

# Introduction à la mécanique quantique

## Sommaire

---

|  |          |
|--|----------|
| <b>9.1 Dualité onde-corpuscule</b> . . . . .                                   | <b>2</b> |
| 9.1.1 Dualité pour la lumière . . . . .  | 2        |
| 9.1.2 Dualité pour la matière . . . . .  | 4        |
| 9.1.3 Applications et exemples . . . . .                                       | 5        |
| <b>9.2 Approche probabiliste et fonction d'onde</b> . . . . .                  | <b>5</b> |
| 9.2.1 Interprétation probabiliste de l'expérience des fentes d'Young . . . . . | 5        |
| 9.2.2 Postulat de la fonction d'onde . . . . .                                 | 6        |
| 9.2.3 Interprétation à l'aide de la fonction d'onde . . . . .                  | 6        |
| <b>9.3 Inégalités de Heisenberg</b> . . . . .                                  | <b>6</b> |
| 9.3.1 Indétermination quantique sur la position . . . . .                      | 6        |
| 9.3.2 Principe d'indétermination de Heisenberg . . . . .                       | 7        |
| 9.3.3 Diffraction d'une particule par une fente . . . . .                      | 7        |
| <b>9.4 Quantification de l'énergie d'une particule confinée à 1D</b> . . . . . | <b>8</b> |

---

### Questions de cours :

- Présenter une expérience mettant en évidence le caractère corpusculaire de la lumière, et une expérience mettant en évidence le caractère ondulatoire de la matière.
- Fonction d'onde : sens physiques et propriétés. Application à la bifente.
- Sur l'exemple du puits infini à une dimension, mettre en évidence la quantification de l'énergie.

### Capacités exigibles du BO :

- Évaluer des ordres de grandeurs typiques intervenant dans des phénomènes quantiques.
- Approche documentaire : décrire un exemple d'expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon.
- Approche documentaire : décrire un exemple d'expérience illustrant la notion d'ondes de matière.
- Approche documentaire : comprendre les conséquences d'une inégalité d'Heisenberg fournie dans une expérience nécessitant une description quantique.
- Établir le lien qualitatif entre confinement spatial et quantification

### Vidéos :

- Interférences avec une source de photons uniques
- Interférences avec des électrons : <https://www.youtube.com/watch?v=ZJ-0PBRuthc>

La mécanique quantique naît de l'impulsion de nombreux physiciens du début du XX<sup>e</sup> siècle dont A. Einstein, L. de Broglie, P. Dirac, N. Bohr, W.K. Heisenberg, . . . cherchant à interpréter diverses expériences dont la théorie classique jusqu'alors développée ne permettait pas d'en obtenir une explication satisfaisante. De là va naître le concept de photon, dont la première preuve irréfutable de son existence ne remonte qu'à 1986 ; mais également d'onde de matière avec des expériences d'interférences et diffraction avec des particules massiques. Cela amène des concepts nouveaux et perturbants du fait de notre conception de la physique classique : il faut abandonner le déterminisme et raisonner de manière probabiliste (avec l'introduction de la « fonction d'onde »).

Cette nouvelle physique a d'énormes impacts sur notre vie quotidienne : l'informatique, les lasers, la télécommunication, le positionnement par GPS, l'imagerie médicale (IRM). Ce présent chapitre va permettre d'effectuer une synthèse de plusieurs approches documentaires effectuées au préalable.

## I. Dualité onde-corpuscule

### I.1 Dualité pour la lumière

On sait que la lumière peut être décrite par une onde (une onde électromagnétique, pour être précis), mais il s'avère que certains comportements peuvent être interprétés par un aspect corpusculaire. Les expériences qui suivent tentent de mettre en évidence cet aspect.

#### a) Quantum d'énergie : effet photoélectrique

L'effet photoélectrique a été découvert par Hertz en 1887. Elle met en évidence l'éjection d'électrons à la surface du métal à l'aide d'une lampe UV, de manière d'autant plus importante que l'intensité lumineuse est élevée. Une étude plus quantitative, menée par Lenard puis Millikan et expliquée dans l'approche documentaire a permis de mettre en évidence que **ce phénomène ne se produit que pour certaines fréquences du rayonnement lumineux** : il existe ainsi une fréquence seuil notée  $\nu_s$  qui dépend uniquement de la nature du métal.

##### Énergie d'un photon ♥

L'interprétation proposée par Einstein consiste à supposer que le rayonnement est constitué de **quanta** de lumière d'énergie

$$E = h\nu \quad (9.1)$$

avec  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  J·s, constante introduite par Planck en 1900 lors de l'étude du corps noir.

Ainsi, l'électron ne peut être arraché au métal que s'il reçoit une énergie suffisante, appelée travail d'extraction  $W$ , telle que  $E = h\nu > W$  soit  $\nu > \nu_s = W/h$ .

#### b) Impulsion du photon : effet Compton

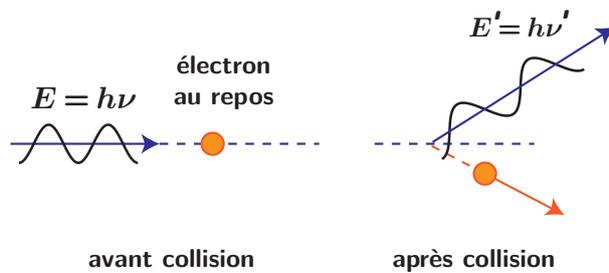
Compton a eu l'idée d'étudier la diffusion de rayons X envoyés sur une cible en carbone. Il était attendu un phénomène de diffusion (renvoi dans tout l'espace d'un rayonnement de même nature et même fréquence). Il a alors constaté qu'une partie des rayons diffusés voyaient leur longueur d'onde augmentée (et donc l'énergie associée diminuée).

##### Quantité de mouvement d'un photon ♥

L'interprétation proposée par Compton consiste à supposer que les photons subissent des collisions élastiques avec les électrons libres de la matière, où l'on peut alors définir la **quantité de mouvement** ou **impulsion** :

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (9.2)$$

Une collision élastique entre deux particules consiste à considérer que deux particules subissant un choc vont voir leur énergie cinétique totale conservée, mais la vitesse et la direction des particules peut varier.



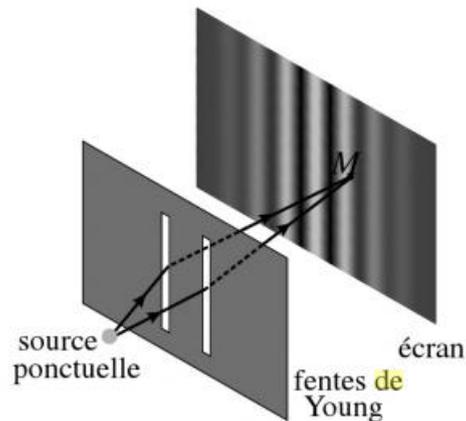
Au cours de la collision, le photon perd un peu d'énergie (cédée à l'électron qui se met en mouvement) donc sa fréquence diminue et sa longueur d'onde augmente.

### c) Nécessité d'une interprétation corpusculaire

Les deux expériences précédentes, comme beaucoup d'autres réalisées à cette époque, peuvent cependant s'expliquer sans avoir recours à la notion de photon. Il a fallu imaginer des procédés plus ingénieux pour cela.

#### i) Expérience d'interférences en lumière atténuée

Une première approche a consisté en la mise en évidence de phénomènes ondulatoires à l'aide de lumière très fortement atténuée, de sorte qu'il n'y ait qu'un photon qui soit contenu dans des systèmes produisant des interférences. L'utilisation de **fentes d'Young**, fente double qui sera étudiée en 2<sup>e</sup> année, permet de mettre en évidence des interférences.

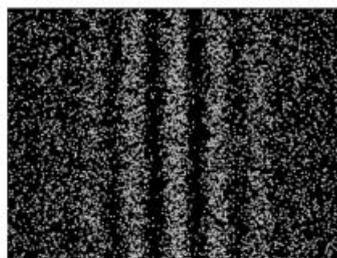


On constate alors qu'en utilisant une source de lumière très atténuée et en mesurant sur une longue période à l'écran à l'aide de capteurs :

- on observe des impacts individuels liés aux photons : ils semblent localisés mais leur position est aléatoire au cours du temps
- les impacts (b) ne sont pas répartis uniformément mais suivent la même forme que ce qui est prévu par la théorie ondulatoire (a)



(a)

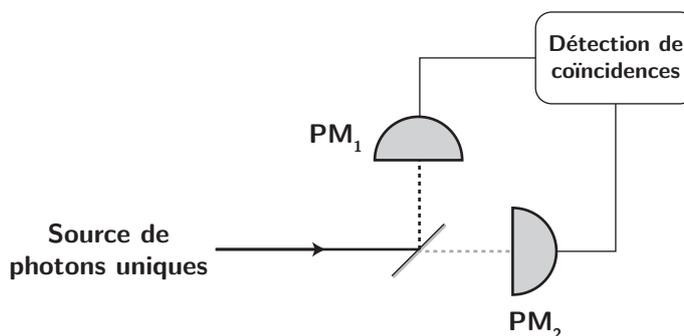


(b)

#### ii) Expériences avec une source de photon unique

En réalité les expériences comme celle qui vient d'être présentée ne suffisent pas complètement à justifier que les photons existent. Des arguments prétendent que seuls les détecteurs, et donc la matière,

ont des propriétés quantiques, en réponse à une onde électromagnétique (lumière). Pour caractériser quantitativement un comportement corpusculaire, il a fallu attendre 1977 avec H. Kimble, M. Dagenais et L. Mandel qui se sont servis d'une vraie source de photons uniques, d'une lame semi-réfléchissante (autant de lumière transmise que réfléchi à son passage) et de deux détecteurs avec un détecteur de coïncidence mesurant le taux moyen où les deux détecteurs mesureraient en même temps un photon.



Il s'est avéré que ce taux de coïncidence était petit devant 1, signifiant que le photon est une entité indivisible. D'autre part, les sources de lumière classique (lampe à incandescence, lampe spectrale) fortement atténuées indiquent qu'il y a de très nombreuses coïncidences (c'est normal, les sources plus classiques possèdent un grand nombre d'émetteurs de photons excités simultanément).

En 1986, A. Aspect et P. Grangier ont réitéré l'expérience avec une autre source de photons uniques, et ont pu observer des interférences à l'aide d'un interféromètre de Michelson, mettant encore en évidence cette **dualité onde-corpuscule** pour la lumière.

### À retenir

La lumière peut être vue à la fois comme une onde de longueur d'onde  $\lambda$  se propageant dans le vide à la célérité  $c$ , et à la fois comme un corpuscule appelé photon, d'énergie  $E = h\nu$  et de quantité de mouvement  $p = h/\lambda$ .

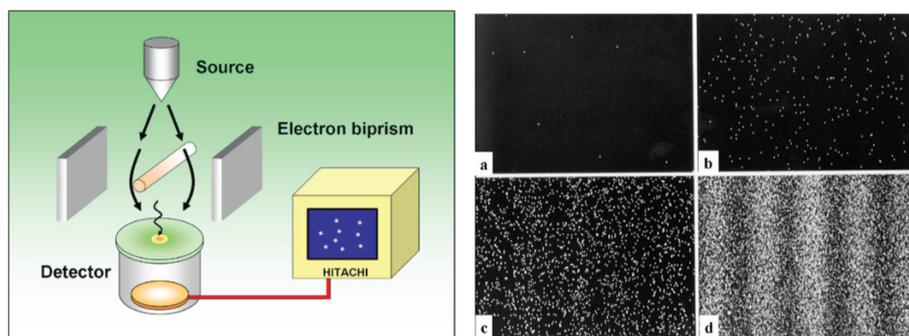
## 1.2 Dualité pour la matière

La matière a été identifiée comme étant constituée de particules indivisibles (protons, neutrons, électrons). Il s'avère cependant que, dans certains cas uniquement, ils se comportent comme une onde. Les expériences qui suivent s'interprètent à l'aide des théories ondulatoires.

### a) Diffraction et interférences avec des neutrons froids

#### i) Expérience

Bien que des expériences plus anciennes ont pu mettre en évidence des phénomènes ondulatoire pour la matière, celle qui va être présentée semble plus éclairante et souligne surtout le parallèle qui peut être fait avec les photons des expériences précédentes.



On envoie des électrons ayant une vitesse de l'ordre de  $10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  sur un dispositif équivalent à des fentes d'Young composé de trois électrodes permettant de dévier la trajectoire des électrons. Le débit d'électrons étant faible, un électron à la fois passe dans le dispositif, et les impacts sont observés sur un détecteur fluorescent. La distribution des impacts d'électrons sont semblables à ceux observés pour une onde !

## ii) Interprétation

### Relation de de Broglie

L'idée qu'au eu L. de Broglie est d'associer à la matière une onde dont l'expression de la longueur d'onde est identique à celle du photon

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (9.3)$$

avec  $p$  l'impulsion et  $v$  la vitesse de la particule.

## I.3 Applications et exemples

D'autres expériences d'interférences ont été réalisées avec succès avec :

- des neutrons refroidis à 25 K ayant une vitesse de l'ordre  $200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  qui après passage par une fente simple ou une fente double donnent les mêmes résultats que lors de l'utilisation de rayons X ;
- des atomes froids de Néon ( $T \sim 1 \text{ mK}$ ) ayant une vitesse lors de la chute de l'ordre de  $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
- des molécules beaucoup plus grosses (fullérènes  $C_{60}$  et autres encore plus grosses).

### À retenir

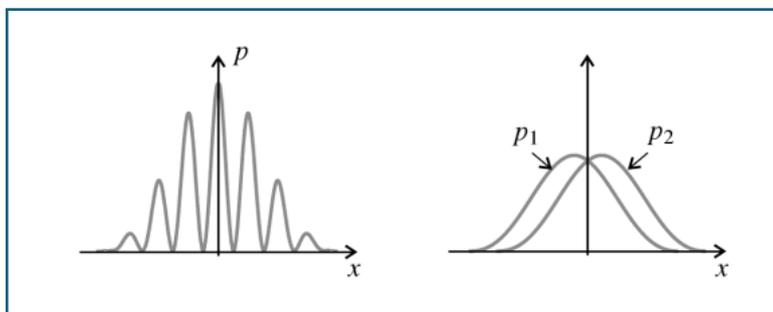
De la matière peut avoir le même comportement ondulatoire que la lumière sous réserve que sa taille ne soit pas limitante pour mener à bien une expérience, et que la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda_{dB} = h/p$  associée à un objet de masse  $m$ , de vitesse  $v$  et de quantité de mouvement  $p = mv$ , permette dans le cas d'une onde d'observer un effet ondulatoire.

En conclusion, que ce soit pour la lumière comme pour la matière, on doit donc à la fois considérer un aspect corpusculaire ET ondulatoire. Ces deux éléments sont **indissociables**.

## II. Approche probabiliste et fonction d'onde

### II.1 Interprétation probabiliste de l'expérience des fentes d'Young

Revenons à l'expérience des électrons : on constate expérimentalement que les positions des points d'impact sur l'écran sont **aléatoires**. Cela amène une interprétation probabiliste : appelons  $p(M)$  la probabilité que le neutron interagisse avec le détecteur à un point  $M$  de l'écran lorsqu'il traverse l'ensemble des deux fentes,  $p_1(M)$  lorsqu'il traverse la fente de gauche,  $p_2(M)$  celle de droite.



**Figure 9.1** – Probabilité de détecter un électron à travers l'ensemble des fentes (gauche), et probabilité de rencontrer une seule fente 1 ou 2 (resp.  $p_1$  et  $p_2$ ).

Toujours d'un point de vue probabiliste, les deux événements « l'électron passe dans la fente de gauche » et « ... de droite » sont indépendants et l'on s'attend à  $p(M) = p_1(M) + p_2(M)$ , mais il n'en est rien comme l'illustre le graphique précédent.

## II.2 Postulat de la fonction d'onde

En réalité, ce que l'on doit sommer lorsqu'on autorise le passage des neutrons dans les deux fentes n'est pas la probabilité de détection en  $M$  mais plutôt une "onde de probabilité" de trouver la particule : on l'appelle **fonction d'onde**.

### Définition de la fonction d'onde

On associe à une particule quantique une **fonction d'onde**  $\Psi(M, t)$  fonction du point  $M$  à l'instant  $t$  telle que :

- $\Psi(M, t) \in \mathbb{C}$
- $\Psi(M, t)$  est **continue** en tout point de l'espace et du temps
- la probabilité élémentaire de trouver la particule dans un volume infinitésimal  $d\tau$  de l'espace autour du point  $M$  est

\*

$$\delta P = |\Psi(M, t)|^2 d\tau \quad (9.4)$$

la quantité  $|\Psi(M, t)|^2$  est alors une **densité de probabilité de présence** de la particule en  $M$  à  $t$ .

- la probabilité de mesurer la particule dans tout l'espace vaut nécessairement 1 :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta P = \int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(M, t)|^2 d\tau = 1$$

L'équation de Schrödinger s'écrit « simplement »

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi$$

avec  $H$  appelé l'Hamiltonien du système.

Même si l'apport de cette fonction d'onde ne peut apparaître que lorsqu'on étudie l'équation de Schrödinger qui prédit **l'évolution** de cette fonction, cela nous permet déjà d'apporter une lumière nouvelle à l'expérience d'interférences.

## II.3 Interprétation à l'aide de la fonction d'onde

Notons maintenant  $\Psi_1(M, t)$  la fonction d'onde associée à un électron passant dans la fente de gauche et  $\Psi_2(M, t)$  pour la fente de droite, la superposition donne alors

$$\Psi(M, t) = \Psi_1(M, t) + \Psi_2(M, t) \quad (9.5)$$

tandis que la probabilité de détection de la particule au point  $M$  à l'instant  $t$  va être proportionnelle à

$$|\Psi|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \Psi_1 \overline{\Psi_2} + \overline{\Psi_1} \Psi_2 \quad (9.6)$$

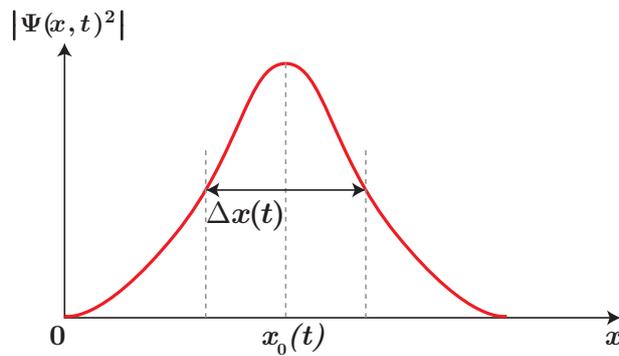
où le terme  $\Psi_1 \overline{\Psi_2} + \overline{\Psi_1} \Psi_2$  est à l'origine des interférences !

Remarquons enfin, sans entrer dans les détails, que les théories de la mécanique quantique montrent l'influence de la mesure physique sur les propriétés quantiques : si on arrive à connaître avec précision par où est passé l'électron, on interagit avec lui et les phénomènes d'interférences disparaissent !

## III. Inégalités de Heisenberg

### III.1 Indétermination quantique sur la position

D'après la définition de la fonction d'onde, il est intéressant de regarder et interpréter l'allure de la fonction  $|\Psi^2(M, t)|$ . Pour simplifier les choses, fixons le temps et plaçons-nous à une dimension.



Ci-dessus est représenté un exemple de profil rencontré. Concrètement, cela signifie que la position la plus probable est  $x_0(t)$  représentant le maximum de la fonction, mais qu'une mesure peut donner d'autres valeurs réparties sur une largeur typique notée  $\Delta x(t)$  (un écart-type en quelque sorte) et appelée **indétermination quantique** sur  $x$ .



Cette quantité  $\Delta x$  n'a rien à voir avec l'incertitude expérimentale de mesure de la position dans la mesure où elle est indépendante de l'instrument de mesure et du protocole suivi. Par exemple dans l'expérience d'interférence d'électrons, l'incertitude de mesure correspond à la taille d'un point à l'écran tandis que  $\Delta x$  est au moins aussi grande que la largeur du champ visible.

## III.2 Principe d'indétermination de Heisenberg

### Propriété

Les mesures de position  $x$  et de quantité de mouvement  $p_x$  selon le même axe ( $Ox$ ) sont affectés d'indéterminations quantiques  $\Delta x$  et  $\Delta p_x$  dont le produit est au moins de l'ordre de grandeur de  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  (constante de Planck réduite)

\*

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (9.7)$$

On prend généralement pour convention que si la particule est quantique, on vérifie  $\Delta x \Delta p_x \sim \hbar$

On peut imaginer des expériences permettant de mesurer la quantité de mouvement d'un électron, dont on connaît avec précision la position, avec un laser mais alors le processus de mesure va venir modifier la valeur recherchée (visualisez un choc entre photon et électron comme des boules de billard).

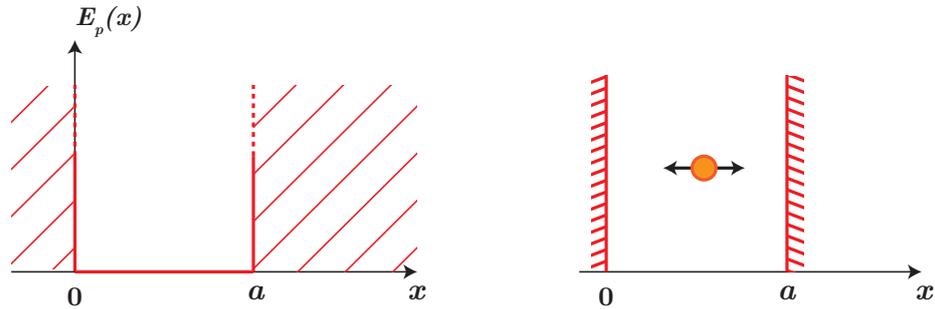
Il apparaît donc impossible de connaître de manière conjointe à la fois la position et la quantité de mouvement, et il nous faut abandonner, à l'échelle **microscopique** le déterminisme de la mécanique classique qui veut connaître en tout temps la trajectoire d'un point (position ET vitesse)...

## III.3 Diffraction d'une particule par une fente

Cf approche documentaire. On peut conclure que l'on retrouve, à l'aide du principe d'incertitude d'Heisenberg la formule de la diffraction  $\Delta\theta \sim \lambda_0/a$  avec  $a$  la taille de la fente.

## IV. Quantification de l'énergie d'une particule confinée à 1D

Un électron autour d'un noyau semble astreint à être dans une zone confinée de l'espace. Nous allons voir schématiquement que confiner une particule conduit à la **quantification de son énergie**.



On va modéliser la situation de la manière suivante : on considère une particule libre, astreinte à se déplacer selon l'axe ( $Ox$ ) uniquement dans une zone de l'espace comprise entre 0 et  $a$  (on parle généralement de puits infini à une dimension). La fonction d'onde associée à cette particule est, d'après ce qu'on a vu en physique ondulatoire, une onde stationnaire. D'autre part, la probabilité de présence de la particule est nulle en  $x = 0$  et  $x = a$ , ce qui signifie que la fonction d'onde doit s'y annuler, d'après sa signification physique. Donc la largeur du puits est nécessairement un demi-entier de la longueur d'onde de de Broglie

\*

$$a = \frac{n\lambda_{dB}}{2} \quad (9.8)$$

L'énergie associée à la particule n'est autre que son énergie cinétique (particule libre, donc pas d'interactions), soit alors

$$E = E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\left(\frac{h}{\lambda_{dB}}\right)^2}{2m} = n^2 \frac{h^2}{8ma^2} \quad (9.9)$$

### Quantification de l'énergie

De manière générale, toute particule confinée voit son énergie prendre des valeurs quantifiées : le système possède alors des **niveaux d'énergie**.

Dans le cas d'une particule libre piégée à 1D dans un espace de largeur  $a$ , l'énergie prend la forme suivante :

$$E = n^2 \frac{h^2}{8ma^2} = n^2 E_0 \quad (9.10)$$

\*

avec  $E_0 = 13,6 \text{ eV}$  dans le cas d'un électron autour de l'atome d'hydrogène.

Dans le cas d'un atome, les électrons ne sont pas libres, car subissant l'interaction coulombienne, et l'énergie prend la forme

$$E = -\frac{E_0}{n^2} \quad (9.11)$$

## 9.1 Rayonnement lumineux

Au niveau du sol, on estime que la puissance du Soleil reçue par la Terre est de  $500 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ .

1. Quelle sera la puissance reçue par un œil s'il regarde le Soleil pendant 1s au travers d'un filtre ne laissant passer que  $10^{-3}\%$  de l'énergie. La pupille a un diamètre  $D \simeq 2 \text{ mm}$
2. Estimer alors l'ordre de grandeur du nombre de photons reçus.

- 
1. En notant  $S = \pi D^2/4$  la surface de la pupille,  $P_S = 500 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$  et  $p = 10^{-3}\%$  le pourcentage d'énergie que laisse passer le filtre, la puissance réellement reçue par l'œil s'écrit

$$P_{\text{reçue}} = P_S S * p = 500 \times \pi \times (10^{-3})^2 \times 10^{-5} = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ W} \quad (9.12)$$

2. En notant  $\Delta t$  le temps d'exposition,  $E = \frac{hc}{\lambda} = 3,3 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  l'énergie d'un photon, de longueur d'onde moyenne  $\lambda = 600 \text{ nm}$ , le nombre de photons reçus par l'œil pendant  $\Delta t$  vaut :

$$N = \frac{P\Delta t}{E} = 5 \cdot 10^{10} \quad (9.13)$$

soit près de 50 milliards de photons !

## 9.2 Microscopie électronique

Dans un microscope électronique, des électrons sont accélérés grâce à une forte tension électrique de l'ordre de 50 kV, ce qui leur procure une énergie cinétique de 50 keV.

1. Sachant que l'énergie apportée par la tension électrique est  $E = eU$  où  $e$  est la charge élémentaire et  $U$  la tension, calculer la vitesse d'un électron, puis son impulsion, sachant que l'énergie apportée est intégralement convertie en énergie cinétique.
2. Quelle est sa longueur d'onde associée ?
3. En déduire l'avantage majeur du microscope électronique par rapport au microscope optique.

Données :  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ; la masse de l'électron vaut  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

- 
1. On peut donc écrire que

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = eU \quad \text{donc} \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 1,3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \quad (9.14)$$

Au vu de cette vitesse importante, il faudrait en réalité utiliser les lois de la relativité restreinte !

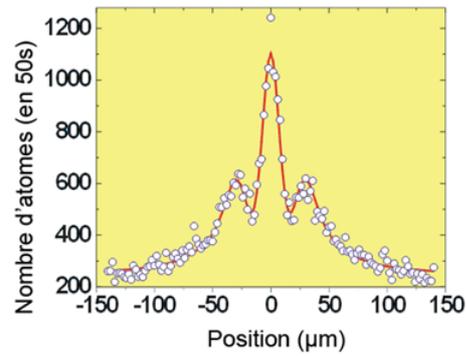
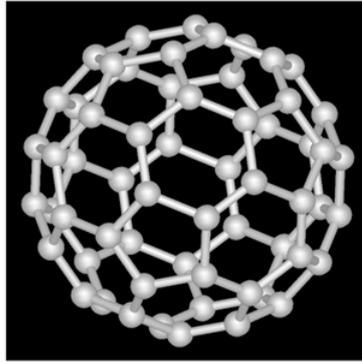
puis  $p = mv = 1,2 \cdot 10^{-22} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

2. En utilisant la relation de de Broglie pour une particule de matière, on a donc  $\lambda = \frac{h}{p} = 5,5 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 5,5 \text{ pm}$ .
3. On peut se souvenir que le microscope optique, comme de nombreux systèmes optiques, est limité du fait du phénomène de diffraction. Le fait d'abaisser grandement la longueur d'onde par rapport à celle de la lumière visible implique de pouvoir observer des objets à une échelle bien plus petite que pour un microscope optique.

## 9.3 Interférences avec des fullérènes

Dans les années 2000, une expérience d'interférences à l'aide de molécules de fullérènes  $C_{60}$  (de taille  $d \sim 1000 \text{ pm}$ ) a été réalisée avec succès. Ces molécules sont envoyées sur deux fentes de largeur  $55 \text{ nm}$  et espacées de  $d = 100 \text{ nm}$  avec une vitesse d'environ  $200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . L'observation est faite à une distance  $L = 1,25 \text{ m}$ .

1. Déterminer la longueur d'onde associée aux molécules de fullérènes.
2. Que dire par rapport à la taille de la fente ?
3. Sachant que la distance entre deux pics d'interférences est de l'ordre de  $\frac{\lambda L}{d}$ , la mesure vous semble-t-elle correcte ?



1. Par l'application de la relation de de Broglie  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ . On détermine la masse d'une molécule de fullérènes :

$$m_{\text{full}} = 60m_c = 60 \frac{M(\text{C})}{N_A} = 1,2 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \quad (9.15)$$

(on peut aussi écrire  $60 \times 12 \times m_{\text{nucléon}}$ ). Ainsi numériquement  $\lambda = 2,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ .

2. La longueur d'onde est ainsi beaucoup plus petites que la taille d'une fente ou de l'espacement entre les deux fentes. Cela étant, les expériences conduites avec les lasers sont souvent équivalentes (il y a souvent un facteur de près de 100 entre la longueur d'onde et la taille de fentes...). Mais on ne s'attend pas à avoir des phénomènes ondulatoires très marqués.
3. En exploitant le graphique, où l'on observe une frange centrale et deux fentes latérales, on a donc la distance entre deux pics d'interférence qui vaut  $60 \mu\text{m}/2 = 30 \mu\text{m}$ . En calculant  $\frac{\lambda L}{d}$ , on trouve  $3,5 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 35 \mu\text{m}$ , ce qui est cohérent !

## 9.4 Inégalité de Heisenberg

1. Quelle est l'indétermination quantique minimale sur la vitesse d'un adénovirus dont la masse est égale à  $2,4 \cdot 10^{-16} \text{ g}$  et dont la position est connue à 10 nm près (soit un dixième de sa taille) ?
2. Un radar autoroutier flashe une voiture de masse  $m = 1,3 \text{ t}$  roulant à une vitesse de  $150 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . L'éclair du flash dure 0,01 s. Quelle est l'indétermination sur la position de la voiture ? En déduire une minoration sur l'indétermination quantique de la vitesse. Conclusion ?

- 
1. On utilise l'inégalité de Heisenberg, qui implique que  $\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$  d'où l'indétermination sur la vitesse, en divisant par la masse :

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{2\Delta x m} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{4\pi \times 10 \cdot 10^{-9} \times 2,4 \cdot 10^{-19}} = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (9.16)$$

c'est-à-dire une indétermination particulièrement négligeable devant nos incertitudes de mesure de la vitesse d'un tel objet.

2. On pourrait considérer que l'indétermination sur la position correspond à la distance parcourue entre le début et à la fin du flash par le camion, soit

$$\Delta x = v\Delta t = \frac{150}{3,6} \times 0,01 = 0,42 \text{ m}$$

Ainsi l'indétermination quantique sur la vitesse est donnée par la même formule que précédemment, et on trouve sans surprise une valeur extrêmement faible de  $9,6 \cdot 10^{-38} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ouf, la mécanique quantique ne vient pas perturber la mesure des excès de vitesse !

## 9.5 Fonction d'onde d'une particule dans un puits infini

Une particule quantique est confinée dans la zone comprise entre les plans  $x = 0$  et  $x = \ell$  dans un puits infini. On admet que sa fonction d'onde est de la forme :

$$\Psi(x, t) = A \sin(kx) \exp(-i\omega t) \quad (9.17)$$

où  $A$ ,  $k$  et  $\omega$  sont des constantes réelles positives.

1. Déterminer les valeurs possibles de  $k$  en fonction de  $\ell$  et d'un entier  $n$  quelconque.

2. D'après l'interprétation physique de la fonction d'onde, justifier la condition dite de normalisation  $\int_0^\ell |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$ .
1. L'utiliser pour trouver l'expression de  $A$  en fonction de  $\ell$ .
3. Tracer  $|\Psi(x, t)|^2$  en fonction de  $x$  dans les cas  $n = 1$  et  $n = 2$ . Commenter. Comparer aussi au cas d'une particule classique.