde **dans le temps**, à une position donnée. Le front de l'onde se trouve, à $t = 0$, à une distance de 20 cm. Il arrivera donc en A à $t_1 = \frac{20}{50} = 0,4 \text{ s}$. Il ne faut pas oublier d'inverser la forme du motif (symétrie par rapport à l'axe vertical), et un carreau compte pour $0,2 \text{ s}$ ($\frac{\delta x}{c} = \frac{10}{50}$). Pour B, on décale le motif ainsi dessiné de $\Delta t = \frac{x_B - x_A}{c} = \frac{-80}{50} = -1,6 \text{ s}$ (soit 8 carreaux) correspondant au décalage temporel entre les deux positions.



2.2 Cuve à onde



La figure ci-avant représente la surface d'une cuve à ondes éclairée en éclairage stroboscopique. L'onde est générée par un vibreur de fréquence $f = 20$ Hz. L'image est claire là où la surface de l'eau est convexe (bosse), et foncée là où elle est concave (creux). Ainsi le niveau de gris indique la hauteur d'eau dans la cuve.

1. En mesurant sur la figure, déterminer la longueur d'onde.
2. En déduire la célérité des ondes à la surface de l'eau.
3. Supposons l'onde harmonique, d'amplitude H . Donner une expression mathématique pour la hauteur $h(x, t)$. On distinguera les cas $x < 0$ et $x > 0$.
4. Expliquer pourquoi l'amplitude H n'est en fait pas constante.

-
1. On observe sur la figure la propagation radiale d'une onde issue de O . Le vibreur se déplaçant périodiquement, il crée une onde dont l'étendue spatiale est liée à la longueur d'onde λ : cela correspond à la distance entre deux motifs (entre deux creux, ou deux bosses par exemple). Afin d'obtenir λ , on mesure la distance entre **le maximum de motifs**, afin de diminuer l'incertitude de pointé. Soit après conversion à l'aide de l'échelle :

$$8\lambda = 12,0 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 1,5 \text{ cm}$$

2. Ainsi, avec la relation $\lambda = cT = \frac{c}{f}$, on obtient $c = \lambda f = 30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
3. On reconnaît ici le cas de la propagation d'une onde progressive harmonique. Il faut distinguer le cas des x positifs, où la propagation s'effectue dans le sens $+\vec{e}_x$, soit $h(x, t) = H \cos(\omega t - kx)$ avec $\omega = 2\pi f$ et $k = \frac{\omega}{c}$. Si $x < 0$, l'onde se propage dans le sens des x décroissants, on écrit donc mathématiquement $h(x, t) = H \cos(\omega t + kx)$. D'où :

$$h(x, t) = H \cos(\omega t - k|x|)$$

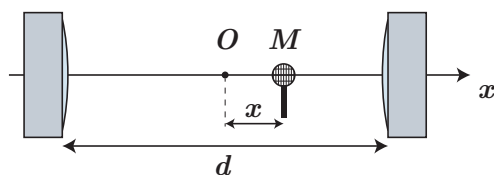
4. En réalité, du fait de la dissipation des ondes à la surface de l'eau, l'amplitude décroît à mesure que l'on s'éloigne de la source.

2.3 Houle

La houle se traduit en surface par une onde progressive sinusoïdale à la surface libre du fluide. Un observateur sur un bateau amarré en $x = 0$ mesure la période d'oscillation du bateau sous l'effet de la houle, il trouve $T = 15$ s. La célérité des ondes de surface est $c = 9,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, et les ondes se déplacent dans le sens des x croissants.

1. Déterminer la longueur d'onde de la houle.
2. Déterminer la forme mathématique de cette onde $h(x, t)$ (on notera H l'amplitude de l'oscillation et on prendra le bateau comme référence de phase).
3. Une bouée est située à $d = 104$ m, dans la direction de propagation de la houle. Déterminer littéralement et numériquement le déphasage entre l'oscillation du bateau et celle de la bouée. Représenter, en respectant les proportions, la situation à un instant donné, puis une demi-période après.
4. Tracer sur un autre graphe l'allure de l'altitude de l'eau au niveau du bateau et au niveau de la bouée, en fonction du temps.

2.4 Interférences sonores



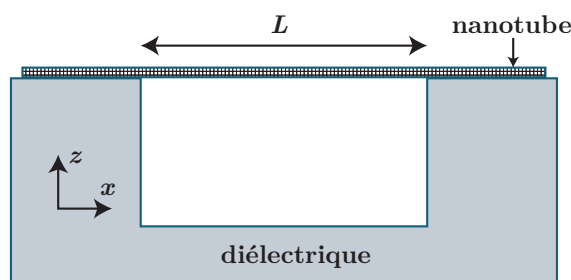
Deux petits haut-parleurs sont disposés à une distance $d = 1\text{ m}$ l'un de l'autre le long d'un axe Ox , symétriquement par rapport au point O . On place également sur cet axe un micro au point M d'abscisse x , entre les deux haut-parleurs que l'on alimente avec un même signal sinusoïdal de fréquence $f = 500\text{ Hz}$. On visualise la tension délivrée par le micro après l'avoir amplifiée.

1. Quelle est la nature des interférences au point O ?
2. Exprimer la position des maxima et des minima d'intensité le long de l'axe Ox en fonction de la longueur d'onde λ .
3. Lorsqu'on déplace le micro le long de l'axe en partant du point O , l'amplitude du signal commence par décroître, puis elle augmente avant de passer par un maximum en $x_1 = 341\text{ mm}$. Interpréter cette observation et en déduire la vitesse du son dans l'air à la température de l'expérience.
4. On constate qu'entre le point O et le premier maxima sur l'axe, l'amplitude du signal ne prend pas la même valeur. On fait l'hypothèse que l'amplitude de l'onde sonore décroît avec la distance à la source selon une loi en $A(r) = \frac{k}{r}$, où k est une constante et r la distance entre la source et le point considéré. Déterminer le rapport entre l'amplitude A_1 du signal total au premier maxima décentré et celle A_0 du point central. Cette variation est-elle perceptible ?

2.5 Nano-résonateur électromécanique

(d'après agrégation externe de physique 2015)

On s'intéresse au dispositif représenté ci-dessous, constitué d'un nanotube de carbone suspendu au dessus d'une tranchée creusée dans un diélectrique. Les deux extrémités du nanotube sont recouvertes par des électrodes en or permettant d'assurer l'immobilité mécanique des extrémités et d'injecter un courant électrique dans le nanotube, la partie libre admet pour longueur $L = 1,5\text{ }\mu\text{m}$. Sous l'effet d'une excitation externe, le nanotube peut vibrer. On suppose que cette vibration a lieu dans le plan (xOz) et on note $z(x, t)$ l'écart local à la position d'équilibre.

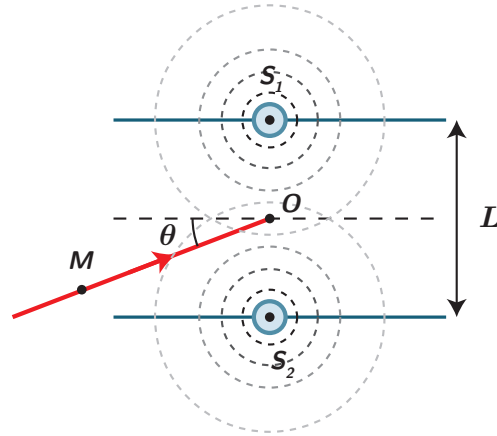


1. De quel type d'onde s'agit-il ? De quoi peut dépendre la célérité associée ? Par la suite on prendra $c = 3,0 \cdot 10^3\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
2. Après avoir donné les conditions aux limites imposées par la géométrie du dispositif, proposer une expression pour $z(x, t)$.
3. En déduire les fréquences propres de vibration. Calculer la fréquence du mode fondamental.
4. Représenter l'allure du nanotube pour différents modes. Dans le cas du mode n , combien y-a-t-il de nœuds ? de ventres ?
5. Quelles autres ondes peuvent a priori s'établir dans ce type de structure ?

2.6 Au secours, j'ai raté la piste ! **

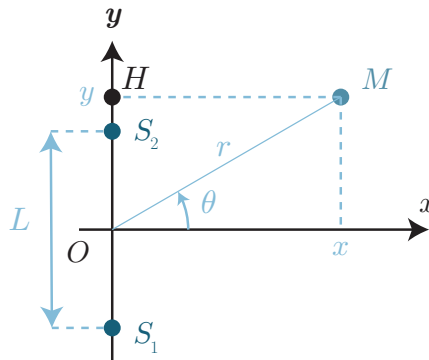
(d'après Olympiades Internationales de Physique 2005)

Sur une piste d'atterrissage, deux antennes de guidage sont séparées de $L = 100$ m. Elles émettent deux signaux radio de même intensité I_0 , en phase, de fréquence $f_0 = 12$ MHz. Un avion se dirige vers la piste avec une vitesse v et vise le milieu des deux antennes en faisant un angle θ avec la piste.



1. Calculer la différence de marche entre les deux sources, pour un point M quelconque repéré par l'angle θ et la distance $r \gg L$ du point O. On calculera d'abord $S_2M^2 - S_1M^2$.
2. En déduire alors l'intensité du signal combiné des deux antennes, reçue par l'avion, pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Pour quel angle minimal l'avion ne reçoit-il aucun signal ?
3. L'avion fait une erreur de trajectoire : il se dirige vers l'une des deux antennes et non vers le milieu de la piste, avec $\theta = 0$. L'intensité du signal reçu commence à diminuer. À quelle distance de l'antenne la plus proche se trouve-t-il quand l'intensité est minimale ?
4. L'avion produit un signal de référence à 12 MHz qui est en permanence comparé au signal reçu par l'antenne visée. Déterminer la fréquence du signal issu de l'antenne perçue par l'avion en mouvement par la méthode de votre choix.

-
1. Calculons d'abord $S_2M^2 - S_1M^2$ comme précisé dans l'énoncé. On introduit le point H comme le projeté orthogonal de M sur la droite (S_1S_2) , et **on réalise un schéma** (important !) :



Grâce au théorème de Pythagore dans les triangles S_2HM et S_1HM , et avec $y = r \sin \theta = OH$:

$$S_2M^2 - S_1M^2 = (S_2H^2 + HM^2) - (S_1H^2 + HM^2) \quad (2.31)$$

$$= S_2H^2 - S_1H^2 \quad (2.32)$$

$$= (OH - S_2O)^2 - (OH + S_1O)^2 \quad (2.33)$$

$$= \left(\frac{L}{2} - r \sin(\theta)\right)^2 - \left(\frac{L}{2} + r \sin(\theta)\right)^2 \quad (2.34)$$

$$= -2rL \sin(\theta) \quad (2.35)$$

Or, $S_2M^2 - S_1M^2 = (S_2M - S_1M)(S_2M + S_1M) = \delta(S_1M + S_2M) \simeq 2r\delta$ car quand $r \gg d$, S_1M et S_2M sont proches de r . Il vient

$\delta = -L \sin(\theta)$

(2.36)

2. Pour $\theta = 0$, l'interférence est constructive et l'intensité résultante est la somme des intensités des deux sources : $2I_0$. Pour $\theta = \pi/2$, $\delta = -L$. Or $\lambda = c/f = (3 \cdot 10^8)/(12 \cdot 10^6) = 25 \text{ m}$. Donc $\delta = -4\lambda$ et l'interférence est aussi constructive. Pour que l'interférence soit destructive, il faut au minimum que $\delta = \pm \lambda/2$ soit $\sin(\theta) = \pm \lambda/(2L) = \pm 0,125$ c'est-à-dire

$$\theta = \pm 7,2^\circ \quad (2.37)$$

3. En considérant que l'avion vise S_1 , la nouvelle différence de marche vaut $\delta = \sqrt{d^2 + L^2} - d$ avec d la distance entre l'avion et l'antenne visée. Il y a des interférences destructives si $\delta = \lambda/2$. d s'obtient alors en résolvant

$$\delta = \frac{\lambda}{2} = \sqrt{d^2 + L^2} - d \iff \frac{\lambda}{2} + d = \sqrt{d^2 + L^2} \iff \left(\frac{\lambda}{2} + d\right)^2 = d^2 + L^2 \quad (2.38)$$

soit en développant :

$$\frac{\lambda^2}{4} + \lambda d + d^2 = d^2 + L^2 \quad (2.39)$$

ce qui mène à

$$d = \frac{L^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} = 394 \text{ m} \quad (2.40)$$

4. Notons (Ox) l'axe suivant lequel l'avion se dirige. Sur cet axe, le signal émis par une antenne a pour forme

$$s(x, t) = S_0 \cos(2\pi ft - kx + \varphi_0) \quad (2.41)$$

L'avion ayant pour équation de position quelque chose du type $x_{\text{avion}}(t) = \pm vt$ (avec v la norme de sa vitesse, on peut ajouter une constante pour plus de généralité) selon qu'il s'approche des sources ou qu'il s'éloigne, il reçoit ainsi le signal :

$$s(x_{\text{avion}}(t), t) = S_0 \cos(2\pi ft \pm kvt + \varphi_0) \quad (2.42)$$

$$= S_0 \cos\left(2\pi\left(f \pm \frac{v}{\lambda}\right)t + \varphi_0\right) \quad (2.43)$$

$$= S_0 \cos\left(2\pi f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)t + \varphi_0\right) \quad (2.44)$$

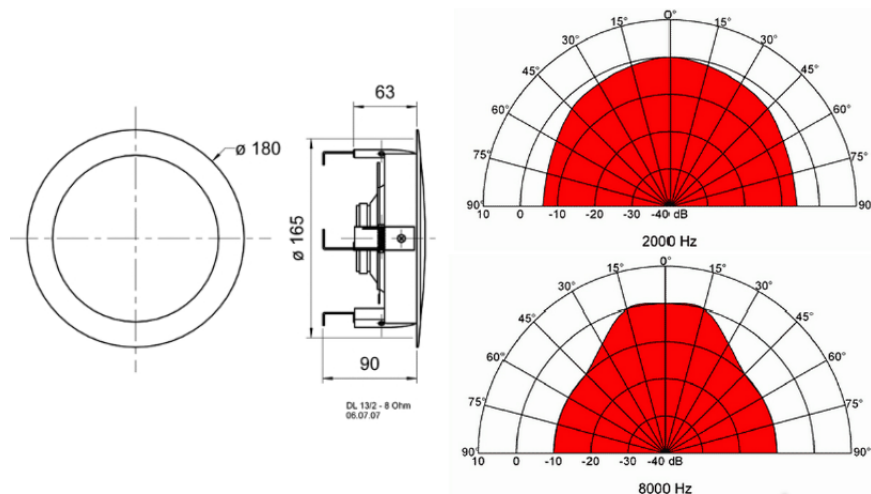
soit une fréquence

$$f' = f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \quad (2.45)$$

f' est plus aiguë que f lorsque l'avion se rapproche, et plus grave lorsqu'il s'éloigne de la source : c'est l'effet Doppler.

2.7 Diagramme de rayonnement d'un haut-parleur

Le fabricant de haut-parleurs fournit sur son site web les caractéristiques d'un de leur modèles reporté dans le document ci-dessous. Les deux diagrammes sont les diagrammes de rayonnement, qui décrivent la directionnalité du haut-parleur. Ils représentent l'intensité sonore émise par le haut-parleur en fonction de la direction de l'espace. Par convention, le cône de rayonnement définit la portion d'espace dans laquelle le haut-parleur émet une intensité sonore qui n'est pas inférieure à son intensité maximale de plus de 3 dB.



1. En analysant le cône de rayonnement à 8 kHz, retrouver l'ordre de grandeur du diamètre du haut-parleur.
2. Pourquoi le diagramme de rayonnement à 2 kHz ne permet pas une telle analyse ?

2.8 Fréquences propres d'un tuyau sonore

La colonne d'air contenue dans un instrument à vent (flûte, clarinette, ...) ou dans un tuyau d'orgue vibre selon des modes propres correspondant à des conditions aux limites données. Dans une modélisation très simple, on envisage deux types de conditions :

- si l'extrémité du tuyau est ouverte, la surpression acoustique est nulle à cette extrémité ;
- si l'extrémité du tuyau est fermée, l'amplitude de variation de la surpression acoustique est maximale à cette extrémité.

1. On considère un tuyau de longueur L dans lequel la célérité des ondes sonores est c .

- (a) Déterminer les fréquences des modes propres du tuyau lorsque ses deux extrémités sont ouvertes. Représenter schématiquement la surpression dans le tuyau pour le troisième mode, les modes étant classés par fréquence croissante.
- (b) Même question si l'une des extrémités du tuyau est ouverte et l'autre fermée.

2. **Première application :** Les grandes orgues peuvent produire des notes très graves. Calculer la longueur d'onde d'un son de fréquence 34 Hz correspondant au D_{00} à des températures usuelles. Calculer la longueur minimale d'un tuyau produisant cette note.

3. **Deuxième application :** On peut modéliser très grossièrement une clarinette par un tube fermé au niveau de l'embouchure et ouvert à l'extrémité de l'instrument.

- (a) Expliquer pourquoi le son produit par une clarinette ne comporte que des harmoniques impairs.
- (b) L'instrument est muni d'une "clé de douzième" qui ouvre un trou situé à distance $\frac{L}{3}$ de l'embouchure. Lorsque ce trou est ouvert, la surpression est nulle en ce point. Quelles sont dans ce cas les longueurs d'ondes des modes propres du tuyau ? Quel est l'effet de l'ouverture du trou sur la fréquence du son émis par l'instrument ?