

# Filtrage linéaire

## Sommaire

<b>8.1 Quelques rappels</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>8.2 Étude d'un filtre simple</b> . . . . .	<b>2</b>
8.2.1 Étude qualitative : comportement asymptotique . . . . .	2
8.2.2 Étude en fréquence . . . . .	3
8.2.3 Représentations graphiques . . . . .	4
<b>8.3 Principes du traitement des signaux</b> . . . . .	<b>5</b>
8.3.1 Cadre d'étude . . . . .	5
8.3.2 Notion de gabarit . . . . .	5
<b>8.4 Action d'un filtre sur un signal</b> . . . . .	<b>6</b>
8.4.1 Définitions . . . . .	6
8.4.2 Étude d'un filtre . . . . .	7
8.4.3 Réponse d'un filtre à un signal périodique quelconque . . . . .	9
<b>8.5 Quelques exemples de filtres électriques</b> . . . . .	<b>11</b>
8.5.1 Filtres d'ordre 1 . . . . .	11
8.5.2 Filtres du deuxième ordre . . . . .	12
8.5.3 Passe-haut . . . . .	13
8.5.4 Passe-bande . . . . .	14

## Questions de cours :

- Étudier complètement le filtre passe-haut d'ordre 1 (circuit RL) : fonction de transfert (forme canonique), comportement asymptotique, gain et déphasage, diagramme de Bode asymptotique en gain et phase.
- Définir rigoureusement la pulsation de coupure et la calculer pour un filtre passe-bas et passe-haut du premier ordre.
- À partir d'un signal  $e(t) = 3 + 10 \cos(5t) + 5 \sin(70t)$ , expliquer qualitativement comment obtenir le signal en sortie d'un filtre passe-bas ( $\omega_c = 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ) ou passe-haut ( $\omega_c = 30 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ).
- À partir d'un filtre quelconque de fonction de transfert connue  $\underline{H}(\omega)$ , expliciter la réponse en sortie de ce filtre, à partir d'un signal d'entrée sinusoïdal. Généraliser pour un signal périodique quelconque, en justifiant.
- Présenter quelques fonctions : moyennneur, intégrateur, dérivateur et des exemples de circuits en précisant les conditions pour lesquelles ils jouent correctement leur rôle.
- Étudier complètement le filtre passe-bande d'ordre 2 (RLC) : Fonction de transfert (forme canonique), comportement asymptotique, diagramme de Bode asymptotique en gain et phase, distinction des cas  $Q > 1$  et  $Q < 1$ , largeur de bande-passante (sans démonstration).

## Capacités exigibles du BO :

- Prévoir le comportement d'un filtre à fréquence nulle ou infinie en remplaçant les bobines et les condensateurs par des interrupteurs fermés ou ouverts.
- Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 et ses représentations graphiques pour conduire l'étude de la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales.
- Mettre en oeuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.
- Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode d'après l'expression de la fonction de transfert.
- Établir le gabarit d'un filtre en fonction du cahier des charges.
- Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre afin de l'utiliser comme moyennneur, intégrateur, ou dérivateur.

## Manipulations de cours :

- Filtres avec plaquette

On a vu dans le chapitre précédent que des systèmes mécaniques comme électriques avaient des comportements variés, lorsqu'ils étaient soumis à un forçage sinusoïdal. Dans ce chapitre on va aller encore plus loin, en considérant tout type de signal périodique, afin de mettre en évidence un comportement de filtrage : en effet, certaines fréquences vont être plus ou moins atténuées, ce qui peut conduire à de multiples applications, et pas seulement dans le domaine de l'électronique.

## I. Quelques rappels

Rappelons quelques éléments essentiels pour la suite concernant un signal  $s(t)$  périodique de période  $T$ .

- On peut définir une valeur moyenne  $\langle s(t) \rangle = S_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$  pour  $t_0$  quelconque. Quelques éléments à connaître :
  - $\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0, \forall \varphi$
  - $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} = \langle \sin^2(\omega t) \rangle$
- On peut également définir la valeur efficace  $s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt}$ .

On peut, maintenant que l'on a étudié l'électricité en régime variable, expliquer pourquoi on parle de valeur efficace. Supposons que l'on calcule la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance alimentée sous une tension sinusoïdale. On a alors  $u(t) = E \cos(\omega t)$ , donc  $P = \frac{u^2(t)}{R} = \frac{E^2}{R} \cos^2(\omega t)$ . Cette puissance varie au cours du temps, mais on peut calculer sa valeur moyenne :

$$\langle P \rangle = \frac{E^2}{R} \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{E^2}{2R} \quad (8.1)$$

La valeur obtenue est identique, et donc aussi « efficace », au cas où la résistance est alimentée sous une tension continue  $U_{\text{eff}}$  telle que  $P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$  avec  $U_{\text{eff}} = \frac{E}{\sqrt{2}}$ . Or, justement,

$$\sqrt{\langle E^2 \cos^2(\omega t) \rangle} = \sqrt{\frac{E^2}{2}} = \frac{E}{\sqrt{2}} = U_{\text{eff}}$$

- Enfin, tout signal périodique suit la décomposition en série de Fourier, c'est-à-dire en une somme infinie de sinusoïdes de fréquences multiples de  $f = \frac{1}{T}$  :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \quad (8.2)$$

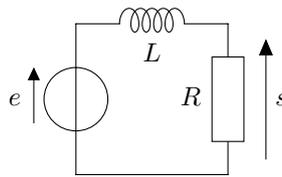
où

- $S_0$  est la composante continue du signal, cela correspond même à sa valeur moyenne
- $f_0$  et  $S_1$  caractérisent ce qu'on appelle le mode **fondamental**
- les composantes pour  $n \geq 2$  sont appelées les **harmoniques de rang n**

## II. Étude d'un filtre simple

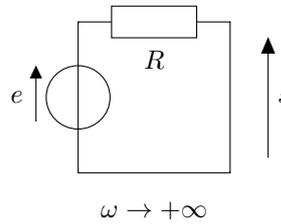
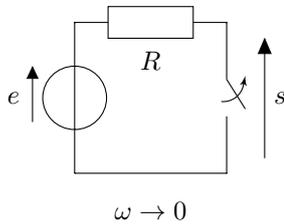
### II.1 Étude qualitative : comportement asymptotique

Considérons un circuit du premier ordre : le circuit RC série. Étudions le comportement de la tension aux bornes du condensateur, et faisons varier la fréquence du générateur basses fréquences, de tension  $\underline{e} = E e^{j\omega t}$ . Dans un premier temps, regardons à très basse fréquence et très haute fréquence : on parle de **comportement asymptotique**.



On peut tracer deux schémas à basse et hautes fréquences en remplaçant respectivement le condensateur soit par un interrupteur ouvert, soit un interrupteur fermé :

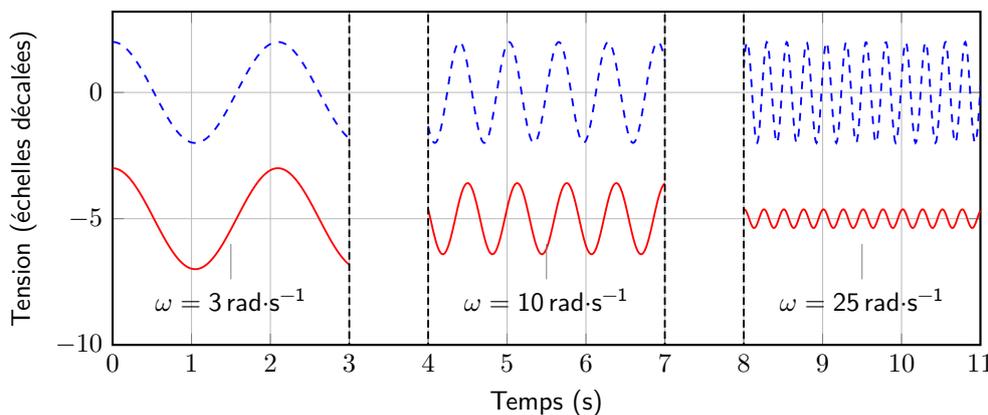
\*



Ainsi pour  $\omega \rightarrow 0$ ,  $s = e$ , et pour  $\omega \rightarrow +\infty$   $s = 0$  aux bornes d'un fil. On qualifie le système de filtre passe-bas : à haute fréquence le signal d'entrée n'est pas transmis.

## II.2 Étude en fréquence

Des mesures expérimentales, pour  $\frac{1}{RC} = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , sont représentées ci-dessous :



Pour les interpréter, passons en complexe, et déterminons l'expression de la tension aux bornes du condensateur en régime forcé. Par une relation de pont diviseur :

$$\underline{s} = \frac{1}{\frac{jC\omega}{1} + R} e = \frac{1}{1 + jRC\omega} e \quad (8.3)$$

Par conséquent l'amplitude de sortie vaut  $S_m = \frac{E}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}$  et  $\varphi = -\arctan RC\omega$ .

Introduisons une pulsation caractéristique du système  $\omega_c = \frac{1}{RC} = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , donc :

$$\underline{S}_m = \frac{E}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad (8.4)$$

Discutons qualitativement :

- pour  $\omega \ll \omega_c$ ,  $\underline{S}_m \simeq E$  donc  $S_m = E$  et  $\varphi = \arg(\underline{S}_m) = 0$  donc  $s(t) \simeq e(t)$  ;
- pour  $\omega \gg \omega_c$ ,  $\underline{S}_m \simeq \frac{E}{j\frac{\omega}{\omega_c}} = -j\frac{\omega_c E}{\omega}$ , donc  $S_m = \frac{\omega_c E}{\omega} \ll E$  et  $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$ .

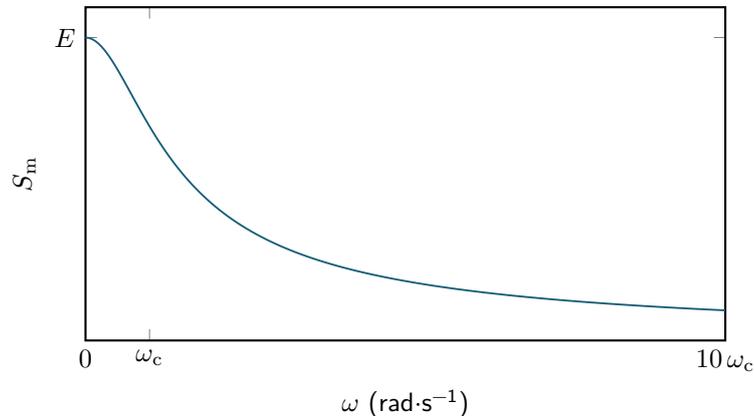
\*

Par conséquent, pour des pulsations petites devant  $\omega_c$ , le signal d'entrée est intégralement transmis sans déformation, tandis que pour des pulsations grandes devant  $\omega_c$ , le signal de sortie est déphasé, d'amplitude très petite devant celle du générateur : c'est pour cela qu'on qualifie bien le circuit RC série avec la sortie aux bornes du condensateur de **passe-bas**.

## II.3 Représentations graphiques

### a) Représentation linéaire

Afin d'observer de manière rapide l'effet du filtre sur un signal sinusoïdal, on peut représenter l'amplitude en fonction de la pulsation  $\omega$  :



Ainsi on peut connaître rapidement *via* ce graphique les variations d'amplitude selon la pulsation du signal d'entrée du filtre. Cependant, il manque clairement de précision si on souhaite savoir pour quelle pulsation l'amplitude est divisée par 100, ou 1000.

### b) Représentation logarithmique

On va alors utiliser une autre échelle : le décibel. Il s'agit d'une unité de grandeur sans dimension, définie comme 10 fois le logarithme décimal du rapport entre deux puissances. Étant donné le lien entre puissance et tension ( $P = u^2/R$  pour une résistance), on exprimera des grandeurs en décibel en effectuant le rapport de tensions de « sortie » (ici la tension aux bornes du condensateur) sur celle d'« entrée » (générateur) :

$$G_{\text{dB}} = 10 \log \frac{P_s}{P_e} = 10 \log \frac{u_s^2}{u_e^2} = 20 \log \left( \frac{u_{s,m}}{u_{e,m}} \right) = 20 \log \left( \frac{S_m}{E} \right) \quad (8.5)$$

On parle alors de **gain en décibel**. Plusieurs valeurs sont à retenir :

- \* si  $S_m/E$  est multiplié par  $\sqrt{2}$ , on ajoute au gain logarithmique initial la quantité  $20 \log(\sqrt{2}) = 10 \log(2)$  soit environ 3 dB ;
- \* si  $S_m/E$  est multiplié par 10, on ajoute au gain logarithmique initial 20 dB ;
- \* si  $S_m/E$  est divisé par 10, on enlève au gain logarithmique initial 20 dB.

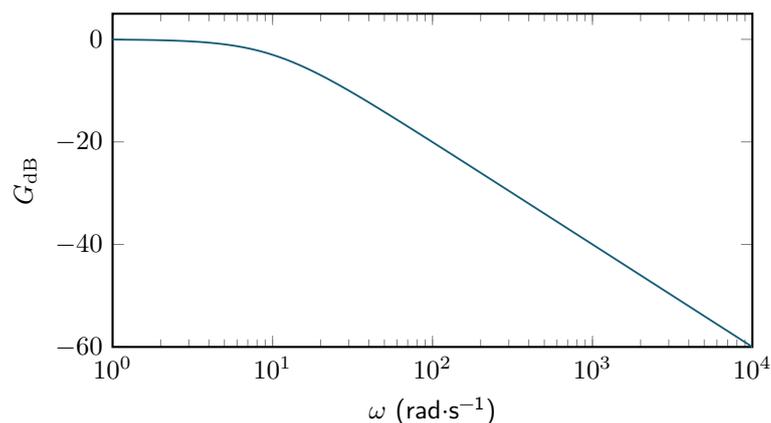


### Exercice

Que vaut  $S_m/E$  lorsque  $G_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$  ?  $G_{\text{dB}} = 20 \text{ dB}$  ?  $G_{\text{dB}} = 100 \text{ dB}$  ?  $G_{\text{dB}} = -40 \text{ dB}$  ?  $G_{\text{dB}} = -60 \text{ dB}$  ?

Respectivement 1, 10,  $10^5$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ .

On peut alors tracer le même graphique que précédemment, mais on va utiliser une échelle logarithmique également pour l'axe des abscisses, de sorte à représenter sur une plus grande plage de fréquence l'évolution de l'amplitude :





## Exercice

Pour quelle pulsation, en fonction de  $\omega_c$ , le signal en sortie est divisé par 10 ? par 100 ? par 1000 ?

Le signal de sortie est divisé par 10 lorsque  $G_{dB} = -20$  dB, donc pour  $\omega = 10^2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 10\omega_c$ .  
Divisé par 100 pour  $100\omega_c$ , et par 1000 pour  $1000\omega_c$ .

## III. Principes du traitement des signaux

### III.1 Cadre d'étude

On va dans toute la suite s'intéresser à un système ( $S$ ) possédant deux caractéristiques fondamentales :

- ses propriétés sont **indépendantes du temps** (d'un point de vue mécanique, cela revient à considérer que les composants mécaniques tels les ressorts ou vérins vont garder leurs propriétés mécaniques inchangées au cours du temps malgré leur utilisation pouvant être intensive) ;
- il a un comportement **linéaire**, cela sous-entend a priori que ( $S$ ) est régi par une **équation différentielle linéaire** pour décrire le lien entre la variable d'entrée  $e(t)$  (tension du générateur, excitation d'une extrémité d'un ressort) et celle de sortie  $s(t)$  (tension aux bornes du condensateur, de la résistance, ..., position de la masse du système masse-ressort).



\* Ce dernier point est très important. Cela signifie que si un signal entrant  $e_1(t)$  devient  $s_1(t)$  en sortie, et qu'il en est de même pour le couple  $(e_2(t), s_2(t))$ , alors pour  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  quelconques,  $\lambda e_1 + \mu e_2$  devient en sortie du système  $\lambda s_1 + \mu s_2$ .

Cette propriété permet de justifier la suite de notre étude, où nous allons chercher à connaître la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale de la forme  $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$ , pour toute pulsation  $\omega$ . Ainsi, d'après la décomposition en série de Fourier d'un signal périodique, il suffira de sommer la réponse du système pour chaque composante sinusoïdale du signal.

Le chapitre va s'appuyer majoritairement sur des exemples électriques, même s'il sera possible d'appliquer de nombreux raisonnements à d'autres types de systèmes.

### III.2 Notion de gabarit

#### a) Gain d'un système

Il est parfois souhaitable de supprimer d'un signal des composantes indésirables (des harmoniques élevées, par exemple). On emploie alors des **filtres** mécaniques, électroniques voire numériques.

Pour quantifier l'influence d'un filtre sur un signal de pulsation  $\omega$ , on introduit le **gain**. Deux définitions sont utiles, en **utilisant les notations complexes** :

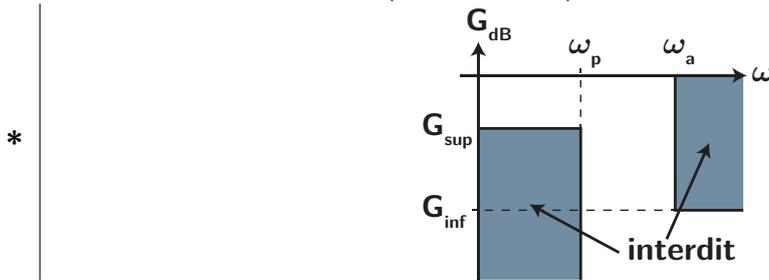
- le **gain linéaire** : on compare l'amplitude de sortie avec l'amplitude du signal d'entrée  $\left| \frac{s(\omega)}{e(\omega)} \right|$ .  
S'il est plus grand que 1, le filtre amplifie cette pulsation, s'il est plus petit que 1 il atténue (ou filtre) cette pulsation.
- le **gain logarithmique** ou **gain en décibel**  $G_{dB}$ , dont l'unité est le décibel (dB) tel que  $G_{dB} = 20 \log \left( \left| \frac{s(\omega)}{e(\omega)} \right| \right)$ .

#### b) Construction d'un gabarit

Avant la mise en place d'un filtre, il faut définir le **cahier des charges**, c'est-à-dire les critères choisis pour le filtrage. Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas, laissant passer uniquement les basses fréquences. On fixe pour objectif que :

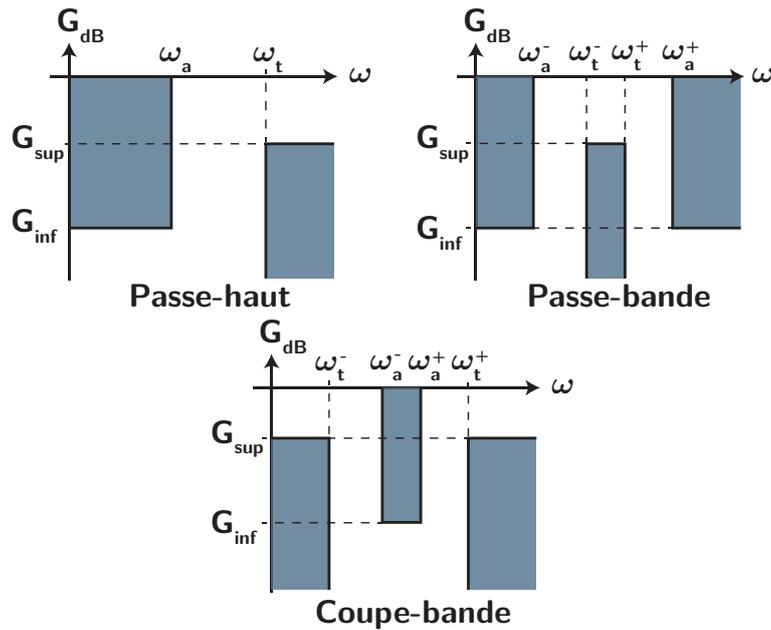
- pour  $0 < \omega < \omega_p$  le signal doit être assez peu atténué, ce qui implique un gain en décibel minimal, soit  $G_{dB} > G_{sup}$  ;
- pour  $\omega > \omega_a$  le signal doit atténuer suffisamment, ce qui implique un gain maximal de  $G_{dB} < G_{inf}$  avec évidemment  $G_{inf} < G_{sup}$ .

Le gabarit est alors la représentation graphique des zones autorisées ou interdites pour le gain du filtre en fonction de la pulsation (ou la fréquence), soit ici :



### c) Exemples de gabarits

De la même façon on peut définir d'autres types de gabarits eu égard à leur fonction :



Voyons maintenant comment construire de tels filtres vérifiant ces gabarits.

## IV. Action d'un filtre sur un signal

### IV.1 Définitions

#### a) Fonction de transfert

##### Définition : fonction de transfert

Pour un système linéaire soumis à un signal d'entrée  $\underline{e}(\omega) = e_0 e^{j\omega t}$  sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , fournissant un signal de sortie  $\underline{s}(\omega) = s_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ , on définit la **fonction de transfert**  $\underline{H}(\omega)$  comme étant :

\*

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(\omega)}{\underline{e}(\omega)} = \frac{s_0}{e_0} e^{j\varphi} \quad (8.6)$$

Le gain linéaire s'écrit donc  $|\underline{H}|$  et le gain en décibel  $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|)$ .

La fonction de transfert s'écrit sous la forme d'une fraction de deux polynômes complexes de variable  $\omega$  :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \dots + a_p\omega^p}{b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \dots + b_q\omega^q} \quad (8.7)$$

On dit du filtre caractérisé par cette fonction de transfert qu'il est d'ordre  $n$ , avec  $n$  le plus grand entier parmi  $p$  et  $q$ .

Prenons l'exemple d'un circuit RC en régime forcé, où la tension d'entrée correspond au générateur  $e(t)$  et la tension de sortie est celle aux bornes du condensateur  $u_C$ . D'après ce qui précède :

$$u_C = \frac{1}{1 + jRC\omega} e \implies \underline{H}(\omega) = \frac{u_C}{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad (8.8)$$

## b) Diagramme de Bode

Afin de quantifier l'effet d'un quadripôle ou d'une association de quadripôles caractérisé par sa fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$  et déterminer entre autres s'il répond à un gabarit, il convient de représenter ce qu'on appelle le **diagramme de Bode**.

### Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est constitué de deux graphiques :

\*

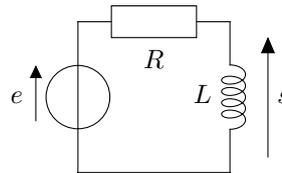
- le diagramme de Bode en amplitude correspondant à la représentation du gain en décibel  $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}(\omega)|)$  en fonction de  $\log(\omega)$  (ou éventuellement d'une variable réduite  $\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$  s'il intervient une pulsation  $\omega_c$  caractéristique) ;
- le diagramme de Bode en phase où on trace le déphasage  $\varphi = \arg(\underline{H}(\omega))$  en fonction de la même variable.

Souvent la variable choisie est la pulsation  $\omega$ , mais rien n'empêche de raisonner avec la fréquence.

## IV.2 Étude d'un filtre

### a) Comportement asymptotique

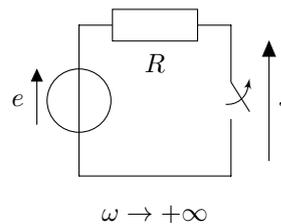
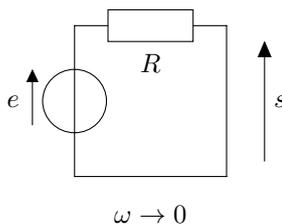
Prenons l'exemple du circuit RL avec sortie sur  $L$ .



### Exercice

Déterminer la fonction de ce filtre à l'aide du comportement asymptotique des dipôles.

D'un point de vue asymptotique, on peut tracer deux schémas à basse et hautes fréquences en remplaçant la bobine soit par un fil, soit un interrupteur ouvert :



Ainsi pour  $\omega \rightarrow 0$ ,  $s = 0$  (fil), et pour  $\omega \rightarrow +\infty$   $s = e$  d'après la loi des mailles comme le courant est nul dans le circuit. Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

### b) Calcul et tracé

### Exercice

Déterminer la fonction de transfert du filtre.

La fonction de transfert s'obtient à l'aide de la relation du pont diviseur de tension :  $\underline{s} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} e = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} e$ , soit

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} \quad (8.9)$$

en posant  $\omega_c = \frac{R}{L}$ .



### Exercice

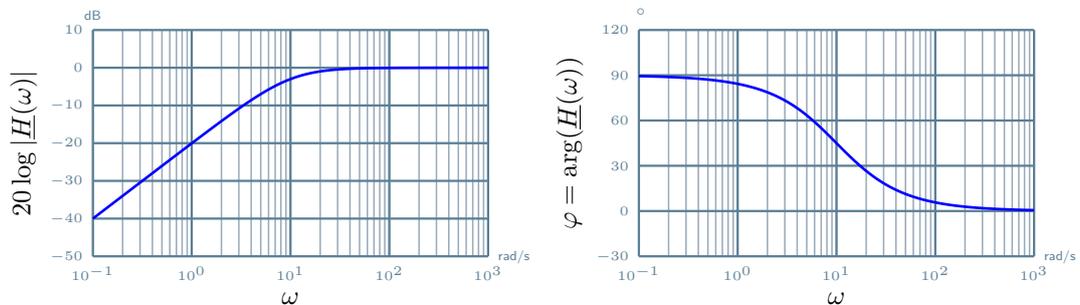
Calculer le gain en décibel et le déphasage à partir de la fonction de transfert.

$$G_{dB} = 20 \log \left( \left| \frac{1}{1 - j \frac{\omega_c}{\omega}} \right| \right) = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} \right) = -10 \log \left( 1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) \quad (8.10)$$

et le déphasage vaut

$$\varphi = \arg \left( \frac{1}{1 - j \frac{\omega_c}{\omega}} \right) = -\arg \left( 1 - j \frac{\omega_c}{\omega} \right) = \arctan \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right) \quad (8.11)$$

Ci-dessous sont représentées ces courbes pour  $\omega_c = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  :



### c) Diagramme de Bode asymptotique

Sans forcément tracer de manière rigoureuse le diagramme de Bode précédent, on peut en donner une allure simplifiée, appelée **diagramme de Bode asymptotique**. On cherche alors à linéariser les expressions de  $G_{dB}$  et  $\varphi$  pour différentes gammes de fréquences. Ici on va distinguer deux cas :

- lorsque  $\omega \ll \omega_c$ ,  $\underline{H} \simeq \frac{1}{-j \frac{\omega_c}{\omega}} = j \frac{\omega}{\omega_c}$  donc

$$G_{dB} \simeq 20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) = 20 \log(\omega) - 20 \log(\omega_c) \quad (8.12)$$

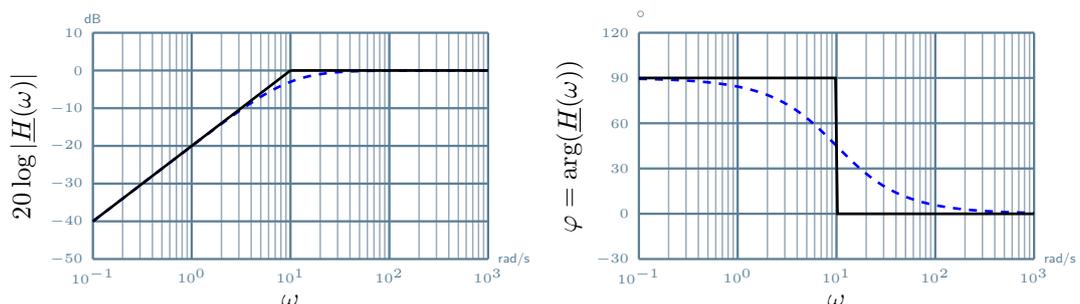
\*

correspondant à une droite de pente +20 avec une échelle horizontale logarithmique (c'est-à-dire que la variable horizontale est  $\log \omega$ ). On parle alors d'une pente de +20 dB par décade, car si on multiplie la pulsation par un facteur 10 (une décade), on augmente le gain de 20 dB.

La phase vaut quant à elle  $\varphi = \arg \left( j \frac{\omega}{\omega_c} \right) = \frac{\pi}{2}$ .

- lorsque  $\omega \gg \omega_c$ ,  $\underline{H} \simeq 1$  donc  $G_{dB} = 0$  et  $\varphi = 0$ .

Les expressions limites que l'on a obtenu pour  $\omega \ll \omega_c$  et  $\omega \gg \omega_c$  permettent de représenter le diagramme asymptotique ci-dessous.



## d) Pulsation de coupure

### Pulsation de coupure

\* Pour un filtre de type passe-bas ou passe-haut, on définit la **pulsation de coupure à -3 dB** comme étant la pulsation  $\omega_c$  vérifiant :

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,max} - 3 \Leftrightarrow |\underline{H}|(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad (8.13)$$

\* Ici la pulsation caractéristique introduite précédemment est cohérente avec cette définition :  $|\underline{H}|(\omega_c) = \left| \frac{1}{1-j} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , avec  $H_{max} = 1$ .  $\omega_c$  est donc la pulsation de coupure de ce filtre passe-haut.

Il faut être vigilant sur cette définition, car le gain maximal n'est pas toujours de  $H_{max} = 1$ , i.e.  $G_{dB,max} = 0$ , ce qui peut avoir des conséquences lors du calcul de la pulsation de coupure. Par exemple, si la fonction de transfert s'écrit :



$$\underline{H} = \frac{1}{2 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow H_{max} = \frac{1}{2} \quad (8.14)$$

et  $|\underline{H}|(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}}}$ , il vient  $\omega_c = 2\omega_0$  !

## e) Expression du signal en sortie du filtre

Connaissant la fonction de transfert pour une pulsation donnée, on peut exprimer le signal en sortie de filtre en fonction du signal d'entrée  $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \psi)$  :

$$* \quad s(t) = \text{Re}(\underline{s}(t)) = \text{Re}(\underline{H}(\omega) \cdot \underline{e}) = \text{Re}\left(|\underline{H}(\omega)| e^{j\varphi} E_0 e^{j(\omega t + \psi)}\right) \quad (8.15)$$

$$= \text{Re}\left(|\underline{H}(\omega)| E_0 e^{j(\omega t + \psi + \varphi)}\right) = |\underline{H}(\omega)| E_0 \cos(\omega t + \psi + \varphi) \quad (8.16)$$

$$= |\underline{H}(\omega)| E_0 \cos(\omega t + \psi + \arg(\underline{H}(\omega))) \quad (8.17)$$

Ainsi l'amplitude du signal de sortie est relié au gain linéaire  $S_m(\omega) = |\underline{H}(\omega)| E_0$ , la fréquence (ou la pulsation) est inchangée par rapport au signal d'entrée, et le déphasage par rapport au signal d'entrée vaut  $\arg(\underline{H}(\omega))$ .

Si on connaît le gain en décibel, on rappelle que l'obtention du gain linéaire s'obtient en utilisant la fonction réciproque de log, soit  $10^{\dots}$  :  $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}| \Leftrightarrow |\underline{H}| = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$ .

## IV.3 Réponse d'un filtre à un signal périodique quelconque

### a) Expression mathématique

On vient de voir l'expression du signal de sortie pour un signal entrant sinusoïdal. En utilisant la **propriété de linéarité des systèmes** étudiés, on peut généraliser à tout signal périodique de la forme

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (8.18)$$

de la manière suivante :

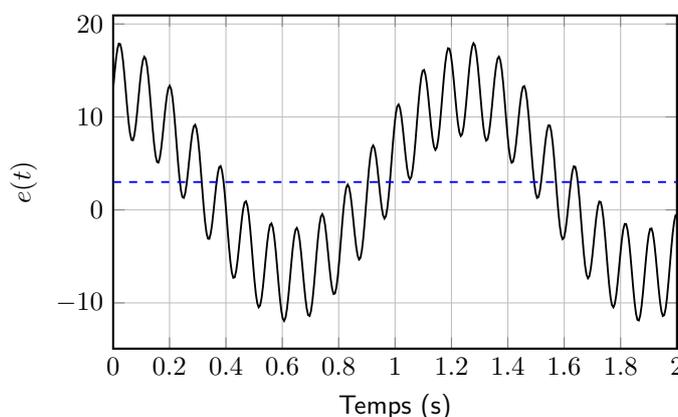
$$* \quad s(t) = |\underline{H}(0)| \cos(\arg(\underline{H}(0))) E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} |\underline{H}(n\omega)| E_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \arg(\underline{H}(n\omega))) \quad (8.19)$$

## b) Raisonnement graphique

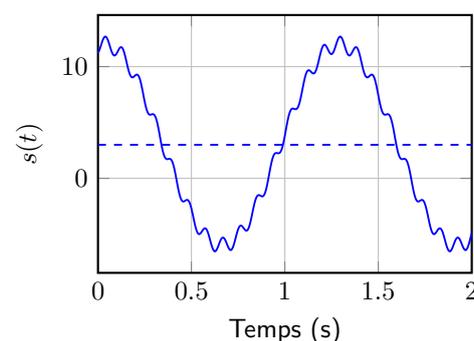
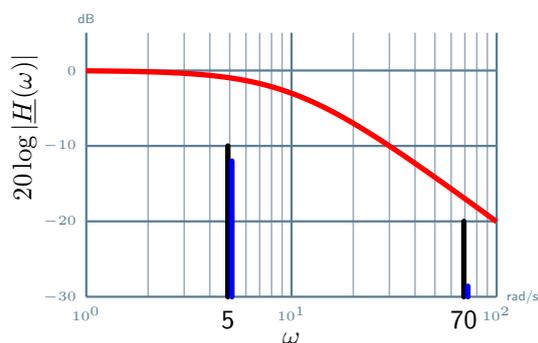
On peut raisonner graphiquement à l'aide de la superposition :

- du spectre en amplitude du signal entrant ;
- du diagramme de Bode en amplitude.

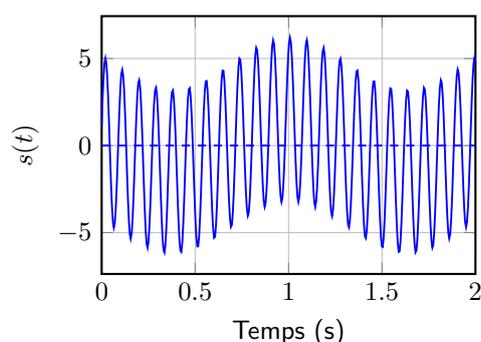
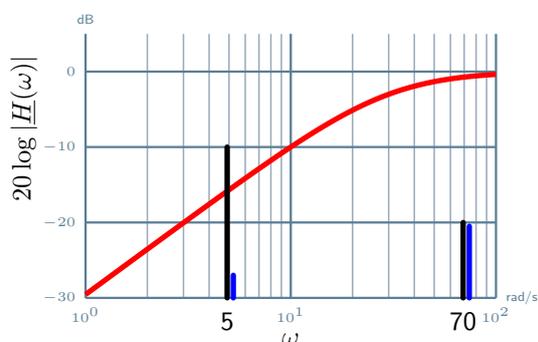
Considérons dans un premier temps la somme de trois signaux  $e(t) = 3 + 10 \cos(5t) + 5 \sin(70t)$  avec  $t$  en seconde représenté ci-dessous :



- avec un filtre passe-bas de pulsation de coupure  $\omega_c = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , le signal en sortie sera majoritairement celui continu auquel s'ajoute celui de pulsation  $\omega = 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  très peu modifié, même si ce n'est pas encore parfait pour supprimer la composante haute fréquence ;



- avec un filtre passe-haut de pulsation de coupure  $\omega_c = 30 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , le signal en sortie sera majoritairement celui à haute fréquence auquel s'ajoute une partie de celui de pulsation  $\omega = 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  atténué et déphasé. Par contre la composante continue a été complètement supprimée. L'allure est donc la suivante :



Il va de soi que pour des cas quelconques, il sera difficile de représenter l'allure du signal, à l'exception des exemples qui suivent.

## V. Quelques exemples de filtres

### V.1 Filtres d'ordre 1

#### a) Filtre passe-bas

La fonction de transfert associée à ce filtre est de la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{A}{1 + j\omega\tau} = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{A}{1 + jx} \quad (8.20)$$

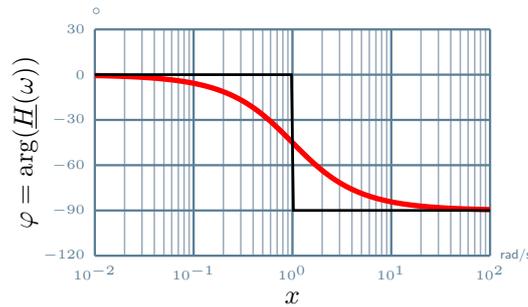
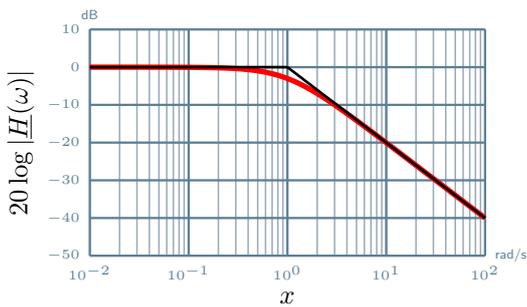
On pose en effet souvent  $x = \frac{\omega}{\omega_c} = \omega\tau$  la pulsation réduite avec  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$  la pulsation de coupure à  $-3$  dB.

Exemples : circuit RC aux bornes de C, circuit RL aux bornes de R.

#### Exercice

Déterminer le diagramme de Bode asymptotique :

- pour  $\omega \ll \omega_c$ , soit  $x \ll 1$ ,  $\underline{H}(\omega) \simeq 1$  donc  $G_{dB} \simeq 0$  et  $\varphi \simeq 0$ ;
- pour  $\omega \gg \omega_c$ ,  $\underline{H}(\omega) \simeq \frac{1}{jx}$   $G_{dB} \simeq -20 \log x$  et  $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$ . On a donc une droite de pente  $-20$  dB / décade.



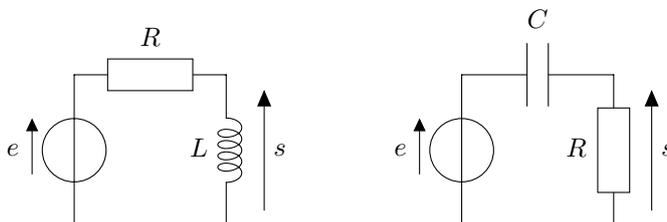
#### b) Filtre passe-haut

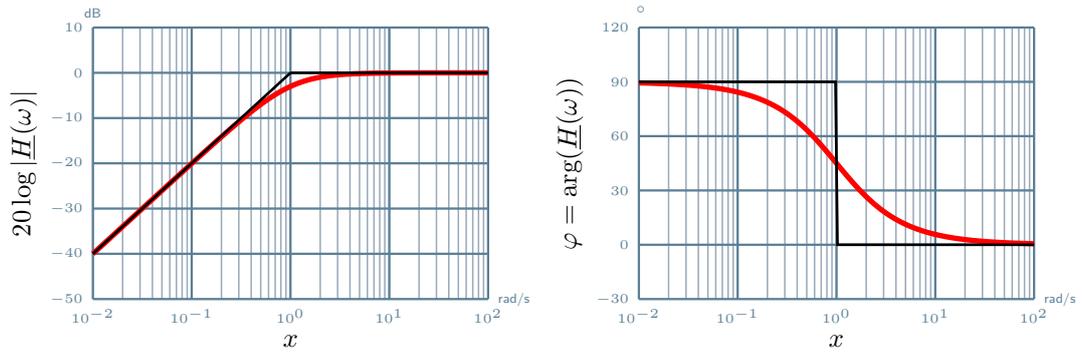
La fonction de transfert associée à ce filtre est de la forme

$$\underline{H}(\omega) = \frac{Aj\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{Aj\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{A}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{A}{1 + \frac{1}{jx}} \quad (8.21)$$

On pose souvent  $x = \frac{\omega}{\omega_c} = \omega\tau$  avec  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$  la pulsation de coupure.

Exemples : circuit RL aux bornes de L, circuit RC aux bornes de R.

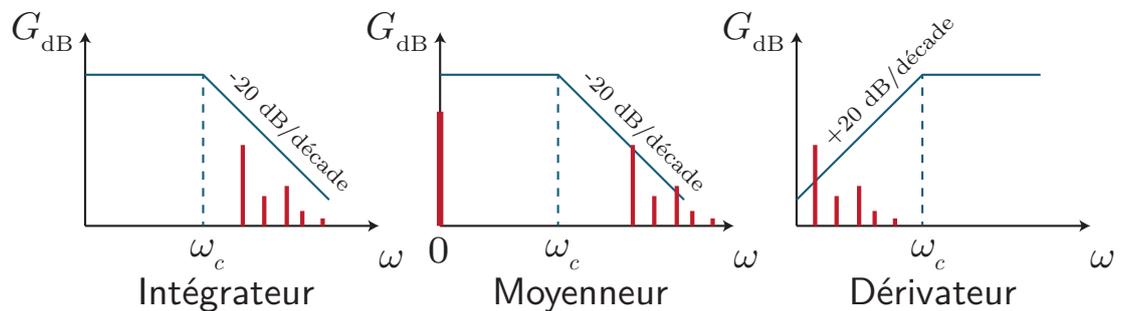




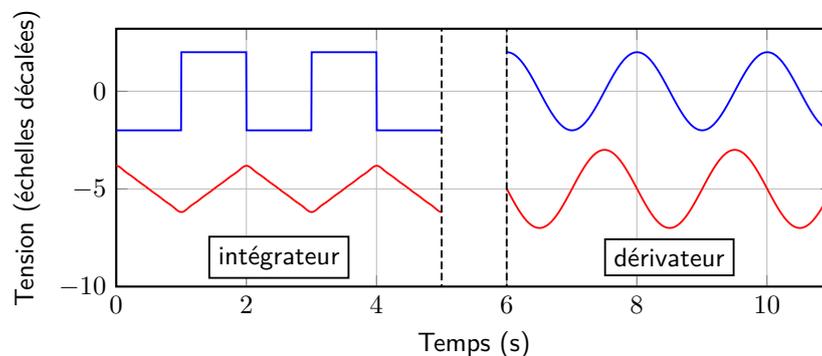
### c) Quelques comportements à retenir

Quelques opérations sur les signaux périodiques sont accessibles avec les deux filtres précédents. On en distingue trois :

- \* ■ Comportement **intégrateur** lorsque  $\underline{s} \propto \frac{e}{j\omega}$  car alors  $s(t) \propto \int e(t)dt$ . On le réalise avec un filtre passe-bas, lorsque la fréquence du fondamental est supérieure à la fréquence de coupure du filtre : toutes les composantes du spectre du signal d'entrée se trouvent dans la pente à -20 dB/décade.
- \* ■ **Moyenneur** lorsque l'on ne garde que la composante continue du signal périodique : on utilise un filtre passe-bas tel que la fréquence du fondamental est très grande devant la fréquence de coupure.
- \* ■ Comportement **dérivateur** lorsque  $\underline{s} \propto j\omega e$  car alors  $s(t) \propto \frac{de}{dt}$ . Exemple : filtre passe-haut, lorsque la fréquence du fondamental est très petite devant la fréquence de coupure du filtre et que la plupart des composantes du spectre du signal d'entrée se trouvent dans la pente à +20 dB/décade.



Sont illustrés ci-dessous deux comportements, le signal d'entrée étant celui du dessus :



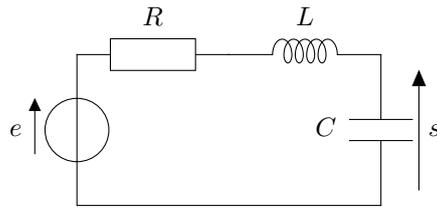
## V.2 Filtres du deuxième ordre

### a) Passe-bas

La fonction de transfert associée à ce filtre est de la forme

$$\underline{H}(\omega) = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (8.22)$$

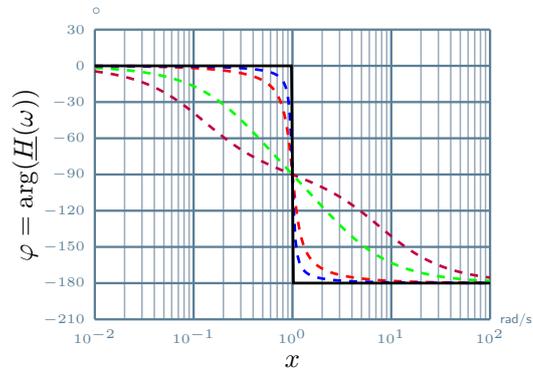
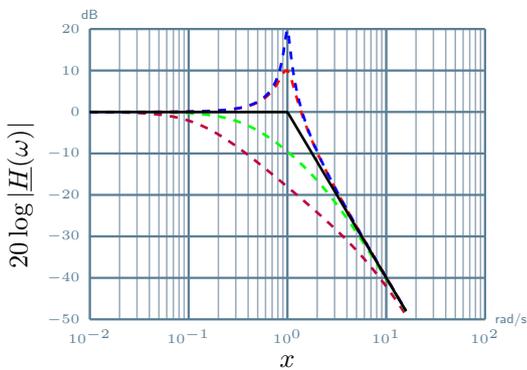
Exemple : circuit RLC avec la sortie aux bornes de C ; système masse-ressort amorti où l'entrée est le support oscillant, et la sortie la position de la masse.



### Exercice

Déterminer le diagramme de Bode asymptotique :

- pour  $\omega \ll \omega_0$ , soit  $x \ll 1$ ,  $\underline{H}(\omega) \simeq 1$  donc  $G_{dB} \simeq 0$  et  $\varphi \simeq 0$ ;
- pour  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\underline{H}(\omega) \simeq -\frac{1}{x^2}$   $G_{dB} \simeq -40 \log x$  et  $\varphi \simeq -\pi$  (le déphasage est ici négatif, déjà étudié auparavant).

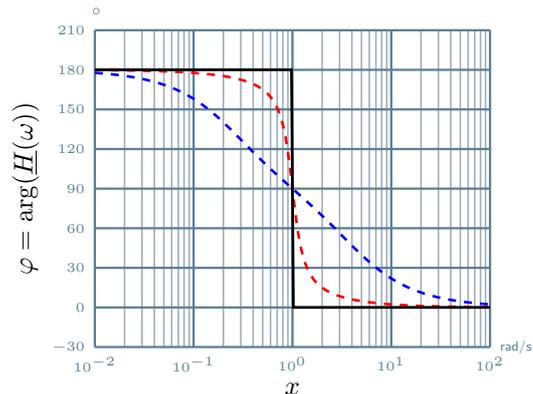
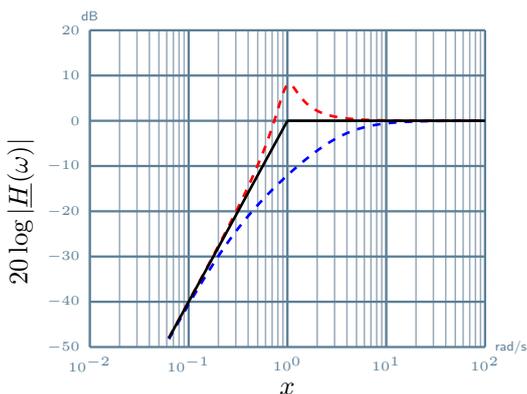
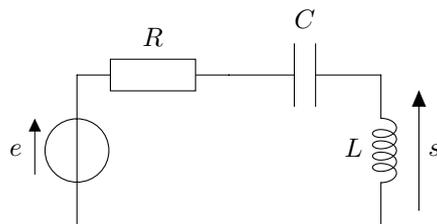


On a déjà rencontré la fonction de transfert dans le cadre de l'étude de la résonance en tension : elle ne se produit que si  $Q > 1/\sqrt{2}$ .

### V.3 Passe-haut

La fonction de transfert associée à ce filtre est  $\underline{H}(\omega) = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ .

Exemples : circuit RLC, sortie en L.





## Exercice

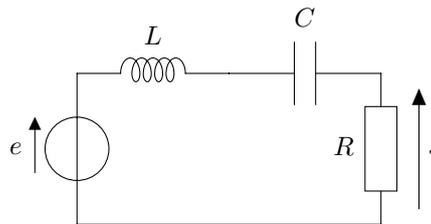
Déterminer sur le graphique la pente de l'asymptote oblique.

### V.4 Passe-bande

La fonction de transfert associée à ce filtre est  $\underline{H}(\omega) = \frac{A}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{A}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ .

On l'a déjà rencontré lors de la résonance en intensité où nous nous étions intéressé à la tension aux bornes de la résistance pour connaître l'intensité complexe.

Exemples : circuit RLC, sortie en R, système masse-ressort amorti où l'entrée est le support oscillant, et la sortie la vitesse de la masse.



## Exercice

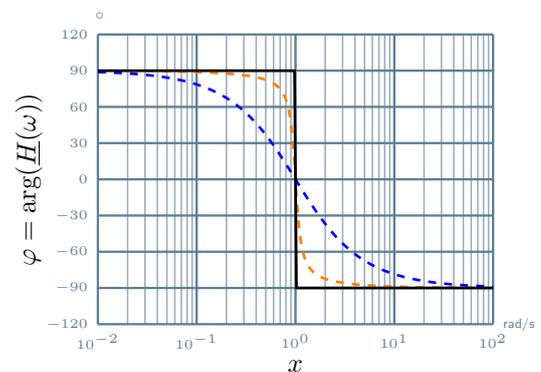
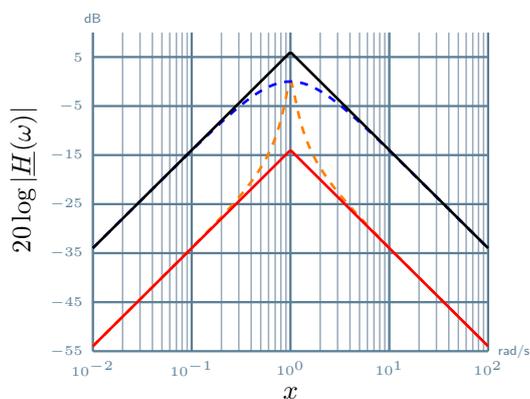
Déterminer la fonction de transfert du filtre RLC et le mettre sous la forme demandée.

Quelques propriétés à connaître :

- largeur de bande-passante à  $-3$  dB (pour des valeurs de  $\omega$  telles que  $G_{dB}(\omega) > G_{dB,max} - 3$  dB, soit encore  $|\underline{H}|(\omega) > \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ ) :  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$  avec  $\omega_0$  la pulsation centrale du passe-bande ;
- aux basses fréquences, pour  $\omega \ll \omega_0$ , on a  $\underline{H}(\omega) \simeq \frac{Aj\omega}{Q\omega_0}$ , c'est-à-dire un comportement **dérivateur** ;
- aux hautes fréquences, pour  $\omega \gg \omega_0$ , on a  $\underline{H}(\omega) \simeq \frac{A\omega_0}{jQ\omega}$ , c'est-à-dire un comportement **intégrateur**.

\*

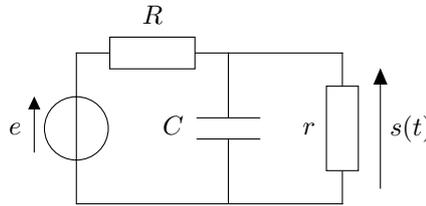
Concernant le tracé asymptotique, on doit distinguer le cas  $Q < 1$  ou  $Q > 1$ . Pour  $\omega \ll \omega_0$  et donc  $x \ll 1$ ,  $G_{dB} \simeq 20 \log\left(\frac{Ax}{Q}\right) = (20 \log A - 20 \log Q) + 20 \log x$ . Ainsi selon la valeur de  $Q$  l'ordonnée à l'origine de la droite varie. Comme  $G_{dB}(\omega_0) = A$ , la position de l'asymptote par rapport à la courbe change si  $20 \log Q$  est positif ou négatif. En particulier, si  $Q > 1$  l'ordonnée est négative et la courbe réelle se trouve au-dessus de l'asymptote ; si  $Q < 1$  ce sera le contraire, d'où l'allure ci-dessous :



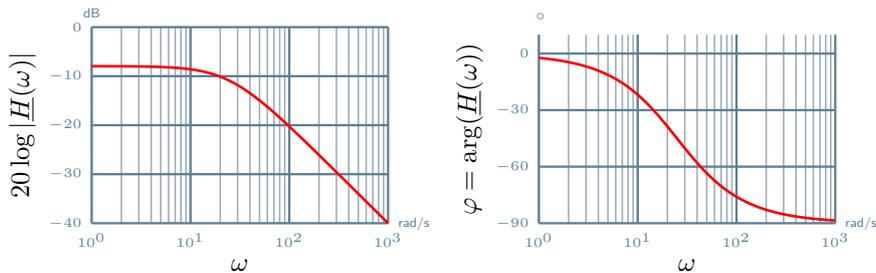
# Exercices

## 8.1 Filtre d'ordre 1

On considère le quadripôle suivant constitué d'une résistance et d'un condensateur de capacité  $C = 200 \text{ nF}$  en parallèle avec une résistance  $r$ .



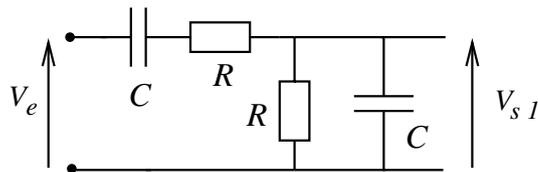
1. Quelle est la nature de ce filtre, sans effectuer de calculs ?
2. Montrer que sa fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$  se met sous la forme  $\underline{H}(\omega) = \frac{A}{1 + j\omega/\omega_0}$  où l'on précisera l'expression de  $A$  et de  $\omega_0$ .
3. On donne ci-dessous son diagramme de Bode en phase et en amplitude. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique.



4. Déterminer la valeur des résistances.

## 8.2 Filtre de Wien

On s'intéresse au circuit ci dessous, appelé filtre de Wien :

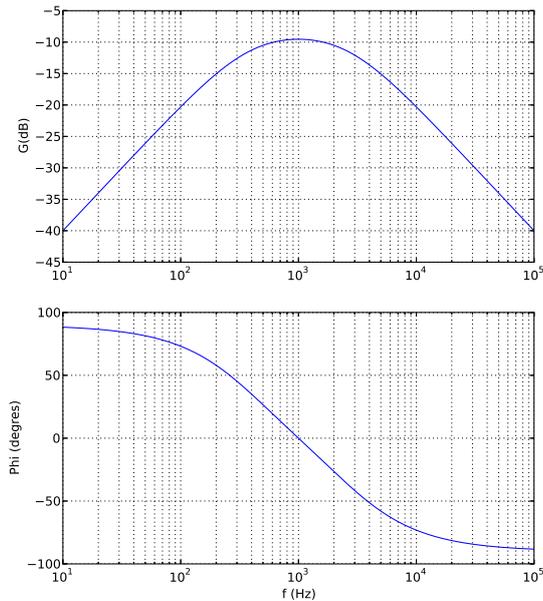


1. En considérant uniquement le circuit électronique, déterminer la nature du filtre.  
On admet provisoirement que la fonction de transfert de ce filtre se met sous la forme

$$\underline{H} = \frac{K}{1 + jQ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)}$$

On donne le diagramme de Bode d'un tel filtre pour  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$  et  $C = 159 \text{ nF}$ .

2. Dédire du diagramme les valeurs de  $K$  et  $f_0$ .
3. Établir la pente des deux droites asymptotes à hautes fréquences et basses fréquences.



4. Justifier les valeurs du déphasage observées à hautes fréquences, basses fréquences, et pour  $f = f_0$ .
5. On choisit pour entrée un signal créneau de fréquence  $f = 60$  kHz, et on constate que la sortie présente une allure en dent de scie. Interpréter ce fait en raisonnant sur la fonction de transfert.
6. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre se met sous la forme annoncée en explicitant  $K$ ,  $Q$  et  $\omega_0$ . Vérifier les valeurs trouvées à la question 2.

### 8.3 Étude d'un pH-mètre

Un pH-mètre est composé d'une électrode de verre, qui délivre un signal électrique fonction affine du pH ( $v = A + B \cdot pH$ ) où  $A$  et  $B$  sont des constantes ajustées dans les étapes d'étalonnage. Du fait de la proximité de dispositifs agitateurs, un signal électrique de fréquence égale à 4 Hz se superpose au signal utile. On utilise donc un filtre passe-bas en vue d'atténuer l'ondulation parasite. Sa fonction de transfert est de la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau}$$

1. Quelle valeur de  $H_0$  choisir, si l'on ne veut pas modifier la tension utile par le filtrage, lorsque la solution présente un pH constant ?
2. Quelle valeur, notée  $\tau_1$ , de constante de temps  $\tau$  permet d'atténuer l'oscillation parasitée d'un facteur 10 ? Faire de même avec un facteur 100 (on notera alors la constante de temps  $\tau_2$ ).
3. Le pH de la solution peut varier lentement dans le temps avec une fréquence  $f \ll 4$  Hz. Quel est l'inconvénient d'utiliser une constante de temps  $\tau$  élevée ? On illustrera le phénomène en représentant l'allure du signal en sortie pour  $\tau = \tau_1$  puis  $\tau = \tau_2$  avec  $f = 0,2$  Hz.

### 8.4 Gabarit de filtre passe-bas

Un dispositif de traitement de signaux acoustiques nécessite la séparation de composantes sonores et ultrasonores. On réalise un filtre passe-bas de fréquence de coupure 20 kHz. L'ondulation dans la bande-passante est limitée à 3 dB et on impose qu'à partir de la fréquence 40 kHz, l'atténuation soit supérieure à 10 dB.

1. Représenter le gabarit du filtre, d'après les indications de l'énoncé.
2. Un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure  $f_c = 20$  kHz convient-il ?

3. Même question avec la fonction de transfert

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

où  $\omega_c = 2\pi f_c$ .

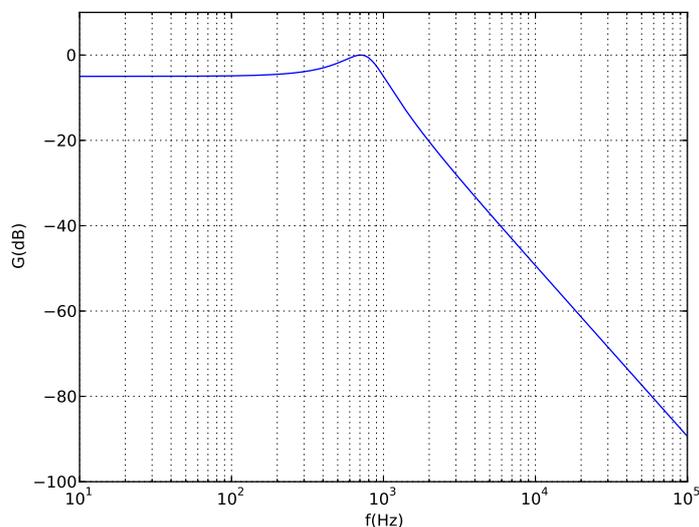
## 8.5 Récupération d'une fréquence

On récupère lors d'une mesure au radar un signal reçu  $e_1(t)$  de fréquence  $f_1$ , à la suite de l'émission d'un signal  $e_0(t)$  de fréquence  $f_0$ . On cherche à obtenir expérimentalement l'écart en fréquence  $\Delta f$  sachant  $f_1 = f_0 + \Delta f$  avec  $\Delta f \ll f_0$ . Cela peut être assez facilement mise en œuvre au laboratoire avec des ondes sonores ou ultra-sonores, mais présente de lourds inconvénients si le signal est un train d'impulsions électromagnétiques de fréquence très élevée ( $f_0 \approx 10$  GHz). Pour pallier à ce défaut, on doit utiliser une autre méthode de traitement du signal en effectuant deux transformations :

- $e_1(t)$  est d'abord multiplié au signal initial  $e_0(t)$ . Cette opération est réalisée par un composant nommé multiplieur qui fournit le signal  $p(t) = Ke_0(t)e_1(t)$ .
- $p(t)$  est ensuite modifié par un filtre passe-bas, dont on cherche à déterminer les caractéristiques dans la suite. Le signal  $s(t)$  est maintenant celui à la sortie de ce filtre passe-bas.

Pour simplifier, nous allons considérer que les signaux émis par l'émetteur et reçus par le détecteur sont sinusoïdaux :  $e_0(t) = e_0 \cos(\omega_0 t)$  et  $e_1(t) = e_1 \cos(\omega_1 t + \varphi)$ .

1. Montrer que  $p(t)$  est la somme de deux signaux sinusoïdaux dont on précisera les fréquences. Montrer que l'une de ces fréquences est très supérieure à l'autre (on les notera  $f_-$  et  $f_+$  dans la suite). Représenter graphiquement l'allure du spectre de  $p$ .
2. On souhaite conserver uniquement la composante de fréquence la plus faible de  $p$ . Pour cela, on utilise un filtre passe-bas. On envisage tout d'abord un filtre d'ordre 2 - nommé filtre de Tchebychev - dont on donne le diagramme de Bode, ainsi que le carré du module de la fonction de transfert :



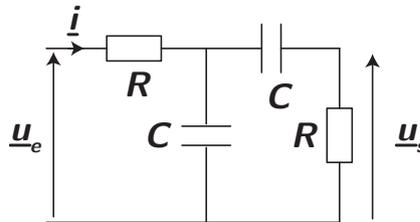
$$|\underline{H}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left( 2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right)^2}$$

- (a) En utilisant le diagramme, déterminer la valeur de  $\varepsilon$ .
- (b) Déterminer la valeur de la pente de l'asymptote à haute fréquence via le diagramme, et comparer à la valeur théorique.

- (c) On souhaite que le filtre vérifie les deux conditions suivantes : les signaux inférieurs à 1 kHz doivent conserver une amplitude au moins égale à  $1/3$  de leur amplitude initiale, et les signaux supérieurs à 20 kHz doivent être atténués d'un facteur au moins 5000. Ce filtre permet-il cela ? On répondra à cette question en représentant graphiquement le gabarit du filtre sur le document réponse. Il est demandé de justifier les tracés.

## 8.6 Cascade de filtres

En vue de réaliser un filtre passe-bande, on associe en cascade deux filtres RC (cf schéma ci-dessous). On pose  $\tau = RC$ .



1. Préciser la nature et l'ordre de chacun des filtres RC.
2. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre se met sous la forme

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$

avec  $x$  de la forme  $\omega/\omega_0$ . Préciser la valeur de  $\omega_0$ ,  $H_0$  et  $Q$ .

3. Déterminer le diagramme de Bode asymptotique et justifier le rôle du filtre.
4. Déterminer la bande-passante du filtre et son facteur de qualité.
5. Quelles fonctions de transfert obtient-on pour chacun des étages pris isolément, noté  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$  ?
6. Que donne le produit de ces deux fonctions de transfert ? Commenter et essayer de déterminer une explication.
7. On introduit un signal triangulaire de période  $T$ . Préciser l'allure du signal en sortie du filtre selon que  $T \gg \tau$  ou  $T \ll \tau$ .