–M1–

Cinématique du point et du solide

Questions de cours :

- Présenter les trois systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques et sphériques, avec la base locale associée.
- Calculer le vecteur vitesse et accélération dans les coordonnées cylindriques.
- Décrire complètement un mouvement rectiligne uniformément accéléré (paramétrage, équations du mouvement, graphe).
- Décrire complètement un mouvement circulaire uniforme : vecteur vitesse, accélération en coordonnées polaires, démonstration du lien entre la vitesse angulaire et la période de révolution T.

Capacités exigibles du BO :

- Établir les expressions des composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire les composantes du vecteur-vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.
- Exprimer la vitesse et la position en fonction du temps pour un mouvement de vecteur accélération constant. Obtenir la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
- Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes lors d'un mouvement circulaire.
- Identifier les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. Situer qualitativement la direction du vecteur-accélération dans la concavité d'une trajectoire plane.
- Différencier un solide d'un système déformable.
- Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire.
- Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.

Dans toute la suite va être développée la mécanique telle qu'elle a été conçue dès le XVII$^{\text{e}}$ siècle avec Galilée et Newton. Bien qu'elle soit toujours valable aujourd'hui, on sait depuis Einstein qu'il faut considérer des systèmes se déplaçant à des vitesses très inférieures devant la vitesse de la lumière (sinon il faut utiliser la **relativité restreinte ou générale**), et de taille suffisamment importante (idéalement au-delà du micron, sinon il faut utiliser la **mécanique quantique**).

L'objet de ce premier chapitre est de se familiariser avec la **cinématique**, c'est-à-dire la description du mouvement des objets, sans s'intéresser aux causes qui lui donnent naissance. Nous y retrouverons les notions de position, vitesse et accélération, ainsi que de trajectoire. De façon à décrire au mieux un mouvement, trois **systèmes de coordonnées** vont être détaillés.

I. Notions de cinématique

I.1 Objet ponctuel

En physique, on considère qu'un objet est ponctuel dès que l'on peut négliger sa dimension devant les autres dimensions du problème. On qualifie alors cet objet de **point matériel** : on repère souvent un objet par son centre de gravité noté G.
Par exemple, la Terre et le Soleil peuvent être considérés comme des points matériels dans l'étude du mouvement de la Terre autour de ce dernier car

$$D_{\mathrm{T-S}} = 150{\cdot}10^6\ \text{km} \gg R_{\mathrm{T}},\, R_{\mathrm{S}}$$

Par contre, même si ces hypothèses sont vérifiées, l'étude du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même ne fait évidemment plus intervenir la notion d'objet ponctuel.

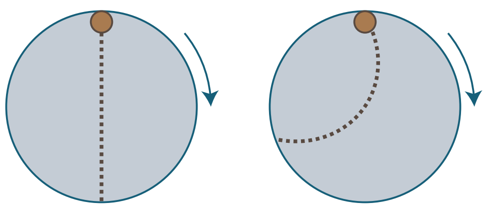
I.2 Référentiel

Un référentiel est une notion particulièrement importante en mécanique : il définit le cadre spatio-temporel de référence. Il est composé :

- d'un **repère d'espace**, c'est-à-dire une origine, une base orthonormée, et une unique unité de longueur (le mètre). L'origine du repère est purement arbitraire, elle n'a aucune signification physique intrinsèque ;
- d'une **horloge** ou **repère de temps**, placée à l'origine du repère d'espace, dont l'origine des temps est choisie également arbitrairement, et dont l'écoulement est identique pour tout référentiel (on parle de temps **absolu**).

* À noter qu'en relativité, le temps n'est pas absolu et dépend du référentiel.

On notera également que la **description du mouvement dépend du référentiel**, comme le montre l'exemple ci-dessous d'une balle se déplaçant selon une trajectoire rectiligne **relativement** à un plateau tournant.



I.3 Position, vitesse et accélération

La description mécanique du mouvement d'un point matériel M fait intervenir trois grandeurs physique : sa position, sa vitesse, et son accélération. On suppose que le référentiel d'étude est fixé, son origine étant le point O.

a) Position

On repère la position du point $M(t)$ par le **vecteur position** $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(t)$. Pour exprimer ce vecteur, il faudra alors adopter un système de coordonnées, c'est-à-dire une manière de repérer mathématiquement la position d'un objet.

On introduit également le vecteur **déplacement élémentaire** $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ encoré noté $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{d}r}$ comme étant la limite d'un déplacement sur une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)} = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)} \qquad (1.1)$$

b) Vitesse

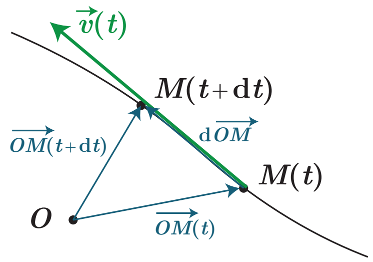
On définit le vecteur vitesse moyenne entre l'instant t et $t + \Delta t$ par

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \tag{1.2}$$

Lorsque Δt devient infinitésimal, on obtient le **vecteur vitesse instantanée** :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}} \tag{1.3}$$

*



Le vecteur vitesse du point M est **tangent à la trajectoire**.

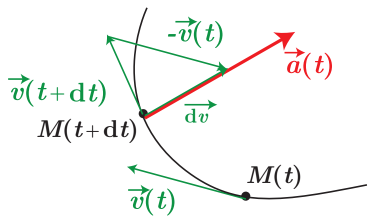
c) Accélération

De la même manière on peut définir le vecteur **accélération instantanée** :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}} \tag{1.4}$$

Graphiquement, sur la trajectoire, on peut représenter l'accélération à partir des vecteurs vitesses pour deux instants successifs t et $t + \mathrm{d}t$:

*



De manière générale, le vecteur accélération instantanée est dirigé vers **l'intérieur de la concavité de la trajectoire** (sauf dans le cas d'une trajectoire rectiligne !). Sa norme est d'autant plus importante que le rayon de courbure de la trajectoire est petit.

II. Systèmes de coordonnées

II.1 Coordonnées cartésiennes

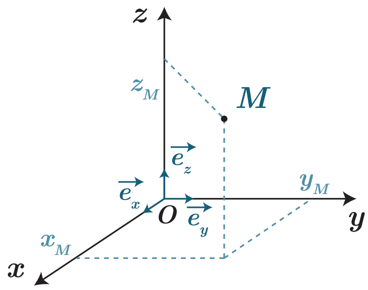
a) Présentation

Le système de coordonnées cartésiens est le système de coordonnées utilisé par défaut, quand aucune géométrie particulière n'est observée.

En coordonnées cartésiennes, un point M est repéré par ses trois coordonnées $M(x, y, z)$ telles que :

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \tag{1.5}$$

où le repère $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, représenté ci-dessous, est orthonormé.



b) Déplacement élémentaire

*

Déterminons le déplacement élémentaire du point M lorsque ses coordonnées sont augmentées de $\mathrm{d}x$ selon $\overrightarrow{e_x}$, $\mathrm{d}y$ selon $\overrightarrow{e_y}$ et $\mathrm{d}z$ selon $\overrightarrow{e_z}$. Étant donné que les vecteurs unités de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ sont fixes (indépendants du temps), il vient :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \begin{pmatrix} x + \mathrm{d}x - x \\ y + \mathrm{d}y - y \\ z + \mathrm{d}z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}} \tag{1.6}$$

c) Vitesse et accélération

La vitesse s'obtient de deux façons :

- en dérivant directement le vecteur position par rapport au temps :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}} \tag{1.7}$$

  car les vecteurs unitaires sont indépendants du temps ;
- en utilisant le déplacement élémentaire, car $\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$.

Lorsqu'on dérive **exclusivement** par rapport au temps en mécanique, on utilise la notation $\dot{x}$ pour une dérivée première, et $\ddot{x}$ pour une dérivée seconde.

Enfin, l'accélération s'exprime également simplement à partir de la vitesse :

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z} \tag{1.8}$$

Exercice

Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération pour $t = 1$ si $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 2t^2 - 2t \\ 5t - 1 \\ t^2/2 - 9t \end{pmatrix}$. Que dire de ces deux vecteurs à cet instant ?

$\overrightarrow{v} = (2, 5, -8)$ et $\overrightarrow{a} = (4, 0, 1)$ donc $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{a}$.

Comme dit auparavant, la trajectoire d'un point matériel, tout comme sa vitesse et son accélération, dépend du référentiel choisi. Quand c'est nécessaire, on note alors pour un référentiel $\mathcal{R}$ $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}}$ ou $\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}}$.

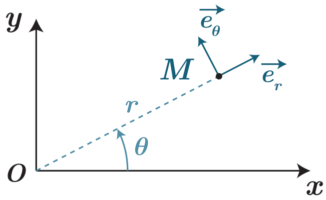
II.2 Coordonnées polaires/cylindriques

a) Présentation

Dans le cas de mouvements de rotation dans un plan autour d'un point fixe ou dans l'espace autour d'un axe fixe, les coordonnées polaires ou cylindriques peuvent être plus adaptées.

Les **coordonnées polaires** sont utilisées dans le cas d'un mouvement à deux dimensions :

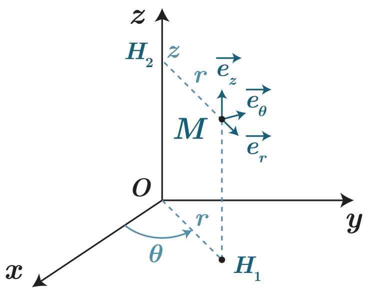
- on repère la distance à l'axe par
$$r = \|\vec{r}\| \quad \text{avec} \quad r \in \mathbb{R} \tag{1.9}$$
- on repère l'angle θ que fait le vecteur position avec un axe fixé comme origine des angles (Ox) :
$$\theta = (\vec{e_x}, \vec{r}) \in [0; 2\pi] \tag{1.10}$$



Exercice

Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point défini en coordonnées cylindriques par $r = 5$ et $\theta = \pi/4$ puis $\theta = 2\pi/3$.

On peut également généraliser à trois dimensions à l'aide des **coordonnées cylindriques**, où vient s'ajouter l'information sur l'altitude z par rapport à un plan de référence :



Dans ce cas, $r = OH_1$ où H_1 est le projeté orthogonal de M sur le plan (xOy), mais également $r = H_2M$ avec H_2 le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz).

b) Base locale

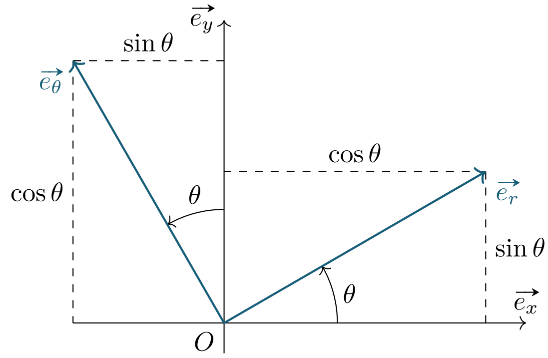
Sur les deux illustrations précédentes ont été dessinées des bases dites **locales**, soit $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$, soit $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$. En effet, ces bases dépendent de la position du point, ces vecteurs ne sont donc pas fixes dans le temps. Définissons-les rigoureusement :

- en coordonnées polaires :
  - $\vec{e_r} = \dfrac{\vec{r}}{r}$;
  - $\vec{e_\theta}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{e_r}$ et orienté dans le sens trigonométrique et permet d'avoir une base orthonormée directe.
- en coordonnées cylindriques :
  - $\vec{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{H_2M}}{r} = \dfrac{\overrightarrow{OH_1}}{r}$;
  - $\vec{e_\theta}$ est alors le vecteur orthogonal à $\vec{e_r}$ de sorte à ce que $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ définisse un plan parallèle à (xOy) ;
  - $\vec{e_z}$ de la base cartésienne tel que $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ soit une base orthonormée directe.

Le vecteur position s'écrit alors en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\vec{r} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}} \tag{1.11}$$

Il est dangereux d'écrire le vecteur position sous la forme d'un vecteur colonne dans la base locale, au risque de confondre avec les coordonnées du point : $\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ MAIS PAS $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix}$. Préférez une écriture avec les vecteurs de la base locale.



Dans le cas où nous devons dériver ces vecteurs par rapport au temps, il peut être adapté de les exprimer en fonction des coordonnées cartésiennes :

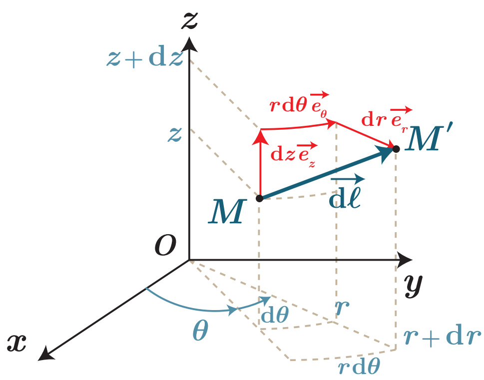
$$\vec{e_r} = \cos\theta\vec{e_x} + \sin\theta\vec{e_y} \quad \text{et} \quad \vec{e_\theta} = -\sin\theta\vec{e_x} + \cos\theta\vec{e_y} \tag{1.12}$$

* Leur dérivée temporelle s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\sin\theta\vec{e_x} + \dot{\theta}\cos\theta\vec{e_y} = \dot{\theta}\vec{e_\theta} & (1.13) \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\cos\theta\vec{e_x} - \dot{\theta}\sin\theta\vec{e_y} = -\dot{\theta}\vec{e_r} & (1.14) \end{cases}$$

c) Déplacement élémentaire

Cherchons le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}r}$ lorsqu'on effectue une petite variation $\mathrm{d}r$ selon $\vec{e_r}$, une variation d'angle $\mathrm{d}\theta$, et une variation d'altitude $\mathrm{d}z$ selon $\vec{e_z}$, comme illustré sur le schéma ci-dessous.



*

Le déplacement élémentaire se décompose en trois déplacements indépendants :

- un déplacement selon $\vec{e_\theta}$ de $r\mathrm{d}\theta$ correspondant à une portion infinitésimale de périmètre du cercle de rayon r ;
- un déplacement selon $\vec{e_r}$ de $\mathrm{d}r$;
- un déplacement selon $\vec{e_z}$ de $\mathrm{d}z$.

Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\vec{e_z}} \tag{1.15}$$

Si on effectue d'abord le déplacement élémentaire selon $\overrightarrow{e_r}$, le déplacement élémentaire selon $\overrightarrow{e_\theta}$ s'écrit rigoureusement $(r + \mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta}$, mais on néglige le terme $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ devant $r\mathrm{d}\theta$.

d) Vitesse

À partir du vecteur déplacement élémentaire, c'est immédiat :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}}{\mathrm{d}t} = \boxed{\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}} \tag{1.16}$$

.

Exercice

Déterminer le vecteur vitesse en dérivant par rapport au temps le vecteur position $\vec{r} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$:

$$\vec{r} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z} \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\overrightarrow{e_r}} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} \tag{1.17}$$

e) Accélération

Il n'y a pas d'autre choix que de dériver chaque terme du vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$:

*

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left(\ddot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}\right) + \ddot{z}\overrightarrow{e_z} \tag{1.18}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z} \tag{1.19}$$

Il va sans dire que cette expression ne doit PAS être apprise par cœur, il faut savoir la retrouver !

II.3 Coordonnées sphériques

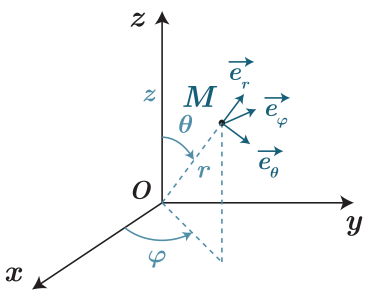
a) Présentation

Lorsqu'on veut repérer le mouvement d'un satellite au-dessous de la Terre, par exemple, on cherche à se repérer autour d'une sphère. On peut alors utiliser les coordonnées... sphériques ! On a besoin de trois coordonnées :

*

- $r = \|\vec{r}\|$ est la distance du point M au centre du repère ;
- θ est la **colatitude**, angle mesuré depuis l'axe (Oz) ; une variation de cet angle provoque le déplacement le long d'une méridienne ;
- φ est la **longitude**, angle mesuré depuis l'axe (Ox) ; une variation de cet angle provoque le déplacement le long d'un parallèle.

Pour le positionnement terrestre, on utilise plutôt la **latitude** λ à la colatitude. Elle est mesurée depuis l'équateur.



On introduit une base locale, positionnée au niveau du point M :

- le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ est dirigé selon $\vec{r}$, $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\vec{r}}{r}$;
- le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$ est orthogonal à $\overrightarrow{e_r}$, orienté selon θ ;
- le vecteur $\overrightarrow{e_\varphi}$ est orthogonal au deux vecteurs précédents, de sorte à former une base orthonormée directe, il est donc orienté selon φ.

Exercice

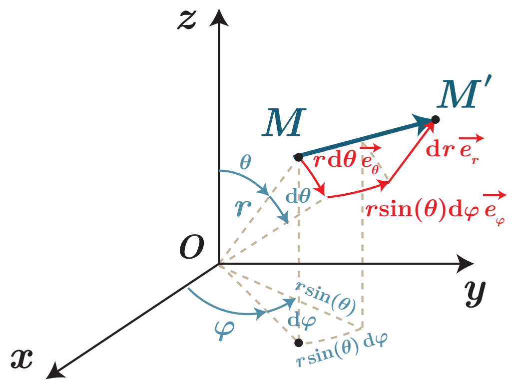
Exprimer les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées sphériques.
$x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$ et $z = r\sin\theta$

b) Déplacement élémentaire

Si on effectue un petit déplacement du point M, de $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}\varphi$, le vecteur déplacement élémentaire se décompose en trois éléments :

∗

- un déplacement de $\mathrm{d}r$ selon $\overrightarrow{e_r}$;
- un déplacement de $r\mathrm{d}\theta$ selon $\overrightarrow{e_\theta}$ (on se déplace sur un cercle de rayon r) ;
- un déplacement de $r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$ selon $\overrightarrow{e_\varphi}$



Pour résumer le déplacement élémentaire s'exprime ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi}} \tag{1.20}$$

III. Quelques exemples de mouvements

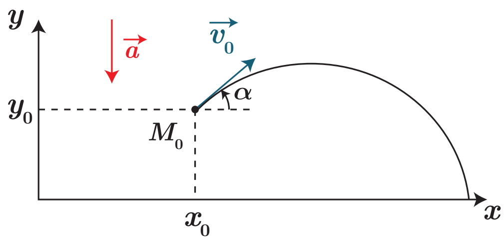
Voyons sur quelques exemples l'emploi des coordonnées cartésiennes et cylindriques. Ce sera l'occasion d'évoquer la notion de trajectoire.

III.1 Mouvement à vecteur accélération constant

On va étudier le mouvement d'un point matériel M subissant une accélération constante. On choisit donc le repère d'espace de sorte que l'accélération soit colinéaire à l'axe (Oy), par exemple $\vec{a} = -a\overrightarrow{e_y}$. Le mouvement est **nécessairement plan** : en effet, à $t = 0$, si $\vec{v} = \vec{v}_0$ et $M = M_0$, l'ensemble du mouvement est contenu dans le plan $(M_0, \vec{v}_0, \vec{a})$.

Afin de ne pas restreindre la généralité de l'étude, on suppose que l'objet est lancé depuis une position initiale (x_0, y_0) avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ telle que :

$$\overrightarrow{v_0} = v_{0x}\overrightarrow{e_x} + v_{0y}\overrightarrow{e_y} \tag{1.21}$$
$$= v_0\cos\alpha\,\overrightarrow{e_x} + v_0\sin\alpha\,\overrightarrow{e_y} \tag{1.22}$$



a) Équations horaires

Les équations horaires s'obtiennent par intégration successive de l'accélération :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

La vitesse est ainsi donnée par :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ -at + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

Cela permet d'exprimer les **équations horaires** du mouvement par intégration du vecteur vitesse :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha t + x_0 & (1.25) \\ y(t) = -at^2/2 + v_0 \sin\alpha t + y_0 & (1.26) \end{cases}$$

b) Trajectoire

Afin d'obtenir l'équation de la **trajectoire** $y(x)$ on exprime t en fonction de x puis on injecte cette expression dans l'expression de y :

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{v_0 \cos\alpha} & (1.27) \\ y = -\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{v_0^2 \cos^2\alpha}(x - x_0)^2 + \tan\alpha(x - x_0) + y_0 & (1.28) \end{cases}$$

On reconnait alors l'équation d'une parabole. On peut ensuite déterminer la portée du mouvement en cherchant la valeur de $x > x_0$ telle que $y = 0$, par exemple.

Si $\alpha = \pi/2$ alors on a une chute libre verticale (en repartant de l'équation horaire) :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \quad \forall t & (1.29) \\ y(t) = y_0 + v_0 t - \dfrac{1}{2}at^2 & (1.30) \end{cases}$$

III.2 Mouvement circulaire

L'étude des mouvements circulaires est effectuée en coordonnées polaires car elle y est grandement simplifiée. Le point matériel M est alors repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) mais ici $r = R = \mathrm{cste}$.

Exercice

Exprimer le vecteur vitesse et accélération dans le cas où le rayon $r = R$ est fixé.

En reprenant les formules vues pour les coordonnées polaires (cylindriques) mais avec $R = \mathrm{cste}$, on obtient immédiatement :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} \tag{1.31}$$

L'accélération peut être obtenue en dérivant cette expression où en partant de la formule du cours pour l'accélération en cylindrique :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} \tag{1.32}$$

On appelle **vitesse angulaire** la quantité $\omega = \dot{\theta}$. C'est le nombre de radian dont a tourné le point matériel autour du point O par unité de temps.
On appelle **accélération angulaire** la quantité $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$. On distingue alors trois cas :

- $\dot{\omega} < 0$ le mouvement est circulaire **décéléré** ;
- $\dot{\omega} > 0$ le mouvement est circulaire **accéléré** ;
- $\dot{\omega} = 0$ le mouvement est circulaire **uniforme**.

* Dans ce dernier cas les expressions de la vitesse et de l'accélération deviennent :

$$\vec{v} = R\omega\vec{e_\theta} \tag{1.33}$$
$$\vec{a} = -\omega^2 R\vec{e_r} \tag{1.34}$$

et la période de rotation vaut, en notant $v = R\omega$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v} \tag{1.35}$$

On remarque alors que l'accélération est **orthogonale** à la vitesse et **dirigée vers le centre** de la trajectoire. On parle d'accélération **centripète**.
* De plus, on a :

$$\boxed{\|\vec{a}\| = a = \frac{v^2}{R}} \tag{1.36}$$

IV. Cinématique du solide

Dans certains cas, l'objet d'étude ne peut pas être considéré comme ponctuel. Il faut alors adopter une description plus complète.

IV.1 Notion de solide

Définition

* On appelle solide un système $\mathcal{S}$ dont les points restent à distance constante les uns des autres :

$$\forall A_i, A_j \in \mathcal{S} \quad \overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{\mathrm{cste}} \tag{1.37}$$

Un solide est donc par définition **indéformable**.

Pour repérer un solide dans l'espace, 6 paramètres sont nécessaires. En effet, soit $\mathcal{R}(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ notre référentiel d'étude et soit $\mathcal{R}_\mathrm{S}(O_\mathrm{S}, \vec{e_x}', \vec{e_y}', \vec{e_z}')$ un référentiel lié au solide. Pour repérer complètement la position du solide il faut alors situer O_S par ses 3 coordonnées d'espace, puis fixer l'orientation de $\mathcal{R}_\mathrm{S}$ grâce à 3 angles (rotation autour de $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$).

IV.2 Translation d'un solide

Propriété

Un solide est en translation lorsque les 3 angles évoqués ci-dessus sont constants. On peut alors faire coïncider en tout temps les vecteurs $(\vec{e_x}', \vec{e_y}', \vec{e_z}')$ avec $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

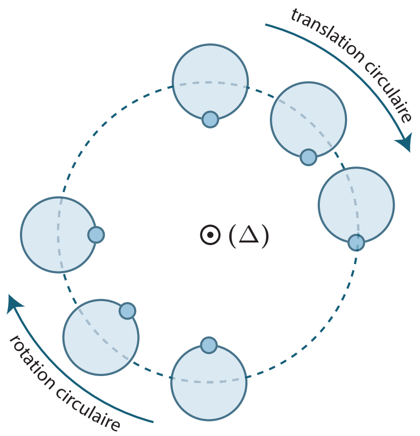
L'étude du mouvement du solide se résume alors à l'étude du mouvement d'un de ses point, par exemple O_S.

$$\forall P \in \mathcal{S} \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_\mathrm{S}} + \overrightarrow{O_\mathrm{S}P} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{O_\mathrm{S}P} = \overrightarrow{\mathrm{cste}} \tag{1.38}$$

On distingue deux mouvements de translation particuliers :

- une **translation rectiligne** lorsque le mouvement de O_S est un mouvement rectiligne (par exemple un ascenseur) ;
- une **translation circulaire** lorsque le mouvement de O_S est un mouvement circulaire (nacelle d'une grande roue).

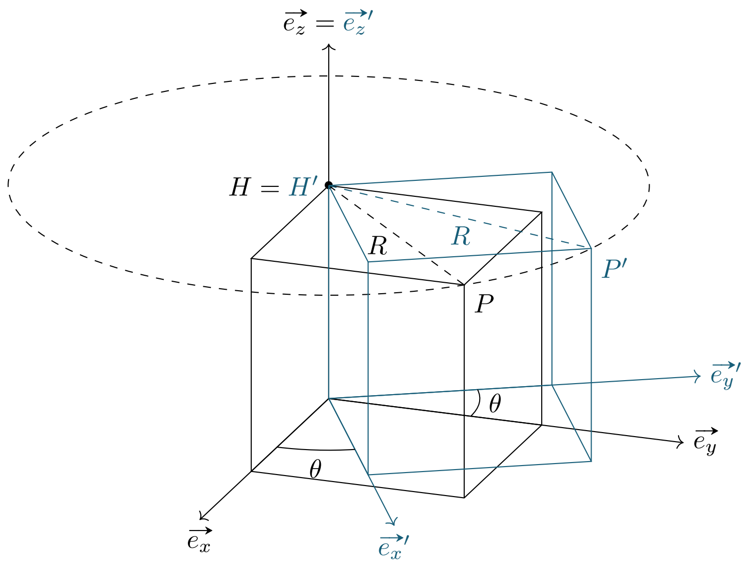
Il faut distinguer le mouvement de rotation et la translation circulaire :



IV.3 Rotation autour d'un axe fixe

Propriété

Un solide est en rotation autour d'un axe si et seulement si il existe une unique droite Δ immobile dans $\mathcal{R}$ **ET** dans $\mathcal{R}_\mathrm{S}$.



Pour notre exemple, on considère $\Delta = (Oz)$. Dans ce cas on a toujours $\vec{e_z}' = \vec{e_z}$ et la position du solide est alors entièrement repérée par l'angle θ existant entre $\vec{e_x}'$ et $\vec{e_x}$ (ou $\vec{e_y}'$ et $\vec{e_y}$).

Soit P un point du solide et H son projeté orthogonal sur l'axe Δ. Alors P décrit un **cercle** de rayon $HP = r$ autour de H.

On peut alors adopter les coordonnées polaires pour P et on est ramené à un mouvement circulaire :

$$\overrightarrow{HP} = r\vec{e_r} \tag{1.39}$$

puis :

$$\vec{v}_{P/\mathcal{R}} = r\dot{\theta} = \omega r \tag{1.40}$$

La vitesse angulaire ω est commune à tous les points du solide, seul r change.

Notons que l'axe de rotation Δ peut être à l'intérieur ou à l'extérieur du solide.

Exercices

1.1 Avion de chasse

1. Un avion de chasse veut décoller d'un porte-avion. Sachant qu'il peut décoller lorsque sa vitesse au sol atteint $v_\ell = 150\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ et que le pilote ne peut supporter un accélération supérieure à $a = 10g$, déterminer la longueur minimale ℓ de la piste en supposant que sur la piste l'avion possède un mouvement uniformément accéléré.

2. Un avion de chasse volant à vitesse constante $v = 250\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ entame un virage circulaire. Quel est le rayon minimal R du virage pour qu'il n'y ait pas de danger pour le pilote ?

1.2 Mouvement circulaire

On considère une bille attachée à une ficelle lui permettant de se déplacer en rotation uniforme autour d'un axe fixe à une distance R. On note ω sa pulsation.

1. Donner l'expression de la vitesse de cette bille en coordonnées cylindriques.
2. En déduire les coordonnées cartésiennes associées.
3. Montrer à l'aide des coordonnées cartésiennes que la trajectoire est un cercle.
4. Calculer l'accélération en coordonnées cylindriques et montrer qu'elle est proportionnelle au vecteur position $\vec{R}$.

---

1. $\vec{r} = R\vec{e_r}$ donc $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} = R\omega\vec{e_\theta}$.
2. En coordonnées cartésiennes, $\vec{e_\theta} = -\sin\theta\vec{e_x} + \cos\theta\vec{e_y}$ donc :
$$v_x = -R\omega\sin\theta \quad \text{et} \quad v_y = +R\omega\cos\theta \tag{1.41}$$
avec $\theta = \omega t$.
3. Pour le vecteur position, on a $\vec{e_r} = \cos\theta\vec{e_x} + \sin\theta\vec{e_y}$ donc $x = R\cos\theta$ et $y = R\sin\theta$. Ainsi $x^2 + y^2 = R^2$ correspondant bien à l'équation d'un cercle.
4. $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\vec{e_r} = -\omega^2\vec{R}$.

1.3 Analyse d'équations horaires

Pour chacune des équations horaires ci-dessous, préciser les caractéristiques du mouvement, le vecteur vitesse et accélération et si possible l'équation de la trajectoire :

1. $x(t) = 2t^2 - 6t + 3$ et $y(t) = 2t - 5$ (tel que x, y soit en mètres si t est exprimé en secondes)
2. $r(t) = 10\,\mathrm{m}$ et $\theta(t) = 5t$
3. $r(t) = 3t - 2$, $\theta = 2\,\mathrm{rad}$
4. $r(t) = R$, $\theta = \omega t$ et $z = ht$

1.4 Vitesse d'une voiture

1. Calculer l'accélération nécessaire, supposée constante, pour qu'une voiture initialement à une vitesse $v = 50\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ puisse s'arrêter en une distance inférieure à 15 m. Comparer à l'accélération de la pesanteur.

2. Deux voitures se suivent, roulant à $v = 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, à une distance d'environ 180 m : l'une d'elle ralentit alors brusquement avec une décélération constante $a_1 = -2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Celle la suivant commence à freiner deux secondes plus tard, avec une décélération constante plus faible $a_2 = -1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

   (a) En prenant pour origine du repère spatial la position de la seconde voiture à l'instant où la première commence à freiner, établir les équations horaires du mouvement des deux véhicules (on pourra travailler directement de manière numérique).

   (b) Y aura-t-il un choc ? Justifier rigoureusement.

---

1. Considérons une décélération uniforme de valeur $-a$. Alors $v(t) = v - at$ et donc $x(t) = vt - \frac{1}{2}at^2$ en prenant $x(t=0) = 0$. Le véhicule s'arrête au bout d'un temps tel que $v(t_a) = 0$ donc $t_a = \frac{v}{a}$. La distance parcourue est donc $\ell = x(t_a) = \frac{v^2}{a} - \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$. Il faut donc une accélération de :

$$-a = -\frac{v^2}{2\ell} = -12{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \tag{1.42}$$

avec $v = \frac{50}{3{,}6} = 13{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. C'est une décélération dont la norme est comparable à g.

2. (a) Précisons les conditions initiales à $t = 0$ $v_1(t=0) = v = v_2(t=0) = 25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ et $x_1(t=0) = 180\,\mathrm{m}$, $x_2(t=0) = 0$. Intégrons les équations entre $t = 0$ et $t = 2\,\mathrm{s}$:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \Longrightarrow v_1 = a_1 t + v_1(t=0) = -2t + 25 \Longrightarrow x_1(t) = -t^2 + 25t + 180 & (1.43) \\ a_2 = 0 \Longrightarrow v_2(t) = v_2(t=0) = 25 \Longrightarrow x_2(t) = 25t & (1.44) \end{cases}$$

On poursuit pour $t > 2$, juste pour la voiture 2, en calculant la constante d'intégration pour $t = 2$:

$$a_2(t>2) = -1 \Longrightarrow v_2(t>2) = -t + B = -(t-2) + 25 = -t + 27 \Longrightarrow x_2(t>2) = -\frac{1}{2}t^2 + 27t + B \tag{1.45}$$

Pour la dernière équation, on trouve B en écrivant la condition pour $t = 2$:

$$-\frac{1}{2}2^2 + 54 + B = 50 \Longrightarrow B = -2 \Longrightarrow x_2(t>2) = -\frac{1}{2}t^2 + 27t - 2 \tag{1.46}$$

L'ensemble de ces équations ne sont valables tant que $v_1 \geq 0$ et $v_2 \geq 0$! ! (les voitures ne vont pas ensuite reculer), c'est-à-dire pour la voiture 1 tant que $t < 12{,}5\,\mathrm{s}$ et pour la voiture 2 tant que $t < 27\,\mathrm{s}$.

(b) Distinguons les cas :

- si $t < 2$, $x_1 = x_2$ conduit à $-t^2 + 180 = 0$ donc $t = 13{,}4\,\mathrm{s}$, ce qui est impossible ;
- si $2 < t < 12{,}5$, $x_2 = x_2$ conduit à $-t^2 + 25t + 180 = -\frac{1}{2}t^2 + 27t - 2$ soit $\frac{1}{2}t^2 + 2t - 182 = 0$. Une résolution numérique donne $t = -21{,}2\,\mathrm{s}$ ou $t = 17{,}2\,\mathrm{s}$ ce qui n'est pas possible ;
- si $12{,}5 < t < 27$: $x_1 = 336{,}3\,\mathrm{m}$, donc $x_1 = x_2$ conduit à $\frac{1}{2}t^2 - 27t + 338{,}3 = 0$ dont les solutions sont $t = 19{,}8\,\mathrm{s}$ et $t = 34{,}2\,\mathrm{s}$.

Le choc se produit donc au bout de 19,8 s !

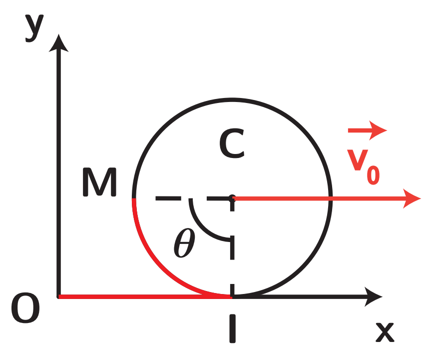
1.5 Grue

Le bras d'une grue tourne dans un plan horizontal (xOy) à la vitesse angulaire constante ω_0. Sur ce bras se translate à vitesse constante v_0 un chariot assimilé à un point matériel M. À l'instant initial il se trouve au centre de rotation O du bras, l'axe Ox est fixe par rapport au sol et confondu avec le bras de la grue à l'instant initial. On observe le mouvement depuis le sol.

1. Donner les équations horaires du chariot en choisissant une base adaptée.
2. Donner l'équation de la trajectoire et représenter celle-ci. Quelle est sa nature ?
3. Établir les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées choisi à la question 1).
4. Choisir un autre référentiel permettant de mettre en évidence que le vecteur vitesse et accélération est différent de ceux trouvés à la question précédente.

1.6 Vélo

Cherchons la trajectoire d'un point, noté M par la suite, sur le périmètre d'une roue de vélo de centre C et de rayon r. Initialement M coïncide avec O, l'origine du repère. Ensuite, au cours du mouvement, on appelle $\theta(t)$ l'angle entre $\overrightarrow{CM}$ et la verticale descendante. La roue roule sans glisser sur le sol de manière à ce que l'abscisse x_I du point de contact I de la roue avec le sol soit égale à l'arc de cercle IM. Enfin, la vitesse du centre de la roue vaut $\vec{v}_C = v_0\vec{e_x}$ où $v_0 > 0$.



1. Donner l'évolution de l'angle $\theta(t)$ en fonction du temps.
2. Donner la position cartésienne du point M. On s'aidera éventuellement dans un premier temps d'une relation vectorielle.
3. A l'aide de Python, tracer l'allure de la trajectoire. Cela s'appelle une cycloïde.

1.7 Séléné

Dans le référentiel géocentrique, la Lune effectue une révolution circulaire de période $T = 27{,}3\,\text{j}$ centrée sur la Terre. La distance Terre-Lune vaut $R = 3{,}84{\cdot}10^5$ km. Au cours de cette révolution, la Lune montre toujours la même face à la Terre.

On rappelle que le repère géocentrique a pour origine le centre de la Terre et ses axes pointent vers trois étoiles lointaine supposées fixes.

1. Décrire le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique. On s'attachera particulièrement à distinguer s'il s'agit d'un mouvement de translation circulaire ou de rotation.
2. En déduire la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$ du centre de la Lune sur sa trajectoire.
3. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du centre de la Lune dans le référentiel géocentrique. Calculer numériquement la norme de la vitesse.
4. Décrire le mouvement de la Lune dans le repère sélénocentrique (mêmes axes que le repère géocentrique mais origine au centre de la Lune).

---

1. Dans le référentiel géocentrique, la Lune est en **rotation** autour du centre de la Terre. Si elle était en translation circulaire, alors elle ne tournerait pas sur elle-même et nous montrerait tantôt une face, tantôt l'autre comme le montre la figure 1.1.

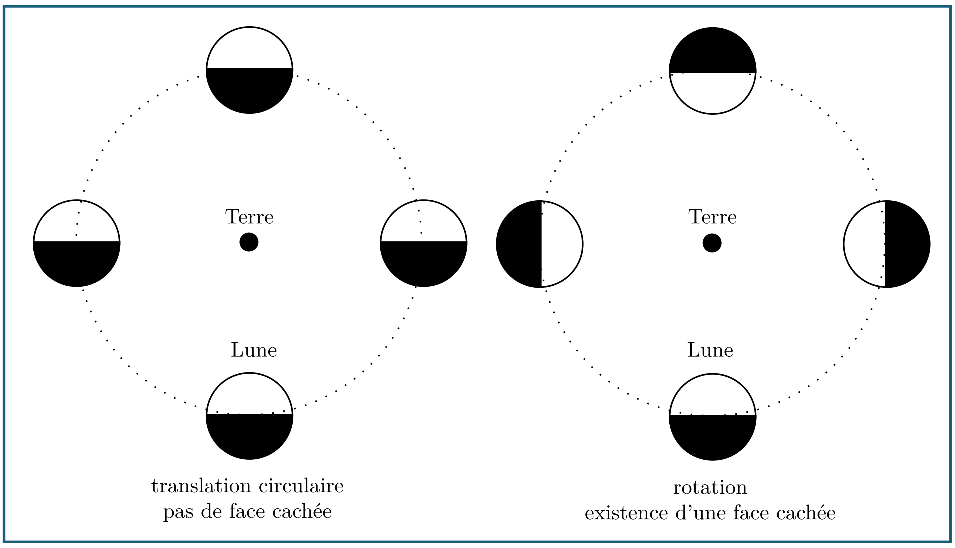


Figure 1.1 – La face cachée de la Lune est une conséquence de son mouvement de **rotation** autour de la Terre. Une « face » de la Lune a été « peinte » en noir afin de pouvoir déterminer son orientation.

2. Si la lune montre toujours la même face à la Terre, c'est qu'elle tourne sur elle-même à la même vitesse angulaire qu'elle tourne autour de la Terre. Ainsi, la Lune fait un tour sur elle-même en 27,3 j. Soit,

$$\boxed{\dot{\theta}_0 = \frac{2\pi}{27.3 \times 24 \times 3600} = 2{,}67{\cdot}10^{-6}\ \text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1}} \tag{1.47}$$

3. La Lune décrit approximativement un cercle de rayon R autour du centre de la Terre. Son vecteur vitesse s'écrit donc

$$\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}_0\vec{e_\theta}} \quad \text{et donc} \quad \boxed{v = R\dot{\theta}_0} \tag{1.48}$$

L'application numérique donne $\boxed{v = 1{,}0\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}}$. De plus,en dérivant l'expression (1.48) de la vitesse :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = R\dot{\theta}_0 \frac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -R\dot{\theta}_0^2 \vec{e_r} \tag{1.49}$$

4. Dans le repère sélénocentrique, la Lune décrit un mouvement de **rotation propre** à la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$. Bien entendu, son centre est immobile dans ce repère.