

# Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

## Sommaire

<b>6.1 Généralités sur les mouvements dans un champ de force centrale conservatif .</b>	<b>3</b>
6.1.1 Champ de force centrale . . . . .	3
6.1.2 Caractéristiques du mouvement . . . . .	3
6.1.3 Énergie potentielle effective et étude des trajectoires . . . . .	5
<b>6.2 Cas du champ gravitationnel . . . . .</b>	<b>6</b>
6.2.1 Lois de Képler . . . . .	6
6.2.2 Cas du mouvement circulaire . . . . .	7
6.2.3 Cas des satellites . . . . .	8

### Questions de cours :

- Mouvement à champ de force centrale : propriété de la force, moment cinétique et justification que le mouvement est plan.
- Démontrer la loi des aires et l'interpréter sur l'exemple d'un mouvement elliptique.
- Dans le cas d'un champ de force newtonien d'énergie potentielle  $E_p = -\frac{K}{r}$ , montrer l'expression de l'énergie potentielle effective et caractériser les différents types de mouvements dans le cas d'une interaction purement attractive.
- Étudier le mouvement circulaire dans le cadre d'une interaction gravitationnelle : vitesse, période et énergie mécanique.
- Satellite : démontrer les deux vitesses cosmiques et en donner l'ordre de grandeur sur Terre. On donne  $M_T = 6 \cdot 10^{24}$  kg et  $R_T = 6400$  km.
- Cas du satellite géostationnaire : conditions à respecter et démonstration de la hauteur d'un satellite géostationnaire autour de la Terre. On donne  $M_T = 6 \cdot 10^{24}$  kg et  $R_T = 6400$  km.

### Capacités exigibles du BO :

- Dédire de la loi du moment cinétique la conservation du moment cinétique.
- Connaître les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
- Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.
- Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné à la valeur de l'énergie mécanique.
- Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
- Montrer que le mouvement circulaire est uniforme et savoir calculer sa période.
- Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire.
- Calculer l'altitude du satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.
- Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.
- Exprimer les vitesses cosmiques et connaître leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.

### Expériences :

-



Ce chapitre va permettre de décrire assez simplement des mouvements spécifiques mais que l'on rencontre malgré tout couramment : les mouvements dans un champ de force centrale conservatif. Ils sont au cœur de la dynamique céleste, et a également servi de base à l'étude du mouvement des électrons autour du noyau. Ce chapitre ne se veut pas trop calculatoire, le but étant surtout de déterminer le type de mouvement, extraire quelques informations quantitatives à partir de raisonnements énergétiques. Nous raisonnerons principalement en considérant que les systèmes sont des points matériels, situation licite si on ne s'intéresse qu'au mouvement du centre de gravité (et pas d'éventuelle rotation propre).

## I. Généralités sur les mouvements dans un champ de force centrale conservatif

### I.1 Champ de force centrale

#### Définition

On dit d'une force qu'elle est centrale de centre  $O$  si quelle que soit la position du point  $M$  dans l'espace, la droite d'action de la force en  $M$  passe constamment par  $O$ . Les coordonnées sphériques étant adaptées, on aura ainsi

$$* \quad \vec{F}(M) = f_r(r)\vec{e}_r \quad (6.1)$$

en supposant une invariance de la situation physique par rotation d'angle  $\theta$  ou  $\varphi$ .

Si elle est de plus conservative, on peut définir une énergie potentielle ne dépendant que de  $r$  vérifiant  $\frac{dE_p}{dr} = -f_r(r)$ .

Rappelons deux forces parmi les plus courantes :

- la force gravitationnelle attractive exercée par la masse  $m_1$  fixe située en  $O$  sur une masse  $m_2$  située en  $M$  vérifiant  $\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$  en coordonnées sphériques, dérivant de l'énergie potentielle  $E_p(r) = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{r}$  ;
- la force coulombienne attractive ou répulsive exercée par une charge fixe  $q_1$  située en  $O$  sur une charge  $q_2$  située en  $M$  vérifiant  $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$  en coordonnées sphériques, dérivant de l'énergie potentielle  $E_p(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$

\* On parle de **forces newtoniennes**, car elles se mettent sous la forme  $\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$  avec  $E_p(r) = -\frac{K}{r}$ .

### I.2 Caractéristiques du mouvement

#### a) Conservation du moment cinétique

Si un point matériel n'est soumis qu'à une force centrale de centre  $O$ , le moment cinétique est une constante du mouvement :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad (6.2)$$

\* car  $\vec{OM}$  est colinéaire à  $\vec{F}$ . Ainsi l'application de la loi du moment cinétique au point  $M$  dans un référentiel galiléen conduit à

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{0} \iff \vec{L}_O(M) = \vec{cste} \quad (6.3)$$

#### b) Mouvement plan

Notons  $\vec{OM}_0$  le vecteur position initial,  $\vec{v}_0$  la vitesse en ce point, alors le plan  $(\mathcal{P})$  défini par  $(O, \vec{OM}_0, \vec{v}_0)$  est perpendiculaire à  $\vec{L}_O(M_0)$ , par définition du moment cinétique.

Pour toute position ultérieure  $M$  du point matériel,  $\vec{L}_O(M) = \vec{L}_O(M_0)$  vu que le vecteur est constant au cours du temps. Donc  $\vec{OM}$  est par définition du moment cinétique perpendiculaire à

$\vec{L}_O(M_0)$  et donc contenu dans le plan ( $\mathcal{P}$ ) : le **mouvement est plan**.

On peut donc utiliser les coordonnées polaires de centre  $O$ , et réécrire le moment cinétique :

$$\vec{L}_O(M) = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z \quad (6.4)$$

### c) Loi des aires

Comme le moment cinétique ainsi que la masse sont constants, on introduit une constante :

#### Constante des aires

La **constante des aires**  $C$  est définie par

$$* \quad C = \frac{\|\vec{L}_O\|}{m} = r^2\dot{\theta} = \text{cste} \quad (6.5)$$

Cela signifie que pour un mouvement à force centrale, distance et vitesse angulaire sont toujours reliés à cette constante (dépendant des conditions initiales).

On va en donner une interprétation en calculant la **vitesse aréolaire**, correspondant à la vitesse  $\mathcal{V}$  à laquelle le vecteur position balaye une aire  $dA$  pendant  $dt$ , soit  $\mathcal{V} = \frac{dA}{dt}$  :

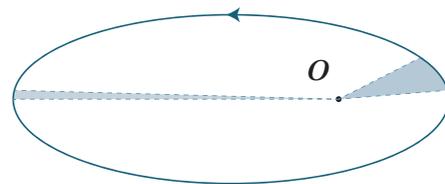
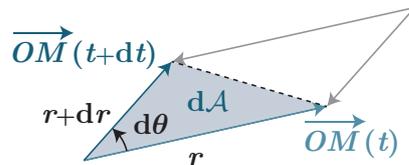


#### Démonstration

En se plaçant sur un intervalle de temps  $dt$ , l'aire balayée correspond à la moitié du parallélogramme formé par les vecteurs  $\vec{OM}(t)$  et  $\vec{OM}(t+dt)$ , soit  $dA = \frac{1}{2} \|\vec{OM}(t) \wedge \vec{OM}(t+dt)\|$ . En posant  $\vec{OM}(t+dt) = \vec{OM}(t) + d\vec{r}$ , avec  $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta$  :

$$dA = \frac{1}{2} \|(r\vec{e}_r) \wedge (r\vec{e}_r + dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta)\| = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (6.6)$$

\* Ainsi  $\mathcal{V} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} C$ . Cette vitesse est donc une constante.



#### Loi des aires

L'aire balayée par le vecteur position est la même au cours du temps pour un mouvement à force centrale conservatif :

$$\mathcal{V} = \frac{C}{2} \quad (6.7)$$

avec  $C$  la constante des aires.

\* Une conséquence est illustrée sur une trajectoire elliptique ci-dessus : on peut estimer que la vitesse proche du point  $O$  est plus élevée que celle à l'opposée car la distance à parcourir pendant le même temps est plus grande.

## I.3 Énergie potentielle effective et étude des trajectoires

### a) Énergie potentielle effective

Le système étudié, soumis à une force centrale conservatrice, est donc par nature conservatif, c'est-à-dire que l'énergie mécanique est conservée. Exprimons-la pour n'importe quelle position, dans le cas d'un champ newtonien d'énergie potentielle  $E_p(r) = -\frac{K}{r}$  :

$$* \quad E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{K}{r} \quad (6.8)$$

L'énergie mécanique dépend de deux variables  $r$  et  $\theta$ , cependant on peut se ramener à la seule variable  $r$  via la constante des aires :  $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ .

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{C}{r^2}\right)^2 - \frac{K}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r}\right) \quad (6.9)$$

où l'on introduit une **énergie potentielle effective**  $E_{p,\text{eff}}$  vérifiant

$$* \quad E_{p,\text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r} \quad (6.10)$$

prenant en compte l'énergie cinétique de rotation et l'énergie potentielle associée à la force conservative, et ne dépendant que de la position radiale : on peut alors conduire des raisonnements graphiques.

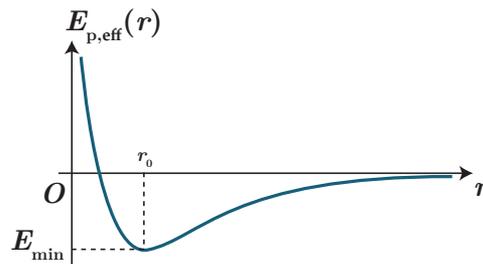
### b) Différents types de mouvements

On va se concentrer dans un premier temps sur le cas de l'attraction gravitationnelle, car il s'agit d'une force exclusivement attractive, avec  $K > 0$ .

Les interactions coulombiennes pouvant être répulsives, on peut avoir  $K < 0$

#### Exercice

Déterminer l'allure du graphe d'énergie potentielle effective ainsi que la position du minimum d'énergie potentielle effective  $r_0$ , et l'énergie minimale associée  $E_{\min}$ . Traçons l'énergie potentielle effective en fonction de  $r$  :



Elle possède un minimum en  $r = r_0$  tel que :

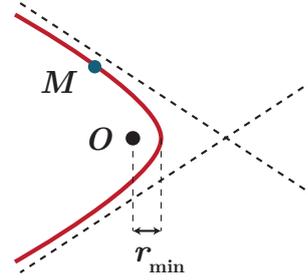
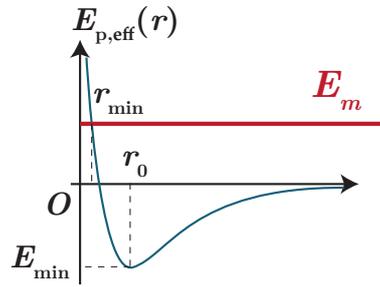
$$\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr}(r = r_0) = 0 = -m\frac{C^2}{r_0^3} + \frac{K}{r_0^2} = 0 \Leftrightarrow r_0 = \frac{mC^2}{K} \quad (6.11)$$

où l'énergie potentielle vaut alors

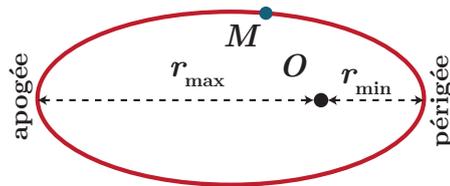
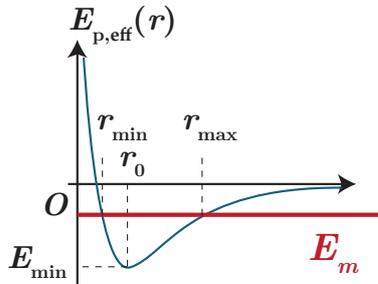
$$E_{\min} = \frac{K}{r_0} \left( \frac{mC^2}{2Kr_0} - 1 \right) = \boxed{-\frac{K}{2r_0}} = -\frac{K^2}{2mC^2} \quad (6.12)$$

Pour être parfaitement précis, le système étudié exerce également une force sur la masse centrée en  $O$ , et en réalité les deux objets sont en rotation, autour du barycentre des masses. En général, vu le rapport de masse, on peut confondre le barycentre avec  $O$ , mais ce n'est pas toujours vrai.

- On distingue alors plusieurs trajectoires possibles selon la valeur de l'énergie mécanique :
- \* si  $E_m > 0$  (typiquement le cas pour des astéroïdes ou des comètes), on a un état de diffusion, caractérisé par une **trajectoire hyperbolique** dont  $O$  est le foyer le plus proche de la courbe et dont l'énergie mécanique permet de connaître la distance minimale d'approche ;

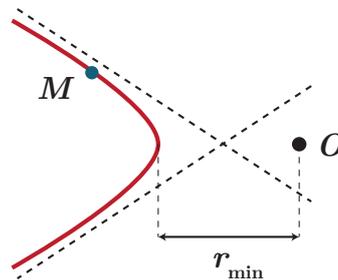
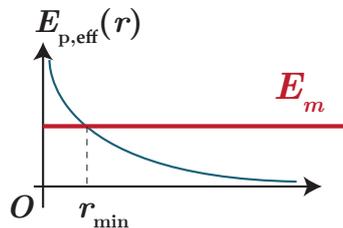


- \* si  $E_m = 0$ , on a également un état de diffusion, et une **trajectoire parabolique** (cas limite) ;
- \* si  $E_{\min} < E_m < 0$ , on a une **trajectoire elliptique**, et on obtient également à l'aide de l'intersection  $E_m = E_{p,\text{eff}}$  la distance minimale  $r_{\min}$  (périgée) et maximale  $r_{\max}$  (apogée) du point matériel par rapport au centre de force, et on note  $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$  le **demi-grand axe** de l'ellipse ;



- \* si enfin  $E_m = E_{\min}$ , une seule valeur de  $r$  est possible,  $r_0$ , correspondant au cas d'une **trajectoire circulaire**. En effet, cela impose  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = 0$ , c'est-à-dire  $\dot{r} = 0$  et donc un mouvement circulaire uniforme étant donné que  $r^2\dot{\theta} = \text{cste}$ .

Dans le cas d'interactions répulsives, la courbe d'énergie potentielle effective ne passe jamais par un minimum, elle est monotone décroissante. Le système se trouve constamment dans un état de diffusion, donc la trajectoire est une branche d'hyperbole dont le centre de force occupe le foyer le plus éloigné



Imaginez un électron s'approchant d'un autre, il ne va pas lui tourner autour ! Donc il passe au plus loin

## II. Cas du champ gravitationnel

Dans la suite, on va s'intéresser exclusivement au champ gravitationnel, et étudier plus particulièrement le mouvement circulaire : on peut très souvent approximer la trajectoire à un cercle dès lors qu'on étudie des exemples simples comme un satellite autour d'une planète.

### II.1 Lois de Képler

Au début du XVIIe siècle, Kepler énonça, à partir d'observations astronomiques, trois lois portant son nom et régissant le mouvement des planètes autour du Soleil :

### Lois de Képler

- Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont un foyer est occupé par le Soleil ;
- l'aire balayée par le segment liant le centre du Soleil au centre d'une planète pendant une durée donnée est constante (loi des aires) ;
- la période de révolution  $T$  d'une planète autour du Soleil de masse  $M_S$  est liée au demi-grand axe  $a$  de sa trajectoire elliptique par

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \quad (6.13)$$

Les deux premières lois sont liées directement aux propriétés vues précédemment, on peut également en conclure que l'énergie mécanique d'une planète n'est donc pas égale à l'énergie potentielle effective minimale, vu que la trajectoire est elliptique.

À noter également que ces lois sont transposables à un satellite en rotation autour d'une planète, en considérant que la planète est un des foyers de l'ellipse, et en remplaçant  $M_S$  par la masse de la planète.

## II.2 Cas du mouvement circulaire

### a) Vitesse et période

Dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon  $r = r_0$ , il est nécessairement uniforme via  $r_0^2\dot{\theta} = \text{cste}$ . Ainsi

$$\vec{a} = -r_0\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{r_0}\vec{e}_r \quad (6.14)$$

puis en appliquant la loi de la quantité de mouvement au système de masse  $M$  en rotation autour d'un astre de masse  $M_A$  situé en  $O$  :

$$* \quad M\vec{a} = -\frac{GM_A M}{r_0^2}\vec{e}_r \quad (6.15)$$

soit en projection selon  $\vec{e}_r$

$$-M\frac{v^2}{r_0} = -\frac{GM_A M}{r_0^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_A}{r_0}} \quad (6.16)$$

On peut alors en déduire la période de révolution :

$$* \quad T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{\frac{GM_A}{r_0}}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r_0^3}{GM_A} \quad (6.17)$$

conduisant à la troisième loi de Kepler

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_A} \quad (6.18)$$

De manière générale, cette loi reste valable même avec une trajectoire elliptique, à ceci près qu'il faut remplacer le rayon  $r_0$  par le demi-grand axe  $a$ .

## b) Aspects énergétiques

On peut dans ce même cadre calculer l'énergie mécanique du système, dont on sait qu'il s'agit d'une constante.

- l'énergie cinétique vaut :  $E_c = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M \frac{GM_A}{r_0} = \frac{1}{2} \frac{GMM_A}{r_0}$  ;
- \* ▪ l'énergie potentielle vaut :  $E_p = -\frac{GMM_A}{r_0}$  ;
- l'énergie mécanique vaut alors  $E_m = E_c + E_p = -\frac{GMM_A}{2r_0}$  (correspondant au minimum de la courbe d'énergie potentielle effective).

### Énergie mécanique d'un satellite ou d'une planète

L'énergie mécanique d'un objet de masse  $M$  en rotation circulaire uniforme de rayon  $r_0$  autour d'un astre de masse  $M_A$  s'écrit

$$E_m = -\frac{GMM_A}{2r_0} = \text{cste} \quad (6.19)$$

- \* On peut généraliser aux trajectoires elliptiques :

$$E_m = -\frac{GMM_A}{2a} \quad (6.20)$$

avec  $a$  le demi-grand axe.

## II.3 Cas des satellites

### a) Vitesses cosmiques

Les satellites sont en général lancés de sorte à suivre une **trajectoire circulaire**. Dès lors, on peut utiliser les résultats précédents pour calculer leur période, leur vitesse, dès que l'on s'est fixé un rayon pour la trajectoire autour de la planète.

Demandons-nous quelle vitesse minimale doit avoir le satellite pour qu'il puisse être en orbite circulaire au niveau du sol, appelée **première vitesse cosmique** (en réalité, du fait de l'atmosphère c'est

$$R_T = 6400 \text{ km et } M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

évidemment impossible). Il suffit que

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = 7,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

- \* On parle également de **vitesse de libération** (ou **deuxième vitesse cosmique**), la vitesse nécessaire à communiquer au satellite de masse  $m$  pour qu'il s'éloigne indéfiniment de l'attraction de l'astre, toujours sans prendre en compte d'éventuels frottements : on est alors dans le cas d'un mouvement de diffusion, et l'énergie mécanique doit être au minimum nulle (cf. étude précédente à l'aide de l'énergie potentielle effective) :

$$E_m = 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM_T}{R_T} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 40000 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \quad (6.21)$$

Dans les faits, plusieurs éléments sont à prendre en considération :

- l'accélération est en réalité progressive pour le lancement d'un satellite ;
- le satellite possède une vitesse initiale due à la rotation propre de la planète, d'autant plus importante qu'elle est éloignée de l'axe de rotation : c'est pourquoi il est préférable d'effectuer le lancement proche de l'équateur (Kourou !)

## b) Satellites géostationnaires

Signalons enfin le cas d'un satellite géostationnaire qui, de par sa définition, est un satellite qui est constamment au-dessus du même point de la surface terrestre. Pour ce faire, il doit réunir plusieurs conditions :

- **sa vitesse angulaire doit être identique à celle de rotation propre de la Terre**, ainsi  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  avec  $T$  la période de rotation propre de la planète, appelée **jour sidéral** (durée nécessaire à la planète pour faire un tour sur elle-même) et valant pour la Terre  $T = 86168$  s ;
- **l'orbite doit être circulaire** : conséquence de la condition précédente, si la vitesse angulaire est constante, d'après la constante des aires le rayon doit rester constant !
- **sa trajectoire doit être située dans le plan de l'équateur**. En effet, on sait que le plan contenant la trajectoire passe nécessairement par le centre d'attraction de la force gravitationnelle d'une part, et d'autre part si la trajectoire était inclinée par rapport au plan de l'équateur, il oscillerait tantôt dans l'hémisphère nord, tantôt dans l'hémisphère sud et n'est donc pas immobile ;

Cela permet ainsi de calculer le rayon de l'orbite géostationnaire, en appliquant la troisième loi de Kepler :

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}} = 42164 \text{ km} \iff h = r - R_T \simeq 36000 \text{ km} \quad (6.22)$$

## 6.1 Vitesse d'un satellite à son périégée

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel  $M$  de masse  $m = 1,1 \text{ t}$ . L'orbite de transfert est elliptique et la distance entre la surface de la Terre et le satellite varie entre  $d_P = 200 \text{ km}$  au périégée, et  $d_A = 35,9 \cdot 10^3 \text{ km}$  à l'apogée. On rappelle que le périégée est le point de l'orbite le plus proche de la Terre et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée  $v_A = 3,5 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

1. Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaître la position  $O$  du centre de la Terre, l'apogée et le périégée.
2. Déterminer le demi-grand axe de la trajectoire, puis en déduire l'énergie mécanique et la période du satellite (sans démonstration).
3. On note  $v_P$  la vitesse du satellite au périégée. Exprimer le module du moment cinétique calculé au point  $O$  du satellite à son périégée et son apogée. En déduire la vitesse à son périégée.

## 6.2 Expérience de Rutherford et taille du noyau

On considère une particule  $\alpha$  de charge  $2e$  envoyée de  $M_0$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  avec  $v_0 \simeq 2 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , sur un noyau d'or ( $Z = 79$ ) fixe au point  $O$  du repère. On appelle  $b$  le paramètre d'impact de la trajectoire, correspondant à la distance séparant le noyau d'or de la droite  $(M_0, \vec{v}_0)$ .

1. Exprimer la force de répulsion coulombienne subie par une particule  $\alpha$ , et démontrer l'expression de l'énergie potentielle.
2. Calculer le moment cinétique en  $O$  de la particule  $\alpha$  lorsqu'elle se trouve très loin du noyau au point  $M_0$ , puis à tout instant en choisissant un système de coordonnées approprié.
3. Exprimer l'énergie mécanique et introduire une énergie potentielle effective. Quelle est la trajectoire attendue ? La représenter qualitativement.
4. En considérant que le paramètre d'impact est quasi-nul, estimer la distance minimale d'approche au noyau de la particule  $\alpha$ , et effectuer l'application numérique. On précise qu'une particule  $\alpha$  possède 4 nucléons.

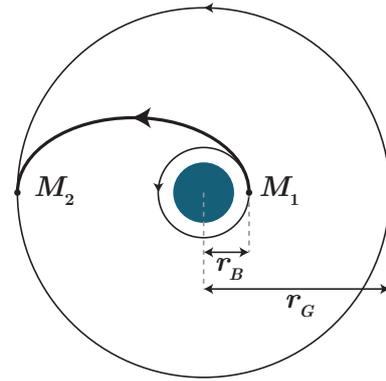
$$\text{Données : } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1}, m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

## 6.3 Lancement d'un satellite terrestre

On veut placer un satellite en orbite géostationnaire autour de la Terre. L'étude est menée dans le référentiel géocentrique dans lequel la Terre est animée d'un mouvement de rotation de période  $T$  autour de son axe.

1. Démontrer l'expression de l'énergie mécanique  $E_{m,B}$  d'un satellite de masse  $m$  en orbite circulaire à basse distance  $r_B$  du centre de la Terre. L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est choisie nulle à l'infini et on admet que la Terre crée un champ analogue à celui d'une masse  $M_T$  occupant son centre fixe.
2. Exprimer l'énergie du satellite  $E_S$  avant son lancement, lorsqu'il est posé à la surface de la Terre et à la latitude  $\lambda$ . Où est-il préférable de procéder au lancement ?
3. L'orbite géostationnaire est celle pour laquelle le satellite reste à la verticale d'un même point de la Terre.
  - (a) Peut-on placer un tel satellite au-dessus d'un point quelconque de la Terre ?
  - (b) Déterminer le rayon  $r_G$  de l'orbite géostationnaire.
  - (c) Calculer l'énergie mécanique  $E_{m,G}$  d'un satellite géostationnaire.

4. Une fois le satellite placé sur son orbite basse, on souhaite le transférer vers l'orbite géostationnaire. Pour cela, on lui communique une impulsion au point  $M_1$ , de sorte qu'il décrit une ellipse dont l'apogée se trouve en  $M_2$  sur l'orbite géostationnaire (ellipse de Hohmann). Une seconde impulsion permet alors de le stabiliser sur cette orbite.



(a) Déterminer l'énergie mécanique  $E_{m,T}$  du satellite sur l'ellipse de transfert. En déduire l'énergie qu'il faut fournir en  $M_1$  puis en  $M_2$  pour réaliser le transfert, et calculer alors l'excédent de vitesse  $\Delta v$  à fournir en chacun des points (en supposant que la poussée s'effectue durant un temps très court devant la période de révolution).

(b) Déterminer la durée du transfert.

5. On utilise enfin les moteurs pour annuler quasiment la vitesse du satellite.

(a) Décrire l'allure de la trajectoire.

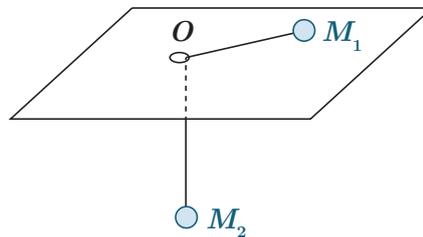
(b) Déterminer la nouvelle valeur de son énergie mécanique. En déduire alors le demi-grand axe de la nouvelle trajectoire.

(c) En déduire une estimation de la durée au bout de laquelle le satellite tombera sur la Terre, en utilisant de nouveau la troisième loi de Kepler.

Données :  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$  kg,  $R_T = 6,38 \cdot 10^3$  km,  $m = 10^3$  kg,  $r_B = 7 \cdot 10^6$  km,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  kg<sup>-1</sup>·m<sup>3</sup>·s<sup>-2</sup>.

## 6.4 Système mécanique à force centrale

Un système mécanique est constitué de deux points matériels reliés par un fil de longueur  $\ell$  constante et de masse négligeable. Le premier point matériel  $M_1$ , de masse  $m_1$ , glisse sans frottement sur un plan horizontal percé d'un trou  $O$ . Le fil est engagé dans le trou, de sorte que le second point  $M_2$  de masse  $m_2$  se déplace verticalement dans le champ de pesanteur terrestre  $g$ . On choisit la longueur  $\ell$  de sorte qu'avec les conditions initiales choisies, aucun des points matériels n'atteigne le point  $O$ .



1. Choisir un système de repérage adapté pour décrire ce système.

2. Exprimer l'énergie mécanique du système et montrer qu'elle peut s'exprimer à partir d'une variable unique. En déduire les équations du mouvement. Commenter.

3. Étudier le profil de potentiel de ce système. Le mouvement du point  $M_1$  est-il libre ou lié ?

4. Justifier si les affirmations suivantes sont justes ou non :

- (a) le mouvement de  $M_2$  est périodique ;
- (b) le mouvement de  $M_1$  vérifie la loi des aires ;
- (c) la trajectoire de  $M_1$  est une ellipse ;
- (d) la trajectoire de  $M_1$  est fermée.

5. Le mouvement de  $M_1$  peut-il être circulaire ? Quelles doivent être, le cas échéant, la vitesse linéaire  $v$  à donner à la bille  $M_1$  pour obtenir un cercle de rayon  $r_0$  ?