Résume chapitre SP7

Oscillateurs harmonique

- Un **oscillateur harmonique** est un système physique décrit par un paramètre $f(t)$ vérifiant :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 f = \text{cste} \tag{1}$$

où ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur (à identifier). Exemple : circuit LC.

- La résolution suit des étapes classiques :
  - solution de l'équation sans second membre : $f_{\text{ssm}}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ (ou les deux autres formes similaires) ;
  - solution particulière constante comme le second membre est constant ;
  - recherche des constantes *via* des conditions initiales justifiées (continuité des grandeurs électriques, loi des mailles et des nœuds éventuellement).

- La pulsation propre est reliée à la période du signal par $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ (période propre).

Oscillateurs amortis

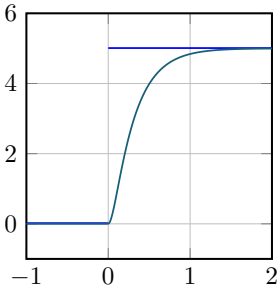
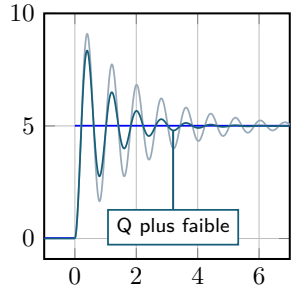
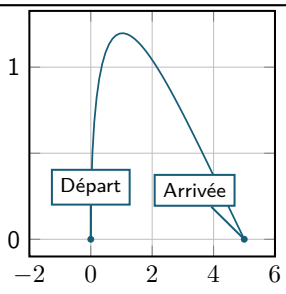
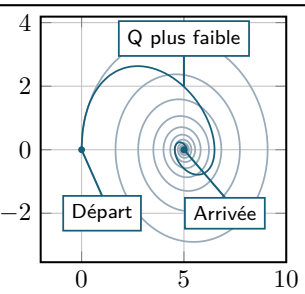
- Un **oscillateur amorti** est un système physique décrit par un paramètre $f(t)$ vérifiant l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 f = \text{cste} \tag{2}$$

où ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur et Q son **facteur de qualité** (à identifier).

- La résolution suit les mêmes étapes que pour l'équation de l'oscillateur harmonique. En particulier la solution de l'équation homogène est obtenue après étude du polynôme caractéristique

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \tag{3}$$

Facteur de qualité	$Q < 1/2$	$Q = 1/2$	$Q > 1/2$
Régime	apériodique	critique	pseudo-périodique
Racines du polynôme $r_\pm$	$-\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$	$r = -\omega_0$	$-\mu \pm j\Omega = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$
Solution de l'équation homogène	$Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}$	$(At+B)e^{rt}$	$e^{-\mu t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) = Ce^{-\mu t}\cos(\Omega t + \varphi)$
Durée du régime transitoire	quelques $1/\lvert r_+\rvert$	quelques $1/\lvert r\rvert$	quelques $1/\mu$
Évolution temporelle (échelon)			
Portrait de phase			

avec A et B des constantes à déterminer grâce aux conditions initiales.

- En régime pseudo-périodique, la pseudo-pulsation vaut $\Omega = \Im\mathrm{m}\,(r_+) = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$ et la pseudo-période est $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$. Le phénomène n'est pas rigoureusement périodique (l'amplitude changeant). Dans le cas où $Q \gg 1$, la pseudo-pulsation vérifie $\Omega \simeq \omega_0$ et le nombre d'oscillations durant le régime transitoire est de l'ordre de Q.

Oscillateurs amortis en régime forcé

Généralités

- Régime sinusoïdal forcé = second membre de l'équation différentielle du type $a\cos(\omega t+\psi)$. Régime transitoire inutile (tend vers 0) et régime permanent $f(t) = F_\mathrm{m}\cos(\omega t+\varphi)$ de même pulsation ω que le forçage, mais d'amplitude et de phase *a priori* différentes.
- Notations complexes : $\underline{f}$, tel que $\mathrm{Re}(\underline{f}(t)) = f(t)$ (PAS $\Im\mathrm{m}$). Alors $\underline{f}(t) = F_\mathrm{m}e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{F}_\mathrm{m}e^{j\omega t}$ où $\underline{F}_\mathrm{m}$ est appelée l'**amplitude complexe**. Ex : $A\cos\omega t \to Ae^{j\omega t}$, $B\sin\omega t \to -Bje^{j\omega t}$.
- En notation complexe $\dfrac{\mathrm{d}\underline{f}}{\mathrm{d}t} = j\omega\underline{f}$ et $\displaystyle\int \underline{f}(t)\mathrm{d}t = \underline{f}(t)/(j\omega)$
- Avec $\underline{f}_\mathrm{m}$, on obtient les deux grandeurs d'intérêt : $F_\mathrm{m} = \left|\underline{f}_\mathrm{m}\right|$, et $\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{f}_\mathrm{m})$.

Cas des circuits électriques

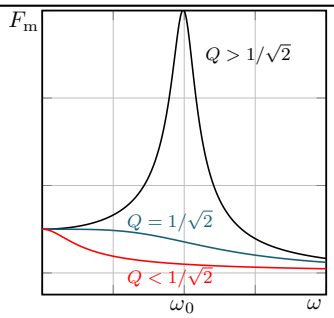
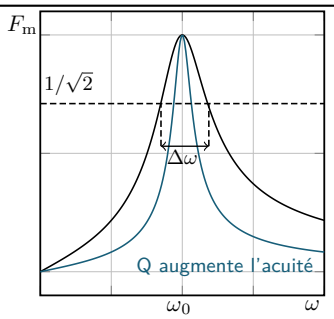
- On introduit en régime forcé l'**impédance complexe** d'un dipôle, notée $\underline{Z} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}}$ où $\underline{u}$ = tension aux bornes de ce dipôle en régime sinusoïdal forcé, $\underline{i}$ = courant en convention récepteur. Elle s'exprime en ohms.

Composant	Résistance (R)	Condensateur (C)	Bobine (L)
Impédance	$\underline{Z}_\mathrm{R} = R$	$\underline{Z}_\mathrm{C} = 1/(jC\omega)$	$\underline{Z}_\mathrm{L} = jL\omega$
Comportement basse fréquence		Interrupteur ouvert	Fil
Comportement haute fréquence		Fil	Interrupteur ouvert

- Les associations en série et en dérivation suivent les mêmes lois que pour les résistances. Il en est de même pour les ponts diviseurs.

Phénomènes de résonance

- Lorsqu'un système est soumis à une excitation sinusoïdale, une ou plusieurs réponses (tension, intensité, ...) peuvent présenter un maximum pour une ou plusieurs fréquences proches des fréquences propres : c'est le phénomène de résonance.
- On distingue deux types de résonance pour le circuit RLC série, dont les propriétés sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Résonance	**Tension du condensateur**	**Intensité**
Expression de l'amplitude F_m	$\dfrac{\mathrm{cste}}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$	$\dfrac{\mathrm{cste}}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$
Condition de résonance	$Q > 1/\sqrt{2}$	aucune, il y en a toujours une
Pulsation à résonance	$\omega_0\sqrt{1-1/(2Q^2)}$	ω_0
Graphique		
Amplitude à résonance	$F_\mathrm{max} \propto Q$	$F_\mathrm{max} = \mathrm{cste}$
Largeur de la résonance	$\Delta\omega \sim \dfrac{\omega_0}{Q}$	$\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$