

Dynamique en référentiel galiléen

Sommaire

2.1 Les lois de Newton (rappels de Terminale)	2
2.1.1 Éléments cinétiques	2
2.1.2 Principe d'inertie	2
2.1.3 Loi de la quantité de mouvement	3
2.1.4 Principe des actions réciproques	3
2.2 Forces et applications	4
2.2.1 Les interactions fondamentales	4
2.2.2 Poids	4
2.2.3 Poussée d'Archimède	5
2.2.4 Force de rappel élastique	5
2.2.5 Réaction du support	6
2.2.6 Forces de frottements fluides	7
2.2.7 Tension d'un fil	10

Questions de cours :

- Donner la loi de la quantité de mouvement et ses conséquences.
- Définir la force de gravitation, le champ gravitationnel créé par un point, et retrouver l'accélération de la pesanteur terrestre et l'expression du poids sur Terre.
- Définir la force de réaction du support, et déterminer l'équation horaire d'une masse glissant sans frottement sur un plan incliné.
- Étudier la chute libre verticale d'un objet subissant des frottements fluides linéaires : modélisation, vitesse limite, temps caractéristique, expression temporelle de la vitesse.
- Étudier le tir balistique pour un objet subissant une force de frottement quadratique : équation différentielle, vitesse limite, discussion du type de trajectoire par une analyse en ordre de grandeur.
- Établir l'équation générale du pendule simple, donner sa solution dans le cas de l'approximation des petits angles.
- L'équation différentielle du pendule simple étant fournie, établir l'expression de l'intégrale première du mouvement, pour en déduire l'allure du portrait de phase de l'oscillateur en précisant le sens de parcours.

Capacités exigibles du BO :

- Établir un bilan des forces sur un système, ou plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur une figure.
- Établir l'expression de la quantité de mouvement d'un système restreint au cas de deux points sous la forme $\vec{p} = m \vec{v}(G)$.
- Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
- Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre d'inertie d'un système fermé.
- Mettre en équation le mouvement sans frottement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant.
- Exploiter la loi d'Archimède.
- Approche numérique : Prendre en compte la traînée pour modéliser une situation réelle.
- Approche numérique : Exploiter une équation différentielle sans la résoudre analytiquement : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats fournis par un logiciel d'intégration numérique.
- Établir l'équation du mouvement du pendule simple.
- Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.
- Établir l'équation du portrait de phase (intégrale première) dans ce cadre et le tracer.

Nous avons décrit dans le chapitre précédent les différents éléments cinématiques du mouvement d'un point matériel ou d'un solide, sans jamais en analyser les causes. C'est donc ce que nous nous proposons de faire maintenant, en nous appuyant sur les lois de Newton, valables encore aujourd'hui à condition d'étudier des systèmes pas trop massiques (sinon relativité générale), pas trop petits (sinon mécanique quantique), ni se déplaçant trop vite (relativité restreinte).

I. Les lois de Newton (rappels de Terminale)

I.1 Éléments cinétiques

i) Masse inertielle

Bien que la trajectoire d'une balle de golf ou de tennis de table puisse être similaire, l'expérience montre qu'il est bien plus difficile de manipuler une balle de golf à l'aide d'une raquette. Il faut pour cela introduire une grandeur qui caractérise la capacité d'un corps à résister au mouvement qu'on souhaite lui imprimer : on parle de **masse inertielle**. On parle également de **masse pesante** (qui intervient dans l'interaction gravitationnelle), mais l'expérience montre que ces deux masses sont complètement identiques.

ii) Quantité de mouvement

On rappelle la définition de la **quantité de mouvement** pour un point matériel de masse m se déplaçant à la vitesse \vec{v} :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.1)$$

Dans le cas d'un système plus complexe composé de deux points matériels M_1 et M_2 de masse respective m_1 et m_2 , on peut définir le centre de gravité G vérifiant

$$(m_1 + m_2)\vec{OG} = m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2 \quad (2.2)$$

(avec O un point quelconque). En dérivant cette relation par rapport au temps on a

$$(m_1 + m_2)\frac{d\vec{OG}}{dt} = m_1\frac{d\vec{OM}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{OM}_2}{dt} \Leftrightarrow (m_1 + m_2)\vec{v}_G = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{p} \quad (2.3)$$

Ainsi pour un tel système la quantité de mouvement est celle de son centre de gravité affecté de la masse totale $m = m_1 + m_2$.

Cette notion se généralise, c'est pourquoi l'étude d'un solide indéformable peut souvent être ramenée à l'étude de son centre de gravité, le poids s'exerçant au niveau de G .

I.2 Principe d'inertie

a) Énoncé

On dit d'un point matériel qu'il est **isolé** s'il n'est soumis à aucune interaction avec l'extérieur. C'est évidemment une approximation, car il existe des interactions à portée infinie.

Principe d'inertie

* Il existe une classe de référentiels appelés **référentiels galiléens** dans lesquels tout point matériel isolé persévère dans son état de repos ou est en mouvement rectiligne uniforme.

Une conséquence directe de ce principe est que les **référentiels galiléens sont nécessairement en translation rectiligne les uns par rapport aux autres**.

b) Exemples de référentiels galiléens

À proprement parler, il n'existe aucune preuve de l'existence d'un référentiel galiléen, on ne peut que l'admettre tant qu'aucune observation expérimentale ne la met en défaut. En réalité, beaucoup de référentiels peuvent être considérés comme galiléens, tout dépend de la durée du phénomène étudié :

- **référentiel terrestre / laboratoire** : référentiel centré au niveau d'un point de la Terre avec ses axes liés à la rotation terrestre et adapté pour des expériences de l'ordre de quelques minutes ;
- **référentiel géocentrique** : référentiel prenant pour origine le centre de la Terre, avec ses axes pointant vers trois étoiles lointaines supposées fixes, et adapté pour des expériences où l'on peut négliger le mouvement orbital autour du Soleil (typiquement pour le mouvement de satellites) ;

Il s'agit en fait de la moyenne des distances entre les deux points matériels, pondérée par leurs masses respectives. On donne ainsi une idée de la répartition de masse, si G est plus proche de M_1 ou M_2 .

- **référentiel héliocentrique** : référentiel prenant pour origine le centre du Soleil, avec ses axes pointant vers trois étoiles lointaines supposées fixes, adapté pour des expériences très longues de plusieurs milliers d'années (typiquement le mouvement des planètes).

Il est possible de travailler avec des référentiels non galiléens, possédant un mouvement **accélééré** par rapport à un référentiel galiléen, mais ce ne sera pas abordé en PTSI/PT.

I.3 Loi de la quantité de mouvement

a) Notion de force

Le mouvement d'un système peut être modifié s'il subit des interactions avec l'extérieur, que l'on regroupe dans la dénomination de **force** :

Définition

Une force est une grandeur vectorielle décrivant l'interaction capable de modifier et/ou produire un mouvement ou une déformation du système.

On étudiera dans la section suivante un grand nombre de forces classiquement rencontrées en mécanique.

b) Énoncé

On peut maintenant faire le lien entre l'aspect cinétique (\vec{p}) et dynamique (interactions, forces) à l'aide de la loi de la quantité de mouvement (ou principe fondamental de la dynamique, ou encore 2e loi de Newton) :

Loi de la quantité de mouvement (LQM)

* Pour un point matériel M de masse m dont on étudie le mouvement dans un référentiel galiléen, et subissant des forces $\{\vec{F}_i\}$ **extérieures au système**, la quantité de mouvement vérifie

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.4)$$

c) Conséquences

- Si le système est pseudo-isolé, c'est-à-dire que la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système est nulle, alors il suit un mouvement rectiligne uniforme car $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ soit $\vec{p} = \text{cste}$;

- si la masse du système est constante, on retrouve une forme simplifiée de la LQM :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.5)$$

- un système est à l'équilibre s'il vérifie $\vec{p} = \vec{0}$, ce qui implique que $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ (que l'on appelle souvent **principe fondamental de la statique**).

Ce n'est pas le cas d'une fusée par exemple, car sa masse diminue du fait de la consommation de carburant

I.4 Principe des actions réciproques

Conséquence de la loi de la quantité de mouvement, si on considère deux systèmes M et « l'extérieur » tels que l'ensemble est isolé, on peut écrire que $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} + \vec{F}_{M \rightarrow \text{ext}}$ conduisant au principe des actions réciproques :

Principe des actions réciproques

Si le milieu extérieur à un système M exerce la force $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M}$, alors le système exerce la force $\vec{F}_{M \rightarrow \text{ext}}$ sur le milieu extérieur tel que

$$\vec{F}_{M \rightarrow \text{ext}} = -\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} \quad (2.6)$$

c'est-à-dire une **force réciproque de même intensité et de sens opposé**.

Cela signifie donc qu'une pomme chutant sur la Terre exerce la même force que la Terre sur la pomme mais, fort heureusement grâce à la différence de masse, l'accélération de la Terre due à cette chute est infiniment petite !

II. Forces et applications

II.1 Les interactions fondamentales

On peut distinguer quatre types d'interactions fondamentales en physique :

- **l'interaction gravitationnelle** : interaction attractive entre deux objets massiques, de portée infinie ;
- **l'interaction électromagnétique** : elle gouverne la plupart des interactions à notre échelle et caractérise la répulsion ou attraction de charges ou de corps chargés. Elle aussi est de portée infinie ;
- **l'interaction forte** : force de courte portée (échelle du noyau, soit 10^{-15} m) permettant la stabilité des noyaux en limitant la répulsion entre protons et permet la cohésion entre neutrons et protons ;
- **l'interaction faible** : de portée encore plus petite (10^{-17} m) et d'intensité plus faible, elle concerne toutes les particules de matière, et explique la radioactivité β .

La quasi-totalité des forces qui suivent sont des forces **s'expliquant au niveau microscopique par les interactions électromagnétiques**.

II.2 Poids

a) Définition

L'une des forces les plus simples à nos yeux, le poids est la conséquence de l'interaction gravitationnelle. Pour une masse m se situant autour de la Terre à une distance r de son centre, elle subit une force (en paramétrage sphérique) :

$$\vec{F}_g = -\frac{Gmm_T}{r^2}\vec{e}_r \quad (2.7)$$

avec $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ la constante gravitationnelle. Si on se place à la surface terrestre, on peut la réécrire :

$$\vec{P} = -\frac{Gmm_T}{R_T^2}\vec{e}_z = m\vec{g} \quad (2.8)$$

avec $\vec{g} = -\frac{Gm_T}{R_T^2}\vec{e}_z = -g\vec{e}_z$ localement : $R_T \simeq 6400$ km étant le rayon terrestre, $m_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg, on trouve $g \simeq 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ à notre latitude.

b) Exemple



Exercice

Déterminer la profondeur d'un puits si la chute d'une masse provoque un son au bout de 3,1s. On donne $c_{\text{son,air}} = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On applique la LQM à la masse dans le référentiel du laboratoire. En projection sur l'axe vertical orienté vers le bas, il vient $\ddot{z} = g$. Il vient $\dot{z} = gt$ et $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$. La masse touche le fond pour un

temps t vérifiant $h = \frac{1}{2}gt^2$, et le son met ensuite un temps $t_s = h/c_{\text{son,air}}$ a priori négligeable. AN : $h = 47$ m sans prendre en compte le temps de propagation du son, et $h = 43$ m si on en tient compte.

11.3 Poussée d'Archimède

L'expérience estivale d'un individu dans une mer turquoise montre que la gravité que l'on ressent dans l'eau est réduite, de par une force communément appelée **poussée d'Archimède**. Cette force correspond à la **résultante des forces de pression du fluide qui entoure le système** et s'exprime par

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergé}} \vec{g} \quad (2.9)$$

Elle s'oppose à la gravité et correspond à l'**opposé du poids du volume de fluide déplacé**.

Ainsi si la masse volumique du fluide est comparable à celle du système, les deux forces peuvent se compenser, ce qui explique la flottaison d'un corps humain, mais également qu'un glaçon est partiellement immergé (car $\rho_{\text{glace}} < \rho_{\text{liquide}}$).

Exercice

Déterminer la fraction immergée d'un glaçon cubique sachant que la masse volumique de la glace est $\rho_{\text{glace}} = 920 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\rho_{\text{eau}} = 1,02 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ pour celle de l'eau salée.

On applique le PFS qui implique que $m\vec{g} - \rho_{\text{eau}} V_{\text{imm}} \vec{g} = \vec{0}$. En projection, cela permet d'écrire $m = \rho_{\text{eau}} V_{\text{imm}} = \rho_{\text{glace}} V$. Donc $\frac{V_{\text{imm}}}{V} = \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{eau}}} = 0,90$, soit 10% visible.

11.4 Force de rappel élastique

Lorsqu'on accroche une masse à un ressort, le fait de tendre ou comprimer le ressort par rapport à sa longueur naturelle génère une force, dite de rappel élastique, sur la masse. Cette dernière se caractérise par deux paramètres :

- la **raideur** du ressort k , exprimée en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Plus elle est élevée, plus le ressort est rigide. À l'inverse, un ressort de raideur faible est souple ;
- la **longueur à vide** ℓ_0 . C'est la longueur naturelle du ressort, lorsqu'il n'est ni contracté ni étiré.

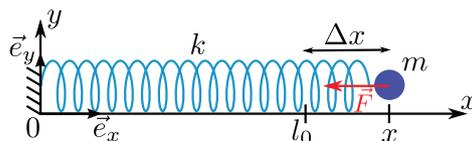
Force de rappel élastique 1

Soit $\ell(t)$ la longueur du ressort à l'instant t . La **force de rappel élastique** \vec{F} que le ressort exerce sur la masse attachée à son extrémité admet pour norme :

$$F = k |\ell(t) - \ell_0| \quad (2.10)$$

et pour direction l'axe du ressort. Le sens est enfin donné par le sens physique : si le ressort est comprimé, la force est telle que le ressort pourrait reprendre sa longueur naturelle.

Cette expression est intuitive : la force tend à ramener le ressort à sa position naturelle et ce d'autant plus que la raideur k et l'**allongement** $\Delta\ell$ sont importants.



Pour connaître l'expression vectorielle, il convient donc d'utiliser son sens physique : considérons par exemple que le ressort est comprimé et horizontal, alors $\ell(t) < \ell_0$, et le ressort va chercher à retrouver sa longueur initiale en exerçant une force dirigée selon \vec{e}_x , d'où

$$\vec{F} = +k |\ell - \ell_0| \vec{e}_x = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{e}_x \quad (2.11)$$



Exercice

Considérons un amortisseur de voiture accroché d'une part à l'essieu de la roue, et d'autre part à la carcasse de la voiture.. On considère un axe vertical orienté vers le haut. Préciser l'expression vectorielle de la force exercée par le ressort sur la carcasse, et celle exercée sur la roue.

En prenant pour origine du repère le sol, $\vec{F}_{\text{carcasse}} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z$, et $\vec{F}_{\text{roue}} = +k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z$.

II.5 Réaction du support

a) Définition

Lorsque l'on pose un objet sur un support, ce dernier l'empêche de tomber en exerçant sur lui une force \vec{R} dirigée de la surface vers l'objet. On peut en réalité distinguer deux composantes :

- la **composante normale**, notée souvent \vec{N} ou \vec{R}_N , perpendiculaire à la surface de contact entre l'objet et le support et dirigée vers l'extérieur du support ;
- la **composante tangentielle**, notée souvent \vec{T} ou \vec{R}_T , tangente à la surface correspondant :
 - lorsque le solide est immobile à l'action du support qui empêche le mouvement malgré l'application d'une autre force ;
 - lorsque le solide est en mouvement elle correspond à une **force de frottements solide** s'opposant au mouvement, donc **dans le sens opposé du vecteur vitesse** \vec{v} .



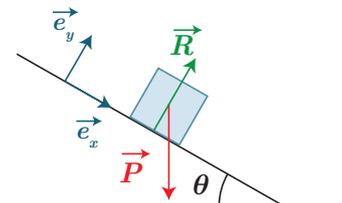
La réaction normale ne possède pas d'expression propre, seule sa direction est connue *a priori*, sa norme peut seulement l'être *a posteriori* une fois que l'on connaît les équations du mouvement. Ainsi la priorité dans une situation physique où un contact solide est présent est d'éliminer cette inconnue.

Contact et rupture entre deux solides

- * Le contact est assuré tant que $\|\vec{N}\| \neq 0$. Il y a rupture de contact lorsque $\vec{N} = \vec{0}$, situation physique pouvant parfois être recherchée.

b) Un premier exemple

Étudions par exemple un cube glissant sans frottements sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontal, lâché sans vitesse initiale. On choisit un repère cartésien, adapté à la situation, prenant pour origine la position initiale de la masse.



Exercice

Déterminer la position de la masse au cours du temps.

On applique la LQM à la masse dans le référentiel du laboratoire :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \quad (2.12)$$

Étant donné le contact avec le support, le mouvement s'effectue exclusivement selon l'axe (Ox) . On projette donc cette relation vectorielle selon cet axe :

$$m\ddot{x} = +mg \sin \theta + 0 \quad (2.13)$$

que l'on intègre en $\dot{x} = g \sin \theta t$ puis enfin $x(t) = \frac{1}{2}g \sin \theta t^2$: tout se passe comme si la gravité avait été diminuée, c'est ici l'effet du support incliné.

Astuce lors de la projection d'une force

Pour vérifier une projection, prendre un angle particulier, par exemple $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$.

Dans l'exemple précédente, la projection est nulle pour $\theta = 0$, car \vec{P} verticale; \vec{P} est dirigée intégralement selon l'axe (Ox) pour $\theta = \pi/2$, on obtient donc bien la norme de \vec{P} après projection.

On obtient également la norme de la réaction du support en projetant la LQM selon l'axe (Oy) : $0 = -mg \cos \theta + N$ soit $N = mg \cos \theta$.



la réaction du support ne compense pas toujours intégralement le poids.

c) Les lois de Coulomb (HP)

Ces lois ne sont pas clairement au programme, néanmoins elles pourront vous être données, libre à vous ensuite de savoir les appliquer. Il s'agit de lois phénoménologiques permettant de faire le lien entre les deux composantes de la réaction du support :

- une absence de glissement implique $\|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$ avec μ_s coefficient de frottement statique, sans dimension ;
- le glissement implique $\|\vec{T}\| = \mu_d \|\vec{N}\|$ avec $\mu_d < \mu_s$ coefficient de frottement dynamique, sans dimension

Le fait que $\mu_d < \mu_s$ s'explique par le fait le déplacement implique une surface de contact moindre (des contacts sont forcément rompus entre le système et le support lors du mouvement).



Il ne s'agit que d'implications !

En particulier, le glissement se produit dès que la première condition n'est plus respectée. Les coefficients de frottements ne dépendent que des deux surfaces mises en contact, et pas de l'aire de la zone de contact.

Exercice

Déterminer le coefficient de frottement statique du contact bois sur bois pour un plan incliné si le glissement se produit à partir d'un angle de 22° .

On applique la loi de la statique et on projette suivant les deux axes du plan :

$$\begin{cases} 0 = -mg \cos \alpha + N & (2.14) \\ 0 = mg \sin \alpha - T & (2.15) \end{cases}$$

Il y a glissement dès que T dépasse la valeur $T_{\text{lim}} = \mu_s N$ ce qui se traduit par

$$mg \sin \alpha > \mu_s mg \cos \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha > \mu_s = \tan(\alpha_{\text{lim}}) = 0,40 \quad (2.16)$$

Exercice

Déterminer l'angle du plan incliné à partir duquel le solide, initialement en mouvement, va finir par s'arrêter.

Dans le cas où il y a glissement, les relations obtenues dans l'exercice précédent se réécrivent

$$\begin{cases} 0 = -mg \cos \alpha + N & (2.17) \\ m\ddot{x} = mg \sin \alpha - T = mg \sin \alpha - \mu_d N & (2.18) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\ddot{x} = g \sin \alpha - \mu_d g \cos \alpha = g \cos \alpha (\tan \alpha - \mu_d) \quad (2.19)$$

Le mouvement est donc décéléré et le solide finira par s'arrêter à condition que $\tan \alpha < \mu_d$. On constate que les angles limites trouvés dans cet exemple et le précédent diffèrent : il s'agit d'un phénomène d'hystérésis !

II.6 Forces de frottements fluides

a) Deux types de frottements fluides

Pour le moment nous allons considérer deux types de forces de frottement fluide, en distinguant vitesse "faible" et vitesse "élevée" (mais il faudra attendre la mécanique des fluides pour être plus quantitatif) :

- à faible vitesse,

$$\vec{F} = -h\vec{v} \quad (2.20)$$

avec h coefficient de frottement de fluide (en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$), dépendant du fluide et de la forme de l'objet autour duquel le fluide s'écoule ;

- pour des vitesses plus importantes, il est nécessaire de prendre un modèle quadratique

$$\vec{F} = -kv\vec{v} \quad (2.21)$$

proportionnel au carré de la norme du vecteur vitesse instantanée; k étant aussi un coefficient de frottements (exprimé en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$).

Souvent c'est l'expérience qui nous guide dans ce choix, le plus simple étant de prendre la forme linéaire, de confronter à l'expérience et changer de modèle si besoin.

b) Chute libre avec frottements

Prenons un premier exemple, à savoir un saut en chute libre d'un parachutiste. Heureusement pour lui, on constate qu'il n'accélère pas sans cesse, il finit par atteindre une vitesse limite, ce qu'un modèle sans frottements ne permet pas de modéliser (vitesse croissante avec le temps).



Exercice

En supposant que le parachutiste est soumis au poids et à une force de frottements fluide linéaire, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse verticale. On prendra un axe vertical orienté vers le bas.

L'application de la LQM dans le référentiel terrestre supposé galiléen conduit à

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} \Leftrightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - h\vec{v} \quad (2.22)$$

qui se réécrit sous la forme

$$\frac{m}{h}\frac{dv}{dt} + \vec{v} = \frac{m\vec{g}}{h} \quad (2.23)$$

que l'on peut projeter selon l'axe vertical (Oz) orienté vers le bas en posant $\tau = \frac{m}{h}$:

$$\tau\frac{dv_z}{dt} + v_z = \frac{mg}{h} \quad (2.24)$$

Il s'agit d'une équation du premier ordre à coefficient constant, que l'on peut résoudre :

- la solution de l'équation homogène est de la forme $v_{z,h} = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$;
- la solution particulière correspond au régime permanent $v_\ell = \frac{mg}{h}$;
- la condition initiale $v_z(t=0) = 0$ permet enfin de trouver la valeur de K .

*

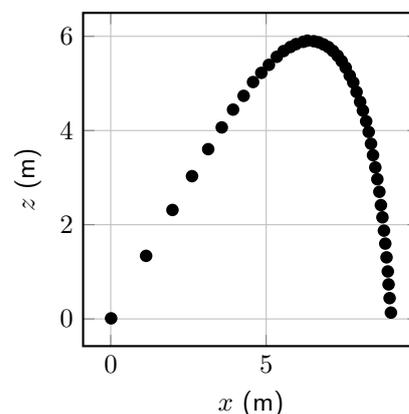
$$v_z(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + v_\ell = v_\ell \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (2.25)$$

On a donc d'abord un régime transitoire où la vitesse croît, puis finalement devient constante en régime permanent : **la force de frottements compense exactement le poids et le mouvement est rectiligne et uniforme.**

c) Tir balistique

i) Insuffisance du modèle de frottement linéaire

Prenons maintenant l'exemple d'un volant de badminton envoyé avec une vitesse initiale faisant un angle θ avec l'horizontale, dont la trajectoire est représentée ci-contre, où les mesures des différents points ont été réalisées à intervalles réguliers.

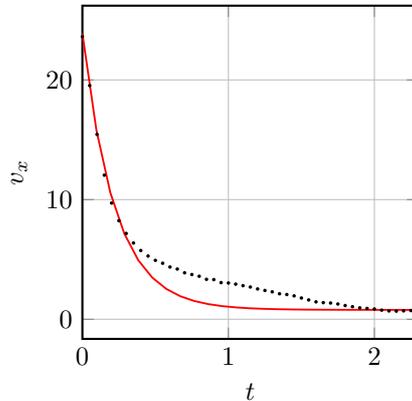


Exercice

En supposant que le volant subisse une force de frottement linéaire, déterminer l'expression de $v_x(t) = \dot{x}$ au cours du temps.

En projetant la LQM selon l'axe horizontal, il vient $\tau \frac{dv_x}{dt} + v_x = 0$ de solution $v_x(t) = v_{x,0} e^{-t/\tau}$, où l'on a posé $\tau = m/h$.

On constate en traçant la vitesse horizontale au cours du temps que le modèle exponentiellement décroissant ne semble pas fonctionner :



ii) Modification du modèle

Voyons ce que cela change lorsqu'on choisit maintenant une force de frottements quadratique. La LQM se réécrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - kv\vec{v} \quad (2.26)$$

Cette équation est non-linéaire, elle n'est donc pas soluble analytiquement. En régime permanent, le poids compense la force de frottements, et la vitesse s'écrit $\vec{v}_\ell = -v_\ell \vec{e}_z$ (le poids oriente le mouvement selon $-\vec{e}_z$). Ainsi $m\vec{g} = kv_\ell \vec{v}_\ell = -kv_\ell^2 \vec{e}_z$ et une projection selon l'axe vertical aboutit à $v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

Cela nous permet de réécrire l'équation sous la forme :

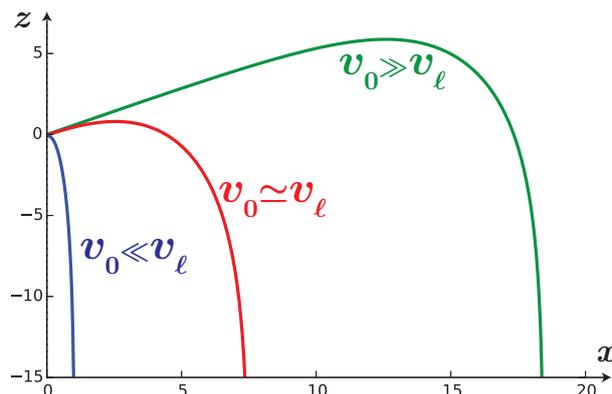
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = k(v_\ell \vec{v}_\ell - v\vec{v}) \quad (2.27)$$

Même si on ne peut résoudre l'équation, on peut raisonner en terme d'**ordres de grandeur** en comparant les deux forces mises en jeu (le poids et la force de frottements), et donc la vitesse initiale par rapport à la vitesse limite v_ℓ :

*

- si la vitesse initiale est très petite devant v_ℓ , la force de frottements fluide est négligeable au début du mouvement, et l'on a quasiment un mouvement de chute libre sans frottements, jusqu'à atteindre une vitesse limite ;
- si la vitesse initiale est très grande devant v_ℓ , au contraire c'est la force de frottements qui est prédominante : on va avoir un mouvement rectiligne décéléré jusqu'à ce que le poids prenne de l'importance, et s'en suit la phase de chute libre ;
- si enfin la vitesse initiale est du même ordre de grandeur que v_ℓ , les résultats sont identiques à la fin du mouvement observé dans le cas précédent.

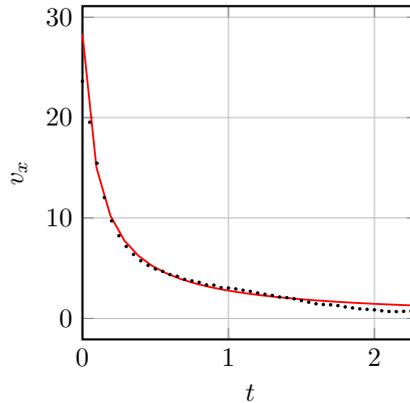
Cela est illustré sur les trajectoires possibles ci-dessous :



Notons que la projection de la LQM selon les deux axes donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} & (2.28) \\ m\ddot{y} = -k\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} & (2.29) \end{cases}$$

qui n'est pas soluble analytiquement. On peut par conséquent effectuer une résolution numérique à l'aide de Python, ce qui nous permet de confronter la solution numérique avec les mesures et ainsi conforter ce modèle :



II.7 Tension d'un fil

a) Définition

Une dernière force rencontrée couramment est la **tension du fil** \vec{T} . En effet, un fil maintenu tendu par l'intermédiaire d'une masse exerce sur cette dernière une force. De plus, le fil transmet de proche en proche cette force en module et en direction sur toute sa longueur.

Quelques propriétés sont à noter :

- à l'instar de la réaction du support, la norme de cette force est inconnue *a priori* et se détermine une fois connues les équations du mouvement ;
- dans le cas où le fil passe par une poulie, il transmet intégralement la norme de la force (mais la direction change) ;
- dans le cas d'un fil souple, il se détend si $T = 0$.

b) Exemple du pendule simple

i) Mise en équation

Prenons l'exemple d'un pendule simple, constitué d'un fil de longueur ℓ fixé en O et tendu par une masse m accrochée à son extrémité mobile. Déterminons les équations du mouvement de la masse.

Sur la masse s'exercent deux forces : le poids \vec{P} et la tension du fil \vec{T} orientée en direction du fil. On va appliquer la LQM dans le référentiel du laboratoire et, comme la distance à l'axe est constante et vaut ℓ , il paraît judicieux d'employer les **coordonnées polaires**.

On a donc :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \quad (2.30)$$

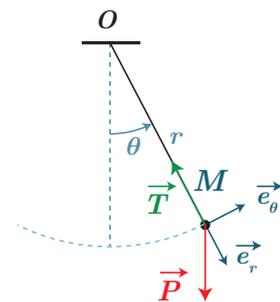
que l'on va projeter. Étant donné que l'on ne connaît pas \vec{T} , on va projeter selon \vec{e}_θ :

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (2.31)$$

qui se réécrit :

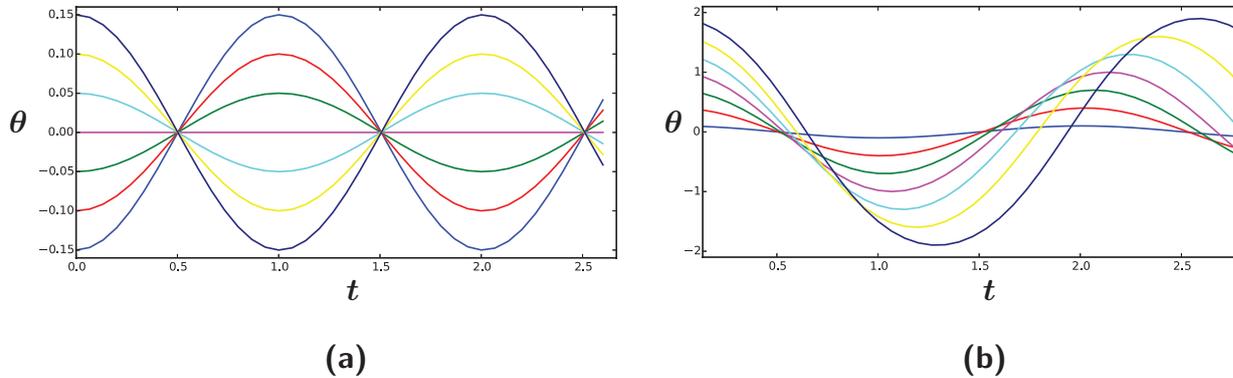
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (2.32)$$

en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ la pulsation propre du système. C'est l'équation différentielle associée à un pendule simple.



ii) Résolution numérique

Cette équation n'est pas linéaire, on ne peut qu'effectuer une résolution numérique. On représente ci-dessous plusieurs tracés de $\theta(t)$ selon la valeur de l'angle initial θ_0 (vitesse initiale nulle) :



On constate que pour de faibles angles initiaux (figure (a)), on a des oscillations ressemblant à des portions de sinusoides, toutes possédant la même période : on parle d'**isochronisme des petites oscillations**. Alors que pour des angles initiaux plus importants (ou des vitesses initiales importantes, également), on semble toujours avoir un mouvement périodique, mais de période dépendant de la position initiale (figure (b)).

iii) Cas des oscillations de faible amplitude

Dans le cas où $\theta \ll 1$, on peut approximer $\sin \theta$ à θ (on parle alors de **linéarisation de l'équation différentielle**), et l'on aboutit à l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (2.33)$$

de pulsation caractéristique ω_0 . La solution générale est de la forme $\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ et l'on détermine A et B à l'aide des conditions initiales.

iv) Portrait de phase

On peut également déterminer l'équation du portrait de phase en passant par **l'intégrale première du mouvement**. Pour l'établir, on multiplie l'équation différentielle par la vitesse angulaire $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} + \omega_0^2 \dot{\theta} \theta = 0 \quad (2.34)$$

Puis l'on fait apparaître des dérivées :

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} + \omega_0^2 \frac{1}{2} \frac{d\theta^2}{dt} = 0 \quad (2.35)$$

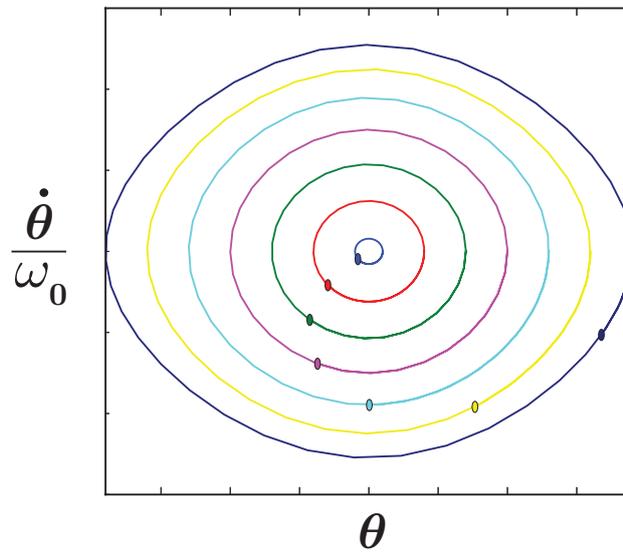
qui s'intègre en

$$\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \theta^2 = \text{cste} \quad (2.36)$$

la constante dépendant des conditions initiales.

On reconnaît là l'équation d'une ellipse. Il s'agira de cercles si on trace non pas $\dot{\theta}$ en fonction de θ

mais $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ en fonction de θ (car alors $\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 + \theta^2 = \text{cste}$).



Ci-dessus est représenté le portrait de phase pour différentes valeurs de θ_0 (correspondant aux différentes valeurs de la courbe (b)), on constate que pour les faibles angles on a bien un cercle, qui se déforme à mesure que l'angle initial est grand.

2.1 Faire des bonds sur la Lune

Dans l'album de Tintin "On a marché sur la Lune", le Capitaine Haddock est étonné de pouvoir faire un bond beaucoup plus grand que sur Terre. On va tenter de quantifier cela. On assimile le mouvement du Capitaine à celui de son centre de gravité M de masse m . Il saute depuis le sol lunaire avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle $\alpha = 35^\circ$ avec le sol. On note g_ℓ l'accélération de la pesanteur sur la Lune.

1. Établir les équations du mouvement.
2. Déterminer l'expression de la distance horizontale parcourue au cours du saut en fonction de v_0 , g_ℓ et α .
3. Sur la Lune, la pesanteur est environ six fois moins forte que sur Terre. Quel est l'ordre de grandeur de la distance horizontale parcourue par le Capitaine sur la Lune ?

2.2 Effet du frottement exercé par un fluide animé d'une vitesse uniforme

Une bille de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . L'ensemble est soumis au champ de pesanteur uniforme vertical de norme g et l'action d'un vent dont le champ de vitesse est uniforme de norme v_0 . Le référentiel terrestre est galiléen, on utilise la base cartésienne d'axe horizontal Ox orienté dans le sens du vent et d'axe Oz vertical ascendant. On prendra un modèle linéaire du frottement, de coefficient α .

1. En se plaçant dans le référentiel de la bille, expliquer en quoi il y a bien une force de frottements fluides qui s'exerce sur la bille.
2. Faire un schéma sur lequel sont représentées les forces s'exerçant sur la bille.
3. Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre ℓ_{eq} et l'angle θ_{eq} qu'il forme avec la verticale à l'équilibre.
4. Vérifier la cohérence des résultats en examinant l'influence des différents paramètres.

2.3 Déménageur

Un déménageur cherche à déplacer une caisse en bois remplie, posée sur du parquet. Il veut la faire glisser en la tirant. Comment doit-il tirer la caisse pour exercer l'effort le plus faible possible ? Horizontalement ? verticalement ? de manière oblique ? Dans ce dernier cas, on précisera l'angle. Ce résultat dépend-il de la nature du revêtement du sol ?

Il s'agit d'une résolution de problème : on attend une modélisation, une schématisation. Bien préciser les lois physiques employées, réaliser des calculs littéraux, et critiquer enfin le résultat obtenu.

2.4 Bille sur un plateau

Sur un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 est accrochée une plaque de masse M . On pose une bille de masse m sur la plaque. On suppose qu'il n'y a pas de mouvement de rotation du plateau, que la bille ne se translate pas horizontalement. On néglige enfin les frottements de l'air.

1. Décrire le mouvement quand la bille reste au contact de la plaque. On considère une vitesse initiale nulle et la compression du ressort d'une longueur a par rapport à la position d'équilibre. On notera ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur.
2. En calculant la réaction de la plaque sur la bille, donner la condition de non-décollage de la bille au cours des oscillations du système en fonction de a , ω_0 et g .

Indication : se demander pour chaque question le système à étudier.

2.5 Jeux aquatiques

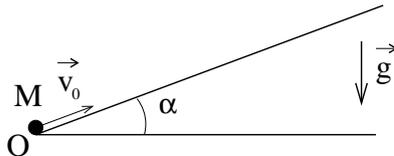
Un baigneur de masse $m = 80$ kg de densité approximative $d = 0,9$ saute d'un plongeur situé à une hauteur $h = 10$ m de la surface de l'eau. On considère qu'il se laisse chuter sans vitesse initiale et qu'il est uniquement soumis à la force de pesanteur durant la chute libre (absence de frottements). On note (Oz) l'axe vertical descendant, O étant au niveau de la surface de l'eau.

1. Peut-on négliger l'influence de la poussée d'Archimède dans l'air ?
2. Déterminer la vitesse d'entrée v_e dans l'eau ainsi que le temps de chute t_c , et effectuer les applications numériques.

- Lorsqu'il est dans l'eau, le baigneur ne fait aucun mouvement et subit, en plus de la pesanteur une force de frottements $\vec{F}_f = -h \vec{v}$ où $h = 250 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et la poussée d'Archimède. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse en projection sur (Oz) . On posera $\tau = \frac{m}{h}$
- Résoudre cette équation en posant $t' = t - t_c$ de sorte à étudier le mouvement pour $t' > 0$.
- Déterminer la vitesse limite v_L et effectuer l'application numérique. Discuter de son signe. Est-ce normal ?
- À quel instant le baigneur commence-t-il à remonter ?
- En déduire la profondeur minimale du bassin pour effectuer le plongeon en toute sécurité.

2.6 Mouvement rectiligne et frottement solide

On considère le dispositif de la figure ci-dessous :



L'objet de masse m (qu'on assimilera à un point matériel), est lancé vers le haut depuis O avec une vitesse \vec{v}_0 parallèle au plan incliné.

Le mouvement du mobile s'effectue avec un frottement solide. La force que le support exerce sur le mobile est modélisée par $\vec{F} = \vec{N} + \vec{T}$ où \vec{T} est la composante tangentielle de la réaction du support et \vec{N} est la composante normale de la réaction du support. On rappelle les lois de Coulomb :

- tant que le mobile est en mouvement, $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$;
- le mobile est immobile si et seulement si $\|\vec{T}\| < f_s \|\vec{N}\|$.

On précise que $f_d < f_s < 1$.

- Faire un schéma clair représentant toutes les forces s'appliquant sur le mobile au cours de son mouvement.
- En utilisant la loi de la quantité de mouvement, déterminer la position du mobile tant qu'il est en mouvement.
- Déterminer la position x_f du mobile quand sa vitesse s'annule.
- Déterminer la condition sur l'angle α pour que l'objet reste ensuite immobile sur le plan incliné.
- Considérons enfin le cas d'un mouvement descendant avec une vitesse v_0 . À quelle condition s'arrête-t-il ?

2.7 Chaussette et sèche-linge

Dans le tambour d'un sèche-linge, on observe que le mouvement d'une chaussette s'effectue en deux temps :

- elle est d'abord entraînée par le tambour dans un mouvement de rotation uniforme ;
- elle retombe dans un deuxième temps en chute libre.

L'observation montre qu'elle retombe à chaque tour depuis le même endroit du tambour, lieu que l'on cherche à déterminer. On modélise le tambour par un cylindre de rayon $R = 25 \text{ cm}$ tournant à 50 tours/min. On s'intéresse au mouvement de la chaussette, qu'on assimile à un point matériel M de masse m . On étudie la première phase pendant laquelle le linge est entraîné dans un mouvement de rotation circulaire et uniforme à la même vitesse que le tambour tout en restant collé aux parois du tambour.

- Déterminer l'accélération de la chaussette. On utilisera des coordonnées adaptées.
- En déduire la réaction normale du tambour sur la chaussette, ainsi que la réaction tangentielle.
- Montrer que la réaction normale s'annule lorsque la chaussette atteint un point dont on déterminera la position angulaire.
- Que se passe-t-il en ce point ? Quel est le mouvement ultérieur ? Tracer l'allure de la trajectoire.