–SP7–

Des oscillateurs électriques idéaux, amortis et forcés

Sommaire

7.1 Un oscillateur harmonique : le circuit LC 3
7.1.1 Expérience 3
7.1.2 Équation différentielle 3
7.1.3 Résolution 4
7.1.4 Commentaire : approche énergétique 5
7.2 Oscillateurs amortis 6
7.2.1 Observations expérimentales d'un circuit RLC 6
7.2.2 Mise en équation 7
7.2.3 Résolution 8
7.2.4 Différents régimes de fonctionnement 9
7.3 Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé 11
7.3.1 Observations expérimentales 12
7.3.2 Étude du régime sinusoïdal forcé 13
7.3.3 Résonance de la tension aux bornes d'un condensateur 14
7.4 Utilisation des impédances complexes en régime sinusoïdal forcé 16
7.4.1 Notion d'impédance électrique 16
7.4.2 Retour au cas du circuit RLC série 17
7.4.3 Étude de la résonance en intensité dans le circuit RLC série 18
7.4.4 Passage d'une équation complexe à une équation différentielle 18

Questions de cours :

- Présenter l'oscillateur harmonique sur l'exemple du circuit LC : équation différentielle, pulsation propre, résolution dans le cas d'un condensateur initialement chargé sous une tension E_0.
- Donner la forme canonique d'une équation différentielle d'un oscillateur amorti. En régime pseudo-périodique, établir l'expression de la pseudo-période T et justifier qu'on puisse la confondre avec la période propre de l'oscillateur non amorti en précisant dans quel cadre.
- Après avoir rappelé la solution d'une ED d'un oscillateur amorti en régime pseudo-périodique, la résoudre entièrement avec des conditions initiales au choix du khôlleur.
- Représenter graphiquement les différents régimes de fonctionnement d'un oscillateur amorti soumis à un échelon de tension : on attend la représentation temporelle et le portrait de phase associé.
- Démontrer que dans le cas d'un oscillateur amorti en régime pseudo-périodique, Q est l'ordre de grandeur du nombre de pseudo-périodes observables pendant le régime transitoire.
- Présenter la notation complexe d'un signal physique sinusoïdal (grandeur complexe, amplitude complexe). Préciser quelles opérations mathématiques sur l'amplitude complexe fournissent l'amplitude réelle, la phase. Rappeler enfin l'effet de la dérivation et l'intégration sur les grandeurs complexes.
- En partant de l'expression de l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série $\underline{U}_{c,m} = \dfrac{\omega_0^2 E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}$, établir l'expression de l'amplitude réelle, étudier les cas où la pulsation est soit très inférieure, soit égale, soit très supérieure à la pulsation propre. Enfin établir la condition, sur le facteur de qualité Q, d'existence d'une résonance en tension.
- En partant de l'expression de l'amplitude complexe de l'oscillateur forcé $\underline{U}_{c,m} = \dfrac{\omega_0^2 E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}$, étudier les cas où la pulsation est soit très inférieure, soit égale, soit très supérieure à la pulsation propre et calculer le déphasage associé dans ce cadre, et représenter l'allure du déphasage en fonction de la pulsation pour différentes valeurs de facteur de qualité.
- Définir la notion d'impédance complexe et établir les expressions de l'impédance d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur.
- Calculer le courant complexe dans un circuit RLC série à partir des impédances et établir l'existence d'une résonance et la pulsation de résonance en intensité.

Capacités exigibles du BO :

- Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.
- Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
- Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.
- Prévoir l'évolution du système en utilisant un portrait de phase fourni.
- Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
- Connaître la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.
- Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.
- Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique.
- Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
- Utiliser la méthode des complexes pour étudier le régime forcé.
- À l'aide d'un outil de résolution numérique, mettre en évidence le rôle du facteur de qualité pour l'étude de la résonance en élongation.
- Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité.
- Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

Manipulations de cours :

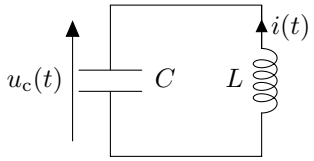
- Circuit RLC série ;

On a considéré dans les chapitres précédents des circuits électriques ne comportant que des condensateurs et/ou des bobines, mais jamais les deux composants au sein d'une seule maille. Des comportements nouveaux vont être observés lorsque les utilise conjointement. On étudiera deux cas limites : le cas idéal où l'absence de dissipation conduit à un oscillateur harmonique et le cas réel tenant compte de la dissipation, où différents comportements pourront être observés. Dans un deuxième temps, nous étudierons l'usage de signaux sinusoïdaux pour mettre en évidence le phénomène de résonance.

I. Un oscillateur harmonique : le circuit LC

I.1 Expérience

On étudie le circuit suivant constitué de l'association série d'un condensateur de capacité $C = 100\,\text{nF}$ et d'une bobine d'inductance $L = 150\,\text{mH}$. Par un dispositif non décrit ici, on a initialement chargé le condensateur sous une tension $E_0 = 1\,\text{V}$ et on mesure la tension aux bornes du condensateur, et l'intensité traversant les composants. À $t = 0$, on relie le condensateur à la bobine.



On observe alors les résultats suivants :

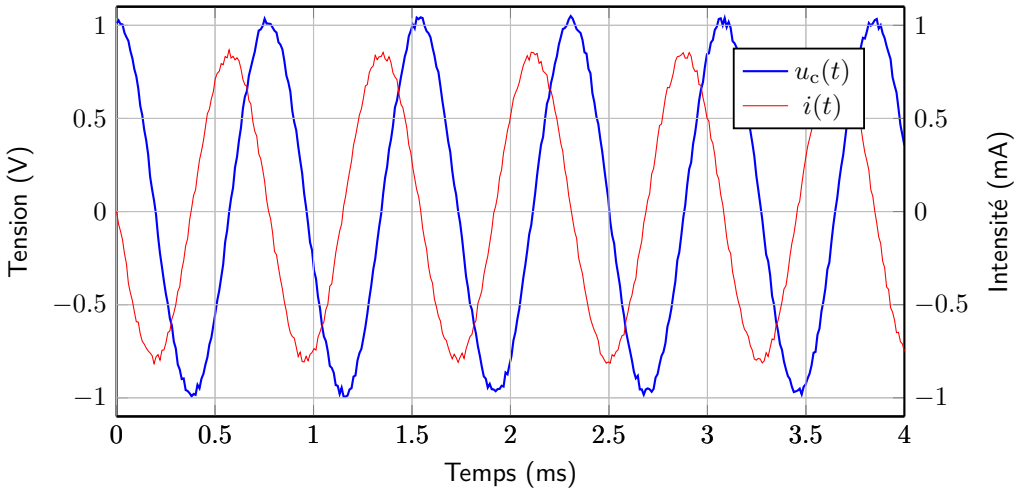


Figure 7.1 – Évolution au cours du temps de la tension aux bornes du condensateur et du courant dans le circuit

On constate que ces deux grandeurs mesurées sont sinusoïdales, de même fréquence, en quadrature de phase. L'amplitude de la tension correspond à la tension E_0.

I.2 Équation différentielle

Pour comprendre un tel comportement, il nous faut dans un premier temps établir l'équation sur $u_c(t)$. On applique la loi des mailles :

$$u_c(t) + u_L(t) = 0 = u_c(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{7.1}$$

Or la relation courant-tension pour le condensateur en convention récepteur est $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$, d'où :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + u_c(t) = 0 \iff \frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_c(t) = 0 \tag{7.2}$$

D'un point de vue de l'homogénéité, on peut tout de suite constater que $\left[\dfrac{1}{LC}\right] = T^{-2}$, d'où l'on pose $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Définition

On appelle **oscillateur harmonique** un système dont la variable $f(t)$ le décrivant vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 f = \text{cste} \tag{7.3}$$

où le membre de droite est une constante quelconque. ω_0 est alors appelé **pulsation propre** et a comme dimension l'inverse d'un temps.

Le circuit LC série constitue alors bien un oscillateur harmonique. La résolution de cette équation va permettre de comprendre cette appellation.

I.3 Résolution

Dans la suite, on présente la méthode la plus générale associée à l'équation du type

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \ell_0 \tag{7.4}$$

a) Première étape : équation sans second membre

Il s'agit ici de trouver la solution générale de l'équation sans second membre

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{7.5}$$

On admet que la solution peut s'écrire sous 3 formes équivalentes :

$$\begin{cases} x_{\text{ssm}}(t) = A\ \cos(\omega_0 t) + B\ \sin(\omega_0 t) & (7.6) \\ x_{\text{ssm}}(t) = C\ \cos(\omega_0 t + \varphi) & (7.7) \\ x_{\text{ssm}}(t) = D\ \sin(\omega_0 t + \psi) & (7.8) \end{cases}$$

Les constantes A, B, C, D, φ et ψ étant à déterminer par la suite. Toutes ces formes mènent au même résultat final mais, suivant les cas, les calculs peuvent être notablement simplifiés par un choix astucieux. Nous prendrons ici la première, et ainsi

$$\boxed{x_{\text{ssm}}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)} \tag{7.9}$$

b) Deuxième étape : solution particulière

Nous cherchons une solution simple vérifiant (7.4). Lorsque le second membre est une constante, il convient de chercher une solution constante. Ici :

$$\boxed{x_{\text{p}}(t) = \ell_0} \tag{7.10}$$

est bien *une* solution de l'équation de l'oscillateur harmonique

c) Troisième étape : conditions initiales (C.I.)

La solution générale de l'équation est alors la somme des deux solutions précédentes :

$$x(t) = x_{\text{ssm}}(t) + x_{\text{p}}(t) = \ell_0 + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \tag{7.11}$$

Il est temps de déterminer les constantes en utilisant les **conditions initiales**. L'équation différentielle étant d'ordre 2, il est nécessaire de connaître deux conditions initiales, par exemple :

$$\begin{cases} x(t{=}0) = \ell_0 & (7.12) \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t=0) = v_0 & (7.13) \end{cases}$$

Écrivons l'expression de $x(t) = x_{\text{ssm}}(t) + x_{\text{p}}(t)$ et de sa dérivée au temps initial :

$$\begin{cases} x(t{=}0) = A\cos(0) + B\sin(0) + \ell_0 = A + \ell_0 & (7.14) \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t=0) = -A\omega_0\sin(0) + B\omega_0\cos(0) = B\omega_0 & (7.15) \end{cases}$$

Ces deux systèmes d'équations mènent à $A = 0$ et $B = v_0/\omega_0$, ce qui termine la résolution de cette équation :

$$\boxed{x(t) = \ell_0 + \frac{v_0}{\omega_0}\,\sin(\omega_0 t)} \tag{7.16}$$



Exercice

En reprenant l'exemple du circuit LC, exprimer la tension $u_c(t)$, puis en déduire l'expression de l'intensité du courant.

L'équation étant sans second membre, on peut écrire la forme des solutions : $u_c(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. On cherche A et B à l'aide des conditions initiales liées à la continuité de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité traversant la bobine :

$$u_c(t = 0^+) = u_c(t = 0^-) = E_0 = A \quad \text{et} \quad i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0 = -B\omega_0 \tag{7.17}$$

d'où

$$u_c(t) = E_0\cos(\omega_0 t) \Longrightarrow i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = -C\omega_0 E_0\sin(\omega_0 t) \tag{7.18}$$

I.4 Commentaire : approche énergétique

La solution obtenue est bien conforme aux mesures expérimentales : les deux signaux sont sinusoïdaux, les amplitudes sont cohérentes, et le déphasage également. D'ailleurs la période du signal sinusoïdal vérifie :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} = 0{,}77\,\text{ms} \tag{7.19}$$

tandis que graphiquement, $5T_{\text{exp}} \simeq 3{,}8$ ms donc $T_{\text{exp}} = 0{,}76$ ms.

D'autre part, on a vu dans le chapitre précédent que les deux dipôles pouvaient stocker de l'énergie. On peut les exprimer :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}CE_0^2\cos^2(\omega_0 t) \tag{7.20}$$

pour l'énergie stockée dans le condensateur, et d'autre part pour la bobine :

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2}LC^2\omega_0^2E_0^2\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}CE_0^2\sin^2(\omega_0 t) \tag{7.21}$$

Leur représentation graphique permet de traduire les échanges énergétiques entre les deux dipôles :

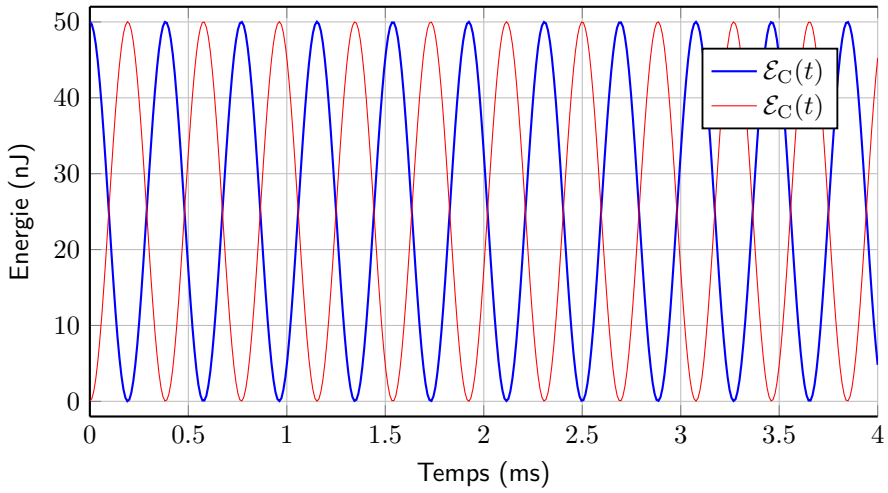


Figure 7.2 – Évolution au cours du temps de l'énergie stockée dans le condensateur et dans la bobine

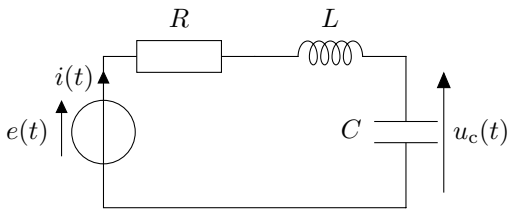
On observe donc qu'il y a continuellement un transfert d'énergie du condensateur vers la bobine et inversement, sans atténuation. On note enfin que $\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2}CE_0^2 = \text{cste}$. L'énergie totale dans le circuit est donc constante.

Néanmoins, sur un temps plus long, il s'avère que la modélisation est imparfaite, et l'énergie totale dans le circuit diminue, liée à la résistance électrique de la bobine. Étudions plus précisément son influence.

II. Oscillateurs amortis

II.1 Observations expérimentales d'un circuit RLC

On étudie le circuit suivant constitué de l'association série d'une résistance variable R, d'un condensateur de capacité $C = 110\,\text{nF}$ et d'une bobine d'inductance $L = 150\,\text{mH}$ alimentée par un générateur idéal de tension $e(t)$.



Il est possible de mesurer la tension aux bornes du condensateur lorsqu'on le soumet à un échelon de tension, c'est à-dire que la tension aux bornes du générateur vérifie :

$$\begin{cases} e(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0 & (7.22) \\ e(t) = E_0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0 & (7.23) \end{cases}$$

À l'aide d'un oscilloscope, on obtient les résultats ci-dessous :

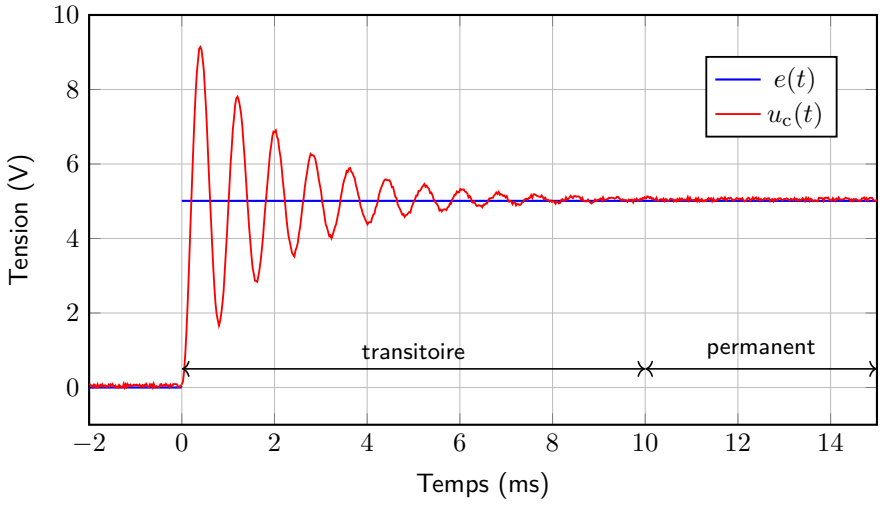


Figure 7.3 – Évolution au cours du temps de la tension aux bornes du générateur et du condensateur pour $R = 100\,\Omega$

On distingue un régime transitoire constitué d'oscillations d'amplitude décroissante suivi d'un régime permanent où la tension aux bornes du condensateur est égale à la fém du générateur.

On constate aussi ci-après qu'à mesure que la résistance augmente, les oscillations se font moins nombreuses durant le régime transitoire, voire disparaissent pour des valeurs assez importantes de R.

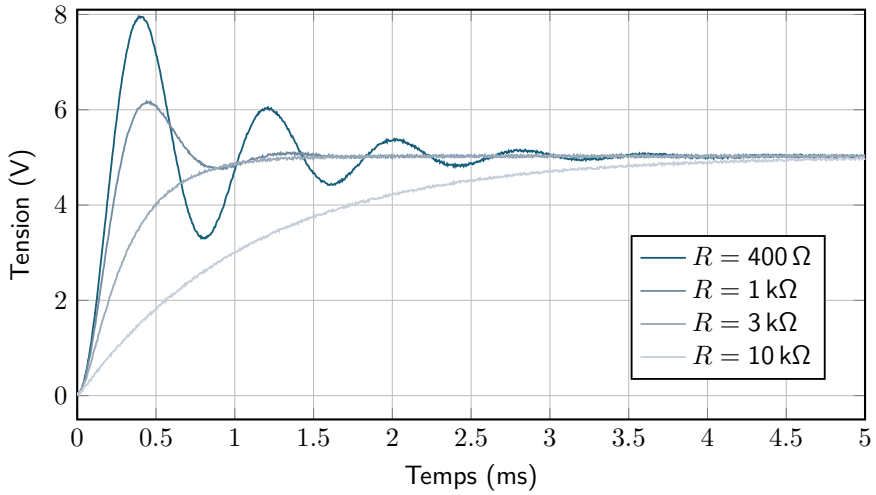


Figure 7.4 – Évolution au cours du temps de la tension aux bornes du condensateur pour différentes valeurs de résistances

II.2 Mise en équation

Exercice

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$. On l'exprimera avec un coefficient 1 devant la dérivée seconde.

Pour le circuit précédent, appliquons la loi des mailles :

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_c(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_c(t) \tag{7.24}$$

De plus, le condensateur impose $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ soit :

$$e(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + u_c(t) \tag{7.25}$$

que l'on peut réécrire sous une forme dite canonique, en divisant l'équation par LC et en ordonnant les dérivées :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_c(t) = \frac{e(t)}{LC}} \tag{7.26}$$

À noter que cette équation est celle d'un oscillateur harmonique si $R = 0$, c'est-à-dire en l'absence de dissipation. Cela permet déjà de comprendre qu'une faible dissipation nous rapproche du modèle de l'oscillateur harmonique.

Équation d'un oscillateur amorti

* Un oscillateur amorti décrit par le paramètre physique $f(t)$ est régi par une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 f = \text{cste}} \tag{7.27}$$

où ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur et Q le **facteur de qualité**.

Pour le système précédent, on identifie les paramètres introduits dans l'équation différentielle : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$.

La résolution de cette équation différentielle va permettre de mettre en évidence le rôle de ces deux paramètres qui caractérisent un oscillateur amorti.

II.3 Résolution

Cherchons donc à résoudre l'équation différentielle pour le circuit RLC à partir de $t \geq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_\mathrm{c}(t) = \omega_0^2 E_0 \tag{7.28}$$

On reprend la même structure que pour la résolution de l'équation d'un oscillateur harmonique :

i) Recherche de la solution de l'équation sans second membre

On va résoudre l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_\mathrm{c}(t) = 0 \tag{7.29}$$

D'après le cours de mathématique, les solutions sont de la forme e^{rt} avec $r \in \mathbb{C}$ solution du polynôme du second degré appelé **polynôme caractéristique** :

* $$\boxed{r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0} \tag{7.30}$$

de discriminant

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2) \tag{7.31}$$

Distinguons les différents cas de figure selon le signe de Δ :

- $\Delta > 0$, soit $1 - 4Q^2 > 0 \Leftrightarrow Q^2 < 1/4$ et $Q < 1/2$, alors le polynôme admet deux solutions réelles

  $$r_\pm = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2} < 0 \tag{7.32}$$

  * La solution de l'équation sans second membre s'écrit :

    $$\boxed{u_{\mathrm{c,ssm}}(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}} \tag{7.33}$$

    avec A et B des constantes à déterminer.

- $\Delta = 0$, soit $Q = 1/2$, on a une racine double $r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ et la solution de l'équation sans second membre s'écrit :

  * $$\boxed{u_{\mathrm{c,ssm}}(t) = (At + B)e^{rt}} \tag{7.34}$$

    avec A et B des constantes à déterminer.

- $\Delta < 0$, soit $Q > 1/2$, on a deux racines complexes :

  * $$r_\pm = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\mu \pm j\Omega \tag{7.35}$$

    avec $\boxed{\mu = \frac{\omega_0}{2Q}}$ et $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$.

    La solution de l'équation sans second membre s'écrit alors après transformations :

  * $$\boxed{u_{\mathrm{c,ssm}}(t) = e^{-\mu t}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) = Ce^{-\mu t}\cos(\Omega t + \varphi)} \tag{7.36}$$

    où (A, B), (C, φ) sont des couples de constantes déterminées à l'aide des conditions initiales.

On introduit j au lieu de i pour écrire des nombres complexes, ce afin de ne pas confondre avec l'intensité électrique i.

ii) Recherche de la solution particulière

La solution particulière, avec le second membre constant, est simplement une constante. En annulant les dérivées, on a donc $\omega_0^2 u_{\mathrm{c,p}} = \omega_0^2 E_0$ et donc $u_{\mathrm{c,p}} = E_0$.

iii) Utilisation des conditions initiales

La solution générale de l'équation de l'oscillateur amorti s'écrit alors

$$u_c(t) = u_{c,ssm}(t) + u_{c,p}(t) \tag{7.37}$$

Poursuivons sur un exemple concret, où $\Delta < 0$. Alors

$$u_c(t) = e^{-\mu t}\left(\alpha\cos(\Omega t) + \beta\sin(\Omega t)\right) + E_0 \tag{7.38}$$

puis les conditions initiales à $t = 0$ s'écrivent :

$$\begin{cases} u_c(t=0) = 0 & (7.39) \\ \dfrac{du_c}{dt}(t=0) = 0 & (7.40) \end{cases}$$



Exercice

Justifier ces conditions initiales, sachant que pour $t < 0$, les composants n'ont pas stocké d'énergie :

Du fait de la présence du condensateur et de la bobine imposant la continuité de $i(t)$ et de $u_c(t)$, il vient $i(t=0^-) = 0 = i(t=0^+) = C\dfrac{du_c}{dt}(t=0^+)$ et $u_c(t=0^-) = 0 = u_c(t=0^+)$



Exercice

Les appliquer pour trouver la solution :

$u_c(0) = \alpha + E_0 = 0$ soit $\alpha = -E_0$. On calcule ensuite la dérivée :

$$\frac{du_c(t)}{dt} = e^{-\mu t}\left(-\mu(\alpha\cos(\Omega t) + \beta\sin(\Omega t)\right) + \Omega\left(-\alpha\sin(\Omega t) + \beta\cos(\Omega t)\right)) \tag{7.41}$$

soit à $t = 0$ $\dfrac{du_c}{dt}(t=0) = 0 = -\mu\alpha + \Omega\beta$ soit $\beta = -\dfrac{\mu E_0}{\Omega}$ et finalement :

$$\boxed{u_c(t) = E_0\left(1 - e^{-\mu t}\left(\cos(\Omega t) + \frac{\mu}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\right)} \tag{7.42}$$

II.4 Différents régimes de fonctionnement

a) Régime apériodique $Q < 1/2$

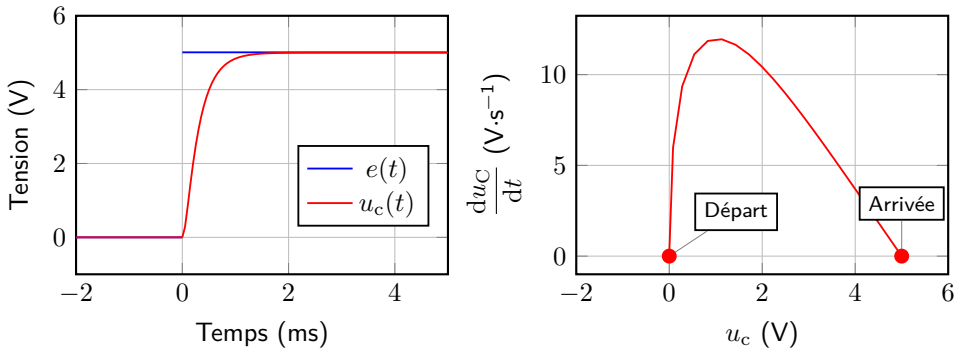
Revenons à l'exemple expérimental. Lorsque $Q < \dfrac{1}{2}$, cela se traduit sur la valeur de la résistance par :

$$\frac{L}{R\sqrt{LC}} < \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 1{,}17\,\text{k}\Omega \tag{7.43}$$

Cela signifie que lorsque **la dissipation est importante**, pour $Q < 1/2$, la solution générale s'écrit :

$$u_c(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t} + E_0 \tag{7.44}$$

c'est-à-dire une évolution similaire à la charge d'un condensateur, conforme aux observations expérimentales précédentes. On parle de **régime apériodique** Le régime transitoire est gouverné par l'exponentielle décroissant le moins vite, c'est-à-dire $e^{r_+ t}$ (car $|r_+| < |r_-|$) et donc le temps du régime transitoire est de l'ordre de quelques $1/|r_+|$.



On a représenté ci-dessus l'allure de ce type de signal pour $R = 3\,\text{k}\Omega$, avec le portrait de phase associé. On observe bien que la trajectoire de phase est une courbe partant d'un point de départ associé aux conditions initiales (ici $u_C(0) = \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = 0$), et se dirige vers le point correspondant au régime permanent ($u_C = E_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$).

b) Régime critique : $\Delta = 0$ et $Q = 1/2$

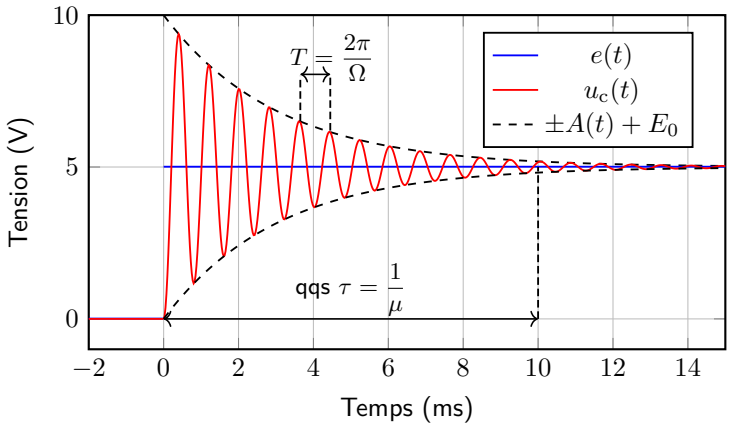
Le deuxième cas à traiter est tel que $Q = \dfrac{1}{2}$, et la solution a été vue précédemment. Aucun tracé graphique n'est ici représenté, étant donné que la différence avec le régime apériodique est imperceptible. Le temps du régime transitoire sera de l'ordre de quelques $\dfrac{1}{|r|} = \dfrac{1}{\omega_0}$.

c) Régime pseudo-périodique : $Q > 1/2$

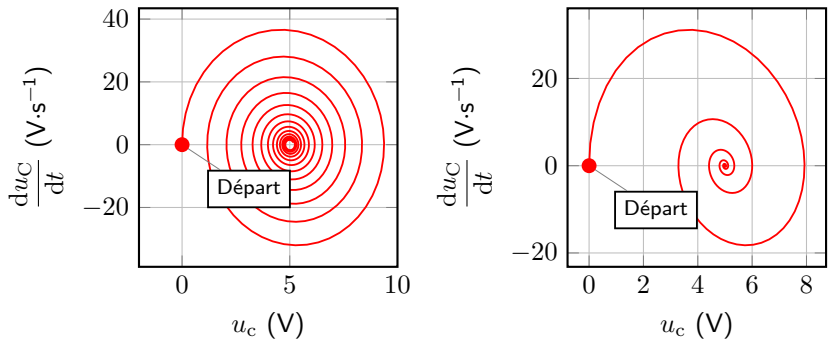
Dans le cas où $Q > \dfrac{1}{2}$, la solution s'écrit :

$$u_c(t) = \underbrace{Ce^{-\mu t}}_{A(t)} \cos(\Omega t + \varphi) + E_0 \tag{7.45}$$

On observe des oscillations autour de la tension en régime permanent E_0 d'amplitude $A(t)$ dépendant du temps, ce qui implique que u_c n'est pas périodique. Pour autant, certains évènements sont périodiques : les maxima, les minima ainsi que les instants où $u_c = E_0$. On parle ainsi de **régime pseudo-périodique** de **pseudo-période** $T = 2\pi/\Omega$ et **pseudo-pulsation** Ω différente de ω_0. L'allure temporelle est caractérisée par une sinusoïde dont l'amplitude est comprise dans une enveloppe exponentiellement décroissante avec un temps caractéristique $\tau = 1/\mu$, comme l'illustre la figure ci-dessous. Le temps du régime transitoire sera donc de l'ordre de quelques $1/\mu$.



On peut également représenter le portrait de phase pour $R = 100\,\Omega$ (gauche) ou $R = 400\,\Omega$ (droite). On constate d'une part que la trajectoire de phase suit une spirale à partir de l'état initial, avec d'autant plus de tours que la dissipation est faible. De plus, ces trajectoires tendent toujours vers le point correspondant au régime permanent.



Notons que le sens de rotation de la courbe du portrait de phase d'un oscillateur est identique : c'est le sens horaire. En effet, partant de la position de départ, si $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} > 0$, cela signifie que u_c est croissante au cours du temps : on a donc déplacement vers le haut et vers la droite dans le plan de phase.

d) Oscillations dans le cas où $Q \gg 1$

On peut enfin calculer le nombre d'oscillations durant le régime transitoire pour $Q \gg 1$, en comparant la période $T = \dfrac{2\pi}{\Omega} \simeq \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ (car $1 - 1/(4Q^2) \simeq 1$) et le temps du régime transitoire donné à partir de l'enveloppe exponentielle $T_{\text{trans}} \simeq 3\tau \simeq 3 \times 1/\mu$:

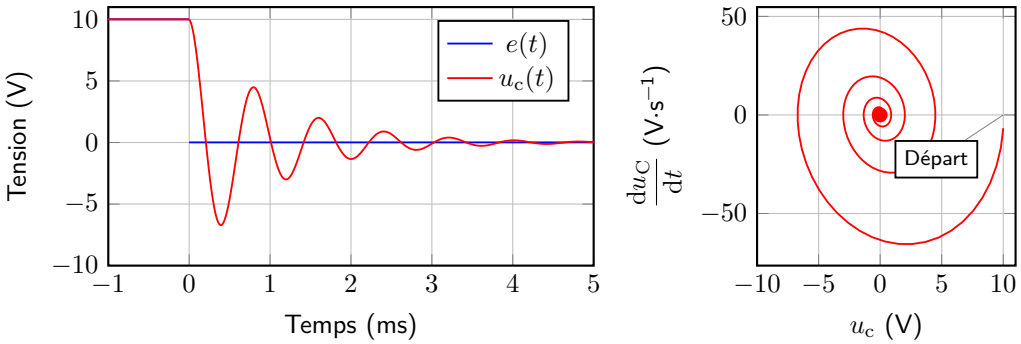
$$N_{\text{osc}} = \frac{T_{\text{trans}}}{T} = \frac{3 \cdot 2Q}{\omega_0} \times \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq Q \tag{7.46}$$

Oscillations pour un régime pseudo-périodique

Dans le cas où le facteur de qualité Q est grand devant 1, l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations durant la totalité du régime transitoire pseudo-périodique est Q, et la pulsation associée est $\Omega \simeq \omega_0$.

Exercice

Représenter l'évolution de $u_c(t)$ au cours du temps et le portrait de phase associé si $Q \simeq 5$, pour un régime libre, c'est-à-dire lorsque le condensateur est initialement chargé (par exemple sous une tension de 10 V) puis à $t = 0$ on éteint le générateur.



e) Bilan énergétique

On peut effectuer un bilan énergétique en partant de la loi des mailles et en la multipliant par l'intensité $i(t)$:

$$e(t)i(t) = Ri^2(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i(t) + u_c(t)i(t) \tag{7.47}$$

soit avec $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ il vient

$$e(t)i(t) = Ri^2(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Li^2/2 + Cu_c^2/2\right) \tag{7.48}$$

soit en introduisant $P_g = e(t)i(t)$ la puissance fournie par le générateur, $\mathcal{E}_C = Cu_c^2/2$ l'énergie stockée dans un condensateur, $\mathcal{E}_L = Li^2/2$ l'énergie stockée dans la bobine et enfin $P_J = Ri^2$ la puissance dissipée par effet Joule :

$$P_g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L\right) + P_J \tag{7.49}$$

Cela traduit les échanges énergétiques : l'énergie fournie par le générateur est stockée dans le condensateur et dans la bobine, mais est également dissipée par effet Joule.

In fine, la bobine ne stockera pas d'énergie car en régime permanent le condensateur va bloquer le passage du courant. Ici seul le condensateur stocke de l'énergie de façon permanente.

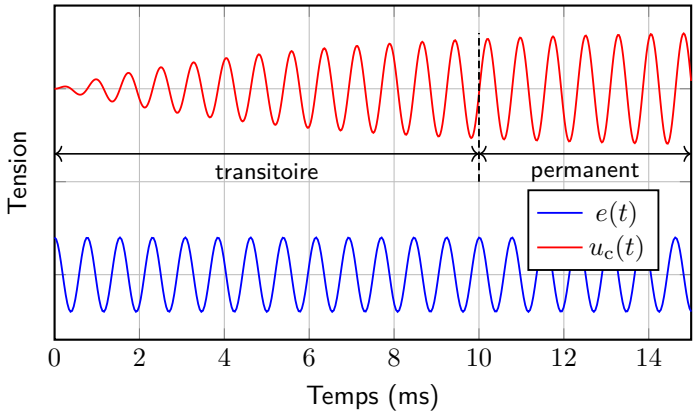
III. Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé

Les circuits électriques, tout comme certains systèmes mécaniques que l'on étudiera prochainement, ne sont pas toujours utilisés en régime libre ou soumis à un échelon de tension. Bien souvent, le générateur envoie un signal périodique, voire quelconque. On va s'intéresser dans un premier temps à l'utilisation d'un signal sinusoïdal pur, et nous verrons dans le chapitre SP8 la généralisation à un signal quelconque.

III.1 Observations expérimentales

a) Régime transitoire et permanent

Mesurons la tension aux bornes du condensateur initialement déchargé d'un circuit RLC série de pulsation propre $\omega_0 = 10{,}5{\cdot}10^3\,\text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1}$, où la tension aux bornes du générateur est sinusoïdale de pulsation quelconque. On observe alors le signal ci-dessous :



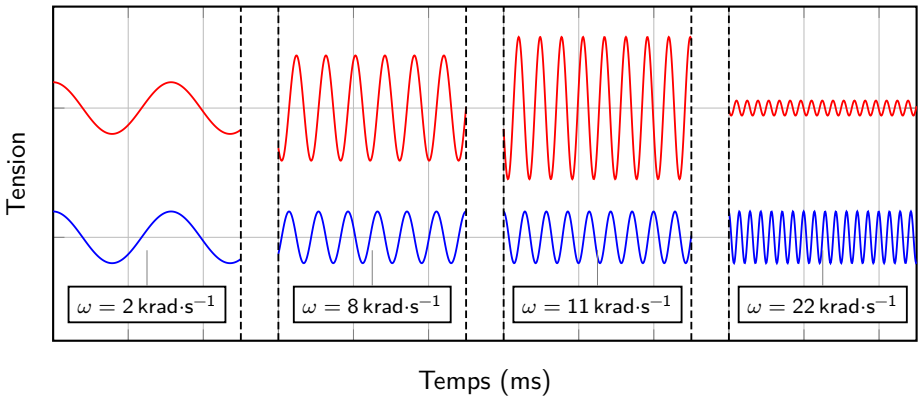
On constate ainsi un régime transitoire suivi d'un régime permanent, mais cette fois-ci le régime permanent n'est pas constant : le signal a la même forme que le signal d' « entrée » (le signal excitateur), à savoir une sinusoïde ayant la même fréquence. Seules l'**amplitude** et la **phase** diffèrent par rapport au signal d'entrée.

Régime forcé d'un oscillateur

* En régime sinusoïdal forcé et après un régime transitoire, le **régime permanent est sinusoïdal**, de **même fréquence que l'excitation**, mais d'**amplitude et de déphasage à l'origine différent**. Ce résultat est **indépendant des conditions initiales**.

b) Influence de la fréquence

Faisons varier la fréquence du générateur et observons uniquement le régime permanent :



Plusieurs phénomènes sont à observer :

- à basses fréquences (pour $\omega < \omega_0$), la tension du condensateur suit celle du générateur avec la même amplitude et sans déphasage : les variations de tension du générateur sont suffisamment lentes pour que le condensateur ait le temps de se charger et de se décharger ;
- pour une fréquence proche de la fréquence propre de l'oscillateur, l'amplitude de la tension du condensateur passe de manière surprenante par un maximum supérieur à l'amplitude de l'oscillateur : il s'agit du phénomène de **résonance**. On peut le comprendre qualitativement par le fait que si on apporte de l'énergie au bon moment, on peut amplifier la charge malgré la dissipation
- à hautes fréquences (pour $\omega > \omega_0$), le condensateur ne se charge presque plus du fait de son « inertie » : elle n'a pas le temps de suivre les modifications de tension du générateur. On constate que les signaux sont quasiment en opposition de phase ;

III.2 Étude du régime sinusoïdal forcé

Essayons de comprendre ces faits expérimentaux de manière plus quantitative, afin de prévoir si un oscillateur électrique se comporte toujours de la sorte et quels paramètres influent sur la tension aux bornes du condensateur.

a) Équation

On part de l'équation différentielle précédente, mais où la tension aux bornes du générateur s'écrit $E_0 \cos \omega t$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_\mathrm{c}(t) = \omega_0^2 E_0 \cos \omega t \tag{7.50}$$

Cette équation admet une solution se décomposant en deux parties :

- la solution de l'équation sans second membre, modélisant le régime transitoire limité dans le temps, qui ne va pas nous intéresser par la suite ;
- la solution particulière, correspondant à la solution en régime permanent, qui est celle dont on veut déterminer les caractéristiques.

C'est cette solution particulière que nous nous proposons de déterminer maintenant, *via* une méthode de calcul efficace.

b) Utilisation des grandeurs complexes

En régime permanent, on cherche une solution de la même forme que le second membre avec la même pulsation : $f(t) = f_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi)$, où f_m est l'amplitude et φ le déphasage par rapport au signal excitateur. Afin de déterminer assez facilement f_m et φ, on va utiliser des notations complexes.

i) Notations complexes

Pour une grandeur sinusoïdale de la forme $f(t) = F_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi)$ est associée une grandeur complexe notée $\underline{f}(t)$ telle que $\mathrm{Re}(\underline{f}(t)) = f(t)$, soit donc

$$\underline{f}(t) = F_\mathrm{m} e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{F}_\mathrm{m} e^{j\omega t} \tag{7.51}$$

où $\underline{f}_\mathrm{m} = F_\mathrm{m} e^{j\varphi}$ est appelée l'amplitude complexe, contenant toute l'information désirée sur le régime permanent (la pulsation étant connue).

Deux propriétés intéressantes concernent la dérivation et l'intégration :

- $\dfrac{\mathrm{d}\underline{f}}{\mathrm{d}t} = \underline{f}_\mathrm{m} \dfrac{\mathrm{d}e^{j\omega t}}{\mathrm{d}t} = j\omega \underline{f}_\mathrm{m} e^{j\omega t} = j\omega \underline{f}(t)$: on remplace ainsi l'opérateur $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ par une multiplication par $j\omega$;
- de la même façon $\displaystyle\int \underline{f}(t)\mathrm{d}t = \ldots = \frac{1}{j\omega}\underline{f}(t)$: on remplace l'opérateur $\int$ par une multiplication par $\dfrac{1}{j\omega}$.

Si $\cos(\omega t)$ est remplacée par $e^{j\omega t}$ en complexe, la fonction $\sin$ est elle remplacée par $-je^{j\omega t}$ car $\sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ soit donc $\sin(\omega t) \underset{\mathbb{C}}{\to} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} = e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} = -je^{j\omega t}$

ii) Application à la détermination de l'amplitude complexe

Partons donc de l'équation différentielle précédemment obtenue. On recherche la solution en régime permanent de la forme $\underline{u_\mathrm{c}}(t) = U_{\mathrm{c,m}} e^{j(\omega t + \varphi)}$, donc injectons cette solution dans l'équation différentielle écrite en complexe :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 Z(t) = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t) \underset{\mathbb{C}}{\rightarrow} \frac{\mathrm{d}^2 \underline{u_\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\underline{u_\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \underline{u_\mathrm{c}}(t) = \omega_0^2 E_0 e^{j\omega t} \tag{7.52}$$

On utilise la propriété précédente sur la dérivation, sachant qu'une dérivée seconde est ainsi remplacée par la multiplication par $(j\omega)^2$:

$$\underline{u_\mathrm{c}}(t)\left((j\omega)^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) = \omega_0^2 E_0 e^{j\omega t} \tag{7.53}$$

* soit en divisant par $e^{j\omega t}$

$$\underline{U}_\mathrm{c,m}\left(-\omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) = \omega_0^2 E_0 \tag{7.54}$$

L'amplitude complexe recherchée s'écrit donc

$$\boxed{\underline{U}_\mathrm{c,m} = u_\mathrm{c,m} e^{j\varphi} = \frac{\omega_0^2 E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}} \tag{7.55}$$

Déterminons alors $U_\mathrm{c,m}$ et φ :

- $U_\mathrm{c,m}$ est le module de $\underline{U}_\mathrm{c,m}$, soit

* car $|a+jb| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$U_\mathrm{c,m} = \left|\frac{\omega_0^2 E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}\right| = \frac{\omega_0^2 E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} \tag{7.56}$$

- φ est l'argument de $\underline{u}_\mathrm{c,m}$, soit :

$$\varphi = \arg\left(\frac{\omega_0^2 E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}\right) = \arg(\omega_0^2 E_0) - \arg\left((\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right) \tag{7.57}$$

$$= -\arg j\left(\frac{\omega\omega_0}{Q} - j(\omega_0^2 - \omega^2)\right) \tag{7.58}$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{Q(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega\omega_0}\right) \tag{7.59}$$

On rappelle : $\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg a - \arg b$ et $\arg(a+jb) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ si $a > 0$

$$= \boxed{-\frac{\pi}{2} - \arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{7.60}$$

Utilisons les expressions obtenues pour interpréter le comportement du circuit en régime sinusoïdal forcé selon la fréquence d'excitation.

III.3 Résonance de la tension aux bornes d'un condensateur

Définition

* Lorsqu'un système est soumis à une excitation sinusoïdale, une ou plusieurs réponses (tension, intensité, déplacement, etc.) peuvent présenter un maximum pour une ou plusieurs fréquences : c'est le phénomène de résonance.

On rencontre le phénomène de résonance dans de nombreuses situations physiques (caisse de résonance d'un diapason, balançoire, laser, résonance magnétique nucléaire...). Les caractéristiques de cette résonance peuvent souvent être modélisés par un oscillateur amortis, comme nous allons le vérifier à l'aide des deux systèmes physiques étudiés précédemment : le circuit RLC série et la masse accrochée à un ressort.

a) Étude de l'amplitude

Étudions l'influence de la pulsation d'excitation ω sur l'amplitude du système, afin de comprendre le phénomène de résonance observé expérimentalement.

Pour alléger les notations, posons $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite. L'amplitude vue précédemment se réécrit :

$$U_{\mathrm{c,m}} = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}} \tag{7.61}$$

Le phénomène de résonance se produisait expérimentalement pour une pulsation proche de ω_0, avec une amplitude maximale plus grande que E_0.

Cherchons donc la pulsation pour laquelle $U_{\mathrm{c,m}}$ est maximale, et déterminons donc le minimum de l'argument de la racine carrée. Posons $f(x) = (1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2$ et calculons sa dérivée :

$$f'(x) = 2 \times (-2x) \times (1-x^2) + 2\frac{x}{Q^2} = -4x\left(1 - \frac{1}{2Q^2} - x^2\right) \tag{7.62}$$

s'annulant trivialement pour $x = 0$

, mais également pour $x = x_{\mathrm{r}} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ à la condition que $Q \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}71$.

Remarquons que $x = 0$ correspond bien à un extremum de $U_{\mathrm{c,m}}$, mais il ne s'agit pas d'un forçage sinusoïdal vu que $\omega = 0$

On peut montrer qu'il s'agit bien d'un minimum pour $f(x)$ car $f'(x) > 0$ pour $x < x_{\mathrm{r}}$ (donc fonction croissante), et $f'(x) < 0$ pour $x > x_{\mathrm{r}}$ (donc fonction décroissante), donc la fonction $f(x)$ présente un minimum pour $x = x_r$.

Le tracé de $\dfrac{U_{\mathrm{c,m}}(u)}{E_0}$ ci-dessous, pour différentes valeurs du facteur de qualité, est cohérent avec ce que l'on vient de montrer :

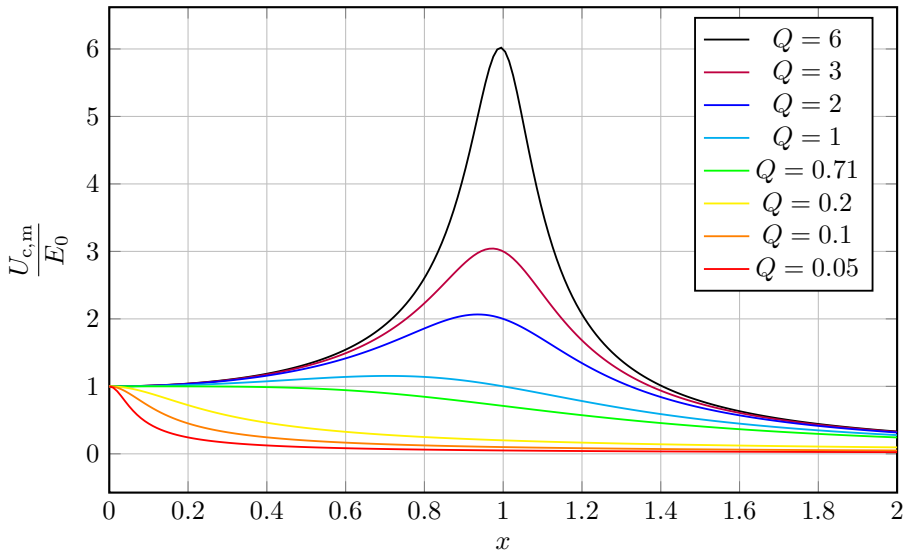


Figure 7.5 – Amplitude réduite $\dfrac{U_{\mathrm{c,m}}}{E_0}$ en fonction de la pulsation réduite $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ pour différentes valeurs du facteur de qualité Q

- pour $x = 0$, l'amplitude est identique à celle de l'excitateur, donc $\dfrac{U_{\mathrm{c,m}}}{E_0} = 1$;
- pour $x = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ et donc $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ proche de ω_0, le système présente un phénomène de résonance si le facteur de qualité vérifie $Q \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et l'amplitude de l'oscillateur est supérieur à celle de l'excitateur ;
- dans le cas où $Q \geq 3$, $U_{\mathrm{c,m}}(x_{\mathrm{r}}) \simeq QE_0$: l'amplitude à résonance peut prendre des valeurs très supérieures à celle du forçage. On note également que $x_{\mathrm{r}} \simeq 1$ c'est-à-dire que la pulsation de résonance se rapproche de la pulsation propre. Enfin, la largeur du pic de résonance diminue à mesure que le facteur de qualité augmente : la résonance est plus **aigüe** ;

- à hautes fréquences, pour $x \gg 1$, l'amplitude décroît rapidement : l'inertie du condensateur l'empêche de suivre les variations de tension aux bornes du générateur.

b) Étude de la phase

On peut également tracer le déphasage en fonction de la pulsation pour différentes valeurs du facteur de qualité. Cela confirme bien les observations sur le système masse-ressort : le mouvement est en phase à basse fréquence, se retarde progressivement (car $\varphi < 0$), et finit en opposition de phase à haute fréquence. À noter que la variation de phase autour de $\omega = \omega_0$ est d'autant plus grande que le facteur de qualité est grand.

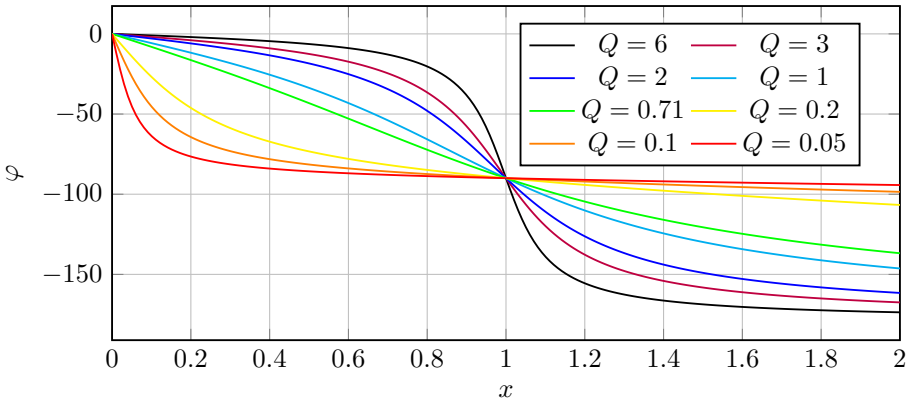


Figure 7.6 – Déphasage en fonction de la pulsation réduite $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ pour différentes valeurs du facteur de qualité Q

Notons aussi que le déphasage passe toujours par $-\pi/2$ quand $x = 1$, soit quand $\omega = \omega_0$. Cela peut en particulier être un moyen de mesurer expérimentalement ω_0 pour des valeurs de Q inférieures à 3.

IV. Utilisation des impédances complexes en régime sinusoïdal forcé

IV.1 Notion d'impédance électrique

a) Définition

En régime formé, on peut étudier les circuits électriques en introduisant une généralisation de la notion de résistance.

Définition

* On appelle **impédance complexe** d'un dipôle, notée $\underline{Z}$, le rapport :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} \tag{7.63}$$

où $\underline{u}$ est la tension (complexe) aux bornes de ce dipôle en régime forcé, et $\underline{i}$ le courant le traversant. Elle s'exprime également en ohm.

b) Impédances des composants usuels



Exercice

À partir de la définition de l'impédance et des relations constitutives d'une résistance, d'un condensateur, et d'une bobine, déterminer l'expression de leur impédance.

Pour une résistance, la relation $u = Ri$ est inchangée lors du passage en notations complexes, donc $\underline{Z}_{\mathrm{R}} = R$; pour un condensateur, on a la relation $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, soit en notation complexe $\underline{i} = Cj\omega\underline{u}$ et donc

l'impédance associée est $\underline{Z}_\mathrm{C} = \dfrac{1}{jC\omega}$; de même pour une bobine, avec $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, il vient $\underline{Z}_\mathrm{L} = jL\omega$.

Impédance des composants usuels

* En convention récepteur, on a $\boxed{\underline{Z}_\mathrm{R} = R}$, $\boxed{\underline{Z}_\mathrm{C} = \dfrac{1}{jC\omega}}$ et $\boxed{\underline{Z}_\mathrm{L} = jL\omega}$.

On peut effectuer comme pour des résistances des associations en série ou en dérivation suivant les mêmes relations :

- en série on somme les impédances : $\underline{Z}_\mathrm{eq} = \sum_i \underline{Z}_i$;
- en dérivation on somme les inverses des impédances, encore appelées **admittances** :

$$\frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{eq}} = \sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i}$$

c) Comportement asymptotique des dipôles

Les impédances nous permettent d'en déduire le comportement aux « basses » et aux « hautes » fréquences :

- pour $\omega \to 0$, $|\underline{Z}_\mathrm{C}| \to +\infty$ et $|\underline{Z}_\mathrm{L}| \to 0$, correspondant à ce qui avait été énoncé au chapitre SP6 à savoir que le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert (ou une résistance de valeur infinie), et la bobine comme un fil ;
- pour $\omega \to +\infty$, $|\underline{Z}_\mathrm{C}| \to 0$ et $|\underline{Z}_\mathrm{L}| \to +\infty$, ce qui signifie que le condensateur se comporte comme un fil aux hautes fréquences et la bobine comme un interrupteur ouvert.

Ces dernières affirmations peuvent se comprendre qualitativement : la bobine n'autorise pas des changements d'intensité trop rapides dans la branche dans laquelle elle se trouve, par des effets inductifs, tandis que le condensateur n'a plus le temps de se charger ou décharger et la tension à ses bornes reste constamment nulle.

IV.2 Retour au cas du circuit RLC série

a) Obtention de l'amplitude complexe

On cherche à étudier le comportement du courant dans le circuit RLC série. Pour obtenir l'intensité en régime forcé, il convient d'exprimer la tension aux bornes de la résistance. À l'aide de la formule du pont diviseur de tension, elle vaut :

$$\underline{u}_\mathrm{R}(t) = R\underline{i}(t) = \frac{\underline{Z}_\mathrm{R}}{\underline{Z}_\mathrm{R} + \underline{Z}_\mathrm{L} + \underline{Z}_\mathrm{C}}\underline{e}(t) = \frac{R}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}e_0 e^{j\omega t} \tag{7.64}$$

* En simplifiant par R et en posant $\underline{i}(t) = \underline{I}_\mathrm{m}e^{j\omega t+\varphi} = \underline{I}_\mathrm{m}e^{j\omega t}$, l'amplitude complexe de l'intensité se réécrit

$$\underline{I}_\mathrm{m} = \frac{e_0}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} = \boxed{\frac{\dfrac{e_0}{R}}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}} \tag{7.65}$$

où l'on utilise la définition de Q et ω_0 déterminée précédemment.

Exercice

Déterminer par la même méthode la tension aux bornes du condensateur et retrouver l'expression obtenue grâce à l'équation différentielle.

On applique à nouveau la relation du pont diviseur, mais aux bornes du condensateur :

$$\underline{u}_\mathrm{c} = \frac{\underline{Z}_\mathrm{C}}{\underline{Z}_\mathrm{C} + \underline{Z}_\mathrm{L} + R}\underline{e} = \frac{\dfrac{1}{jC\omega}}{\dfrac{1}{jC\omega} + jL\omega + R} E_0 e^{j\omega t} \tag{7.66}$$

conduisant à l'amplitude complexe :

$$\underline{U}_\mathrm{c,m} = \frac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega\omega_0}{Q}} \tag{7.67}$$

IV.3 Étude de la résonance en intensité dans le circuit RLC série

À partir de l'équation exprimant l'amplitude complexe du courant, on peut calculer l'amplitude de l'intensité en régime permanent :

$$I_\mathrm{m} = \frac{\dfrac{E_0}{R}}{\left|1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right|} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}} \tag{7.68}$$

où l'on pose $I_0 = \dfrac{E_0}{R}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite.

Sans faire de calcul de dérivée, le dénominateur possède bien un minimum en $x = 1$: en effet dans la racine, on a une somme de deux termes positifs, et le deuxième s'annule uniquement en $x = 1$. Il vient donc que l'amplitude de l'intensité possède quelle que soit la valeur de Q un maximum pour $x = 1$, c'est-à-dire que pour $\omega = \omega_0$ il y aura toujours une **résonance en courant**, illustrée ci-dessous :

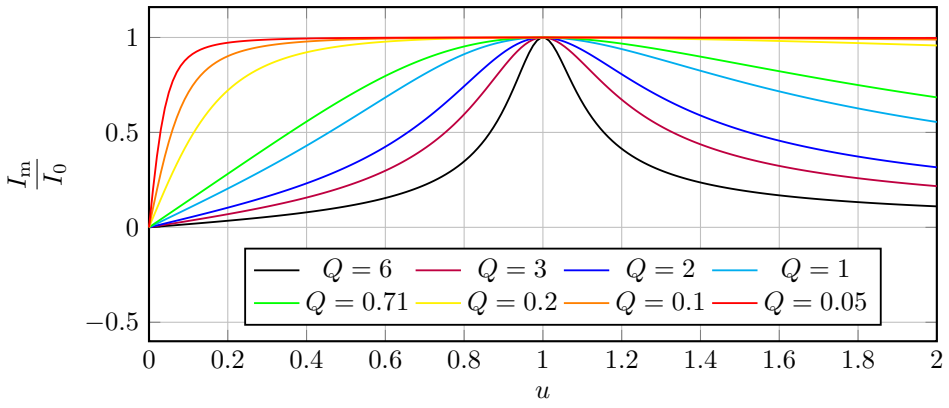


Figure 7.7 – Amplitude réduite de l'intensité $\dfrac{I_\mathrm{m}}{I_0}$ en fonction de la pulsation réduite $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ pour différentes valeurs du facteur de qualité mécanique Q

* On constate ainsi que l'amplitude du courant est limitée à I_0, mais également que plus le facteur de qualité est important, plus la résonance est **aigüe**, c'est-à-dire resserrée autour de $\omega = \omega_0$. On montre même que la largeur du pic de résonance, pour $I_\mathrm{m} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$ vaut $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}}$, ce qui donne un sens physique complémentaire au facteur de qualité.

IV.4 Passage d'une équation complexe à une équation différentielle

En utilisant les impédances, on s'affranchit ici d'écrire une équation différentielle. Mais il est même possible de faire le travail inverse et de retrouver l'équation différentielle régie par $i(t)$. Repartons de l'équation complexe reliant $\underline{i}(t)$ et $\underline{e}(t)$. Il faut faire en sorte de n'avoir que des polynômes en $j\omega$, et éliminer les fractions :

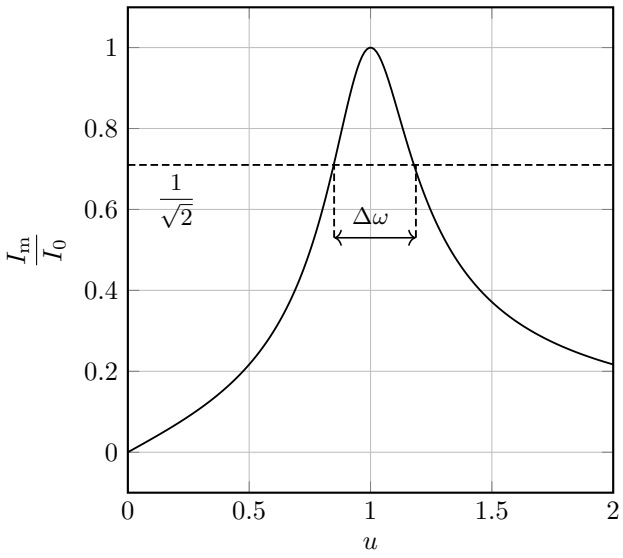


Figure 7.8 – Amplitude réduite du courant en fonction de la pulsation ω pour $Q = 3$ et la largeur du pic de résonance.

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{jC\omega\underline{e}(t)}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} \tag{7.69}$$

soit encore

$$\left(LC(j\omega)^2 + jRC\omega + 1\right)\underline{i}(t) = jC\omega\underline{e}(t) \tag{7.70}$$

puis, avec le fait que multiplier par $j\omega$ revient à effectuer une dérivée temporelle :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2\underline{i}}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} + \underline{i} = C\frac{\mathrm{d}\underline{e}}{\mathrm{d}t} \tag{7.71}$$

soit sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\underline{i}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\underline{i} = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}\underline{e}}{\mathrm{d}t}} \tag{7.72}$$

La notation complexe peut donc être un moyen commode pour déterminer une équation différentielle *a priori* difficile à obtenir (plusieurs mailles, par exemple).

Exercices

7.1 Oscillateur harmonique électrique

On s'intéresse à un circuit composé d'une bobine d'inductance $L = 400\,\text{mH}$ et d'un condensateur de capacité $C = 100\,\text{nF}$. Le générateur impose $e(t) = 5\,\text{V}$ pour $t < 0$ et $e(t) = 0$ pour $t > 0$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ et la résoudre.
2. En réalité on observe un régime transitoire pseudo-périodique qui s'amortit. Seule une trentaine d'oscillations est observée avant d'atteindre un régime permanent. Expliquer et quantifier cette observation.

---

1. Loi des mailles dans le circuit : $e(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{c} = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2} + u_\mathrm{c}$ conduisant à l'équation d'un oscillateur harmonique (mise sous forme canonique) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_\mathrm{c} = \frac{1}{LC}e(t)} \tag{7.73}$$

On identifie la pulsation propre : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.
Pour $t < 0$, il n'y a pas de générateur, et l'on suppose que les composants n'ont pas stocké d'énergie. Par conséquent, $u_\mathrm{c}(t = 0^-) = 0 = u_\mathrm{c}(t = 0^+)$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur) et $i(t = 0^-) = 0 = i(t = 0^+)$ (continuité du courant traversant la bobine). Soit, comme $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$. On écrit la solution de l'équation précédente :

- solution sans second membre $u_{\mathrm{c,ssm}}(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$;
- solution particulière constante car le second membre est constant : $u_{\mathrm{c,p}}(t) = E_0 = 5{,}0\,\text{V}$;
- solution générale $u_\mathrm{c}(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + E_0$.

Les conditions initiales conduisent à $A + E_0 = 0$ et $B\omega_0 = 0$ (dérivée) donc $A = -E_0$ et $B = 0$. Donc la solution à notre problème s'écrit :

$$\boxed{u_\mathrm{c}(t) = E_0\,(1 - \cos\omega_0 t)} \tag{7.74}$$

2. En réalité, on observe un régime pseudo-périodique, ce qui signifie qu'il y a de la dissipation dans le circuit : c'est logique, une bobine possède toujours un petit aspect résistif ! Le système est donc un oscillateur amorti par une résistance. En réécrivant la loi des mailles, en incluant la résistance, on aboutit à :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_\mathrm{c} = \omega_0^2 e(t) \tag{7.75}$$

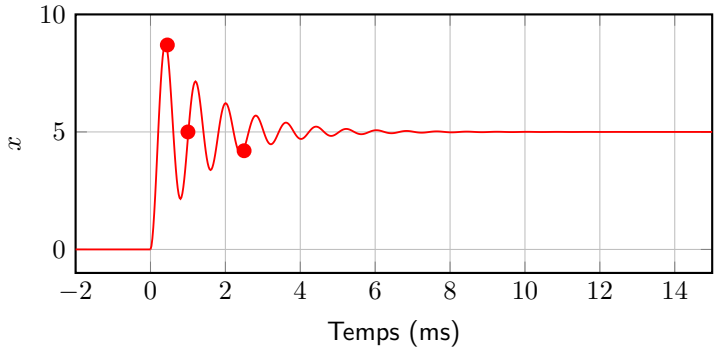
donc le facteur de qualité vérifie $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$ donc $R = \dfrac{L\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{Q}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Enfin, comme il y a une trentaine d'oscillations observées, cela signifie que le facteur de qualité est grand, donc le nombre d'oscillations correspond au facteur de qualité $Q \simeq 30$. Ainsi la résistance vaut :

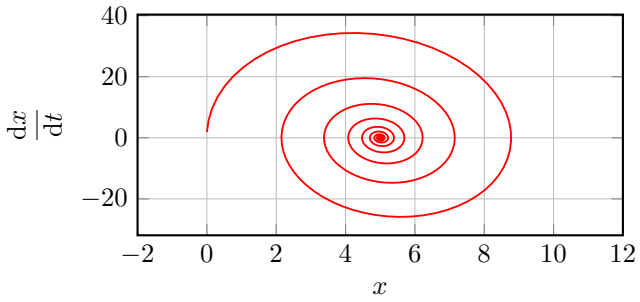
$$R = 67\,\Omega \tag{7.76}$$

7.2 Détermination expérimentale des paramètres d'un oscillateur amorti

Est représentée ci-dessous l'évolution au cours du temps du paramètre régissant l'oscillateur amorti au cours du temps x, ainsi que le portrait de phase associé (représentation de $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ en fonction de x) que l'on cherche à étudier.

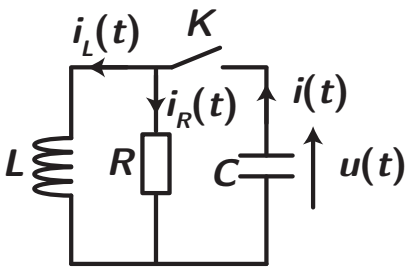
1. Placer sur le portrait de phase les trois points indiqués, en justifiant.
2. Déterminer expérimentalement la pseudo-période de l'oscillateur harmonique et le facteur de qualité. En déduire la **pulsation propre** de l'oscillateur amorti, en justifiant.





7.3 Circuit RLC parallèle

On considère le circuit ci-dessous, avec $C = 1{,}0\,\mu\text{F}$, $L = 0{,}1\,\text{mH}$ et $R = 1\,\text{k}\Omega$. L'armature supérieure porte la charge $Q(t=0) = 20\,\mu\text{C}$. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.



1. Quelles sont les valeurs $u(0^+)$, $i(0^+)$ et $i_R(0^+)$ des grandeurs juste après la fermeture de l'interrupteur ?

2. Quelles sont les valeurs de ces grandeurs en régime permanent ?

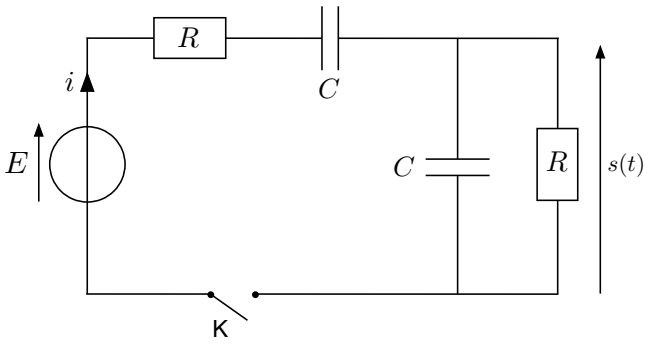
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur. La mettre sous forme canonique pour identifier pulsation propre et facteur de qualité. En déduire la nature du régime. Au bout de combien de temps le régime transitoire peut-il être considéré terminé ?

4. Que se passe-t-il pour le système si on augmente ou diminue la valeur de la résistance ? Commenter qualitativement.

5. Résoudre l'équation différentielle pour en déduire l'expression de $u(t)$. Tracer son allure. Comment obtenir l'expression de l'intensité du courant $i(t)$

7.4 Circuit à deux condensateurs

On s'intéresse au montage ci-dessous. Les condensateurs sont initialement déchargés et on ferme K à t=0.



1. Déterminer sans calcul la valeur de $s(t)$ et de $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ à $t = 0^+$. Déterminer la valeur de $s(t)$ à $t \to +\infty$.
2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s(t)}{\tau^2} = 0 \ .$$

   Donner l'expression de τ.
3. Trouver l'expression de $s(t)$ en déterminant bien les constantes d'intégration.
4. Tracer $s(t)$.

---

1. Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, donc $s(t = 0^+) = 0 = s(t = 0^-)$. Pour la dérivée, on écrit une loi des mailles à $t = 0^+$: $E = Ri(t = 0^+) + 0 + s(0^+)$ toujours à l'aide de la continuité de la tension aux bornes du condensateur. Par conséquent $i(t = 0^+) = \dfrac{E}{R}$ et la loi des nœuds s'écrit enfin $i(t = 0^+) = C\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) + \dfrac{s(t = 0^+)}{R}$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = \dfrac{E}{RC}$.
   Pour $t \to +\infty$, on remplace les condensateurs par des interrupteurs ouverts. Le courant est donc nul dans le circuit, et nécessairement $s(t \to +\infty) = 0$.
2. Lois des mailles : $E = Ri + u_{c,1} + s(t) = u_{c,2}$. Loi des nœuds $i = C\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{R}$. Et comme $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_{c,1}}{\mathrm{d}t}$, il faut dériver la première loi des mailles :

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \Longleftrightarrow 0 = \left(RC\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{RC}\right) + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{7.77}$$

   conduisant à l'équation :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{RC} + \frac{1}{(RC)^2}s(t) = 0} \tag{7.78}$$

   On pose donc $\tau = RC$.
3. On a l'équation d'un oscillateur amorti, vérifiant $\omega_0^2 = \dfrac{1}{\tau^2}$ donc $\omega_0 = 1/\tau$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{3}{\tau}$ donc $Q = \dfrac{1}{3}$. On est donc dans un régime apériodique car $Q < 1/2$:

$$s(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t} \tag{7.79}$$

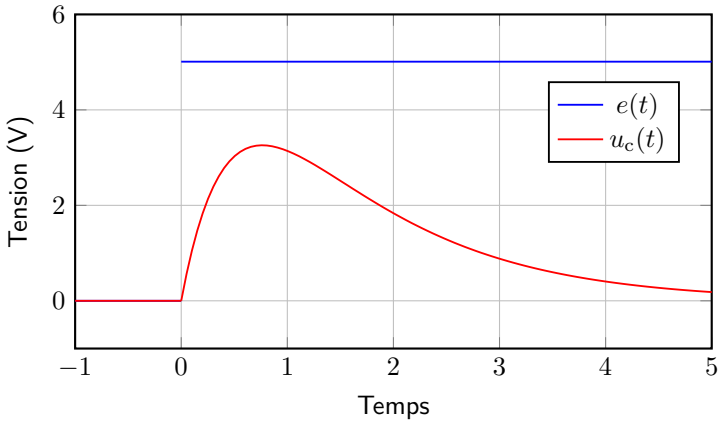
   avec $r_\pm = \dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2} = -\dfrac{3}{2RC}\left(1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{4}{9}}\right) = -\dfrac{3}{2\tau}\left(1 \pm \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Avec les conditions initiales, il vient après calculs (à faire) :

$$A + B = 0 \quad \text{et} \quad r_+ A + Br_- = \frac{E}{RC} \Longleftrightarrow B = -A \quad \text{et} \quad A = \frac{E}{RC(r_+ - r_-)} = -\frac{E}{\sqrt{5}} \tag{7.80}$$

   d'où

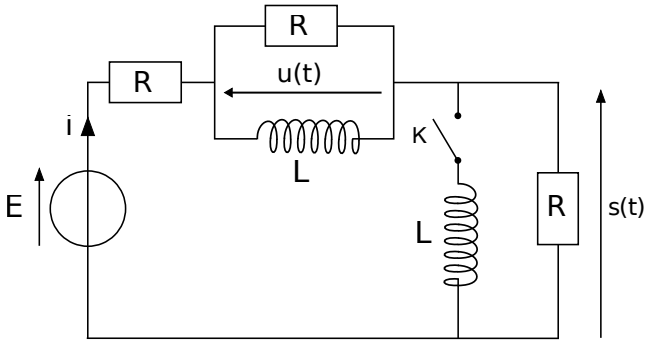
$$s(t) = \frac{E}{\sqrt{5}}\left(e^{r_- t} - e^{r_+ t}\right) \tag{7.81}$$

4. Allure différente de la réponse "classique" à un échelon, car on part de $s = 0$ à $t = 0$ et on tend également vers $s = 0$ pour $t \to +\infty$.



7.5 Réponse d'un circuit à deux bobines

On considère le montage suivant où le générateur est un générateur supposé idéal de tension continue de force électromotrice E. L'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.



1. Déterminer la valeur de s et des courants dans chaque branche à $t = 0$, puis pour $t \to +\infty$.
2. Établir une relation liant u, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.
3. Établir une relation liant s, $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.
4. Établir une relation liant E, s, u et i.
5. Déduire des trois relations précédentes que $3\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{4}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau^2}s = 0$, où τ est un constante à déterminer en fonction des données du problème.
6. Déterminer la forme générale de $s(t)$ (on ne demande pas de calculer les constantes d'intégration).
7. Tracer l'allure de $s(t)$.

Quelques éléments de réponse, en cas d'hésitation, venez me voir !

1. Si l'interrupteur est ouvert depuis très longtemps, la bobine verticale ne contient pas d'énergie. Après calculs, on obtient d'abord à $t = 0^-$, en remplaçant les bobines par des fils :

$$i(0^-) = \frac{E}{2R} = i_L(0^-) = i_{R,2}(0^-)\, i_R(0^-) = 0 = i_{L,2}(0^-), \quad \text{et} \quad s(0^-) = \frac{E}{2} \tag{7.82}$$

À $t = 0^+$, en utilisant la continuité du courant dans les deux bobines : $i_L(0^+) = \dfrac{E}{2R}$ et $i_{L,2}(0^+) = 0$. En écrivant une loi des mailles, on détermine $i(0+)$ sachant que les lois des nœuds conduisent à $i_R = i - i_L$ et $i_{R,2} = i - i_{L,2}$:

$$E = Ri(0^+) + R\left(i(0^+) - \frac{E}{2R}\right) + Ri(0^+) = 3Ri(0^+) - \frac{E}{2} \iff i(0^+) = \frac{E}{2R} \tag{7.83}$$

Donc l'intégralité des courants sont continus, et $s(0^+) = \dfrac{E}{2}$.

Pour $t \to +\infty$, les bobines sont remplacées par des fils, on a donc $s = 0 = u$, et $i = \dfrac{E}{R}$. Les courants dans les deux résistances en parallèle des bobines sont nuls.

2. Loi des mailles dans la maille du haut (L et R) : $u = R(i - i_L) = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$. On dérive u :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - R\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{R}{L}u \tag{7.84}$$

3. De la même façon dans la maille de droite avec la résistance et la bobine :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{R}{L}s \tag{7.85}$$

4. On écrit une loi des mailles dans la maille globale :

$$E = Ri + u + s \tag{7.86}$$

5. Il reste maintenant à les combiner. On dérive la dernière loi des mailles écrite :

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \tag{7.87}$$

Le souci est que $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ dépend de u. On injecte la relation de la question 2., puis celle de la question 4. pour éliminer u :

$$2R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{R}{L}u + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0 = 2R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{R}{L}E + \frac{R^2}{L}i + \frac{R}{L}s + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{7.88}$$

que l'on dérive à nouveau pour faire apparaître $R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}s$:

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{R}{L} \times R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{7.89}$$

On injecte la relation, on développe et on réorganise, et l'on aboutit à

$$\boxed{3\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4R}{L}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 s = 0} \tag{7.90}$$

correspondant à l'équation de l'énoncé en posant $\tau = \dfrac{L}{R}$.

6. On reconnaît l'ED d'un oscillateur amorti de pulsation propre $\omega_0^2 = \dfrac{1}{3\tau^2}$ et de facteur de qualité vérifiant :

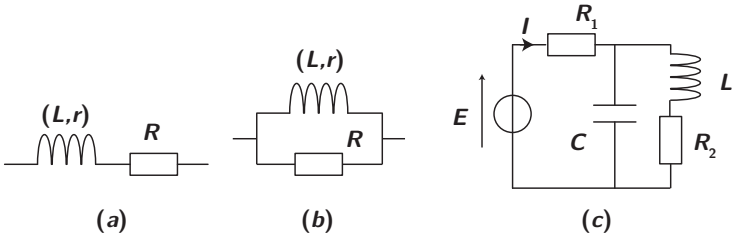
$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{4}{3\tau} \iff Q = \frac{3\omega_0\tau}{4} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}\tau} \times 3\tau}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2} \tag{7.91}$$

On a donc un régime apériodique, de la forme $s(t) = Ae^{r_- t} + Be^{r_+ t}$.

7. Pour le tracé, on se sert du fait que $s(0) = \dfrac{E}{2}$ et que $s(t \to +\infty) = 0$. Enfin, on peut montrer grâce à la question 1 et 3 que $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = -\dfrac{E}{2\tau} < 0$, donc $s(t)$ décroît de $E/2$ vers 0.

7.6 Impédances équivalentes

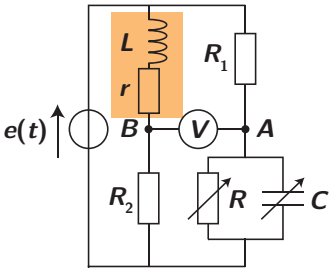
1. Pour les circuits suivants, déterminer les impédances équivalentes (pour le circuit (c), considérer le dipôle branché au générateur).



2. Pour le circuit de droite, quelle est la condition sur les valeurs des composants de sorte que le courant parcouru dans R_1 soit en phase avec la tension aux bornes du générateur ?

7.7 Mesure des caractéristiques d'une bobine par équilibrage d'un pont

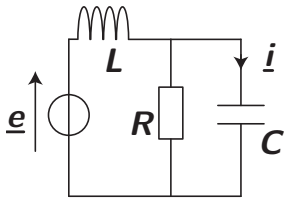
Pour déterminer les caractéristiques d'une bobine réelle, modélisée par l'association série d'une inductance idéale L et d'une résistance r, on place celle-ci dans une structure en pont alimentée par une tension sinusoïdale.



1. Exprimer la tension complexe U_{AB} qui s'applique aux bornes du voltmètre.
2. La capacité C du condensateur et la résistance R sont ajustables. On choisit leur valeur de sorte à annuler la tension lue par le voltmètre. Déterminer l'expression de l'inductance L et de la résistance r en fonction de R, C, R_1 et R_2.

7.8 Circuit en régime sinusoïdal

Considérons le montage ci-dessous, alimenté par une source de tension sinusoïdale de fém $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. On note $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ le courant circulant dans le condensateur de capacité C.



1. Déterminer l'expression complexe du courant $\underline{i}$.
2. En déduire I_m et ϕ.
3. Déterminer à partir de la question 1) l'équation différentielle sur $i(t)$ et en déduire la pulsation propre et le facteur de qualité.

Remarque : lorsqu'on emploie des impédances d'éléments en dérivation, il peut être judicieux de faire apparaître l'admittance $\underline{Y}_{\mathrm{eq}} = \dfrac{1}{\underline{Z}_{\mathrm{eq}}}$ afin de simplifier les calculs.