Les oscillateurs mécaniques, analogies avec l'électrocinétique

Sommaire

2.1 L'oscillateur harmonique mécanique 2
2.1.1 Mise en équation 2
2.1.2 Approche énergétique 2
2.2 Oscillateurs amortis : analogie électromécanique 4
2.2.1 Approche qualitative 4
2.2.2 Mise en équation 5
2.2.3 Analogie 5
2.3 Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé 6
2.3.1 Observations expérimentales 6
2.3.2 Étude du régime sinusoïdal forcé 7
2.3.3 Résonance en élongation 8
2.3.4 Résonance en vitesse 9

Questions de cours :

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse pour un système masse-ressort horizontal dont les frottements sont négligés, puis en tenant compte des frottements. En déduire l'expression de la pulsation propre et du facteur de qualité.
- À partir de la position de la masse m $x(t) = \ell_0 + x_0 \cos \omega_0 t$ et de $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ où k est la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide, vérifier la conservation de l'énergie mécanique du système masse-ressort horizontal.
- Établir l'équation différentielle vérifiée par un oscillateur masse-ressort vertical accroché à un plafond oscillant de position $z_p(t) = a \cos \omega t$. Après changement de variable, établir l'expression de l'amplitude complexe de la position de la masse.
- Présenter l'analogie électromécanique entre le système masse-ressort et le circuit RLC par le biais d'exemples (forme d'équation en régime libre, grandeurs physique, régime forcé).

Capacités exigibles du BO :

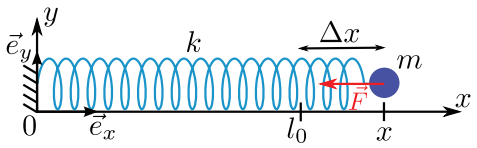
- Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique. La résoudre compte tenu des conditions initiales.
- Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- Contrôler la cohérence de la solution obtenue avec la conservation de l'énergie mécanique, l'expression de l'énergie potentielle élastique étant ici affirmée.

Manipulations de cours :

- Résonance d'un système masse-ressort vertical dans l'air et dans l'eau.
- Animation associée :
  http : //www.sciences.univ − nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php

I. L'oscillateur harmonique mécanique

I.1 Mise en équation



Considérons l'expérience suivante : une masse m est attachée à un ressort et est libre de se déplacer horizontalement, et pour simplifier selon une seule direction. Nous allons négliger les frottements de la masse sur le sol : la réaction du support est donc verticale. Dans toute la suite, on étudie le système {**masse**} dans le **référentiel du laboratoire considéré comme galiléen**.



Exercice

Après avoir exprimé la force de rappel élastique vectorielle, en déduire l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ de la masse.

Appliquons la deuxième loi de Newton, encore appelée loi de la quantité de mouvement ou principe fondamental de la dynamique (PFD) à la masse, en se plaçant dans le référentiel galiléen :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} \tag{2.1}$$

avec $\vec{F} = -k(x - \ell_0)\vec{e_x}$ la force de rappel élastique. En projetant la relation selon l'horizontale, on a alors :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k(x - \ell_0) \iff \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0 \tag{2.2}$$

On pose donc $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ la pulsation propre du système, qui suit l'équation d'un oscillateur harmonique.



Exercice

Résoudre l'équation différentielle si les conditions initiales sont $x(t = 0) = a + \ell_0$ avec $a > 0$ et $v(t = 0) = 0$. On exprimera $v(t)$ également.

La solution de l'équation différentielle s'écrit : $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \ell_0$. Avec les conditions initiales on obtient :

$$A + \ell_0 = a + \ell_0 \quad \text{et} \quad B\omega_0 = 0 \iff A = a \quad \text{et} \quad B = 0 \tag{2.3}$$

Donc $x(t) = a\cos\omega_0 t + \ell_0$, puis $v(t) = -a\omega_0 \sin\omega_0 t$.

I.2 Approche énergétique

a) Les différentes formes d'énergie d'un OH

Une caractéristique fondamentale des systèmes physiques est leur énergie, traduisant la possibilité qu'ils ont à effectuer ou non certaines transformations. Dans le cas présent, l'oscillateur ne présente ni frottement ni échange thermique et on s'attend donc à ce que l'énergie mécanique se conserve. Nous allons vérifier ce résultat sur la solution trouvée précédemment en étudiant les deux formes d'énergie (cinétique et potentielle) du système.

L'énergie cinétique de l'oscillateur est donnée par la formule

$$\boxed{E_{\text{c}} = \frac{1}{2}mv^2} \tag{2.4}$$

soit ici

$$E_{\text{c}} = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) \tag{2.5}$$

Cette énergie n'est pas constante et évolue de manière sinusoïdale à la fréquence double de celle d'oscillation (sa valeur maximale étant rencontrée lorsque la masse passe par sa position d'équilibre $x = \ell_0$, soit deux fois par période).

L'énergie potentielle de pesanteur de la masse n'évolue pas puisque celle-ci reste au niveau du sol. En revanche, nous verrons en mécanique que la force exercée par le ressort sur la masse dérive d'une **énergie potentielle élastique** dont l'expression, dépendant de l'allongement $\Delta\ell = \ell(t) - \ell_0$, est :

$$\boxed{E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2} \tag{2.6}$$

soit en injectant la solution :

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega_0 t) \tag{2.7}$$

b) Vérification de la conservation de l'énergie mécanique

Exercice

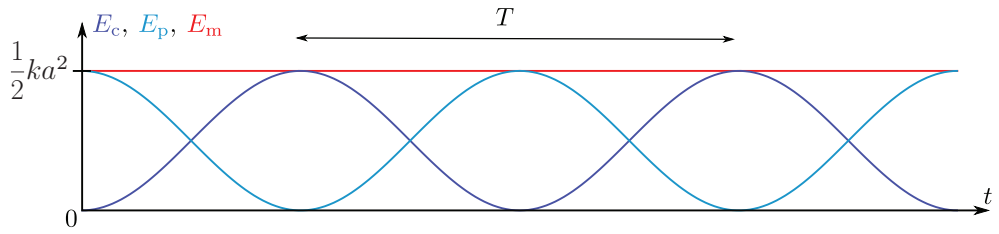
Vérifier que l'énergie mécanique, somme des énergies potentielle et cinétique, est constante au cours du temps.

Calculons l'énergie mécanique, somme des énergies potentielle et cinétique :

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathcal{E}_\mathrm{c} + \mathcal{E}_\mathrm{p} = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 \tag{2.8}$$

D'où avec $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$:

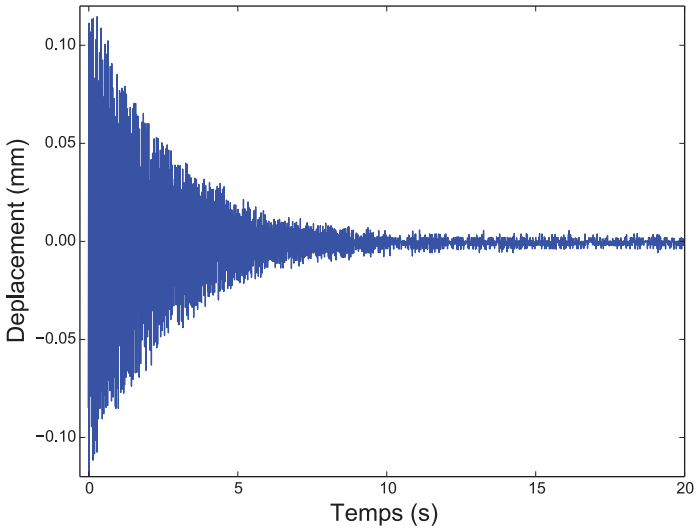
$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}ka^2\sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}ka^2 \tag{2.9}$$



L'oscillateur harmonique présente donc des échanges incessants d'énergie cinétique en énergie potentielle et réciproquement tout en conservant une énergie mécanique constante, ce qui est représenté ci-dessus.

c) Cas réel

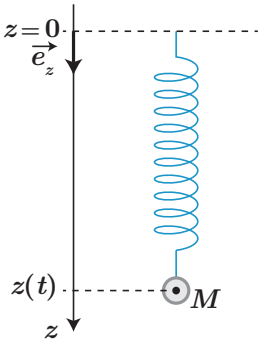
En pratique, tout système mécanique réel où la dissipation n'est pas compensée voit son énergie mécanique diminuer au cours du temps pour atteindre une valeur fixe correspondant à une position d'équilibre. Le modèle de l'oscillateur harmonique est donc pertinent uniquement sur des durées courtes devant le temps typique de dissipation. L'exemple du diapason illustre bien ces propos : observé sur quelques millisecondes, son déplacement est similaire à celui d'un oscillateur harmonique (premier graphe du chapitre). En revanche, si l'on s'intéresse à son évolution sur des durées de l'ordre de la seconde, l'émission d'ondes acoustiques ainsi que les frottements le ramènent à un état immobile, comme le montre la figure expérimentale ci-dessous.



D'autres phénomènes peuvent également intervenir : le couplage entre plusieurs oscillateurs (cf TD), un apport extérieur d'énergie, voire des oscillateurs non linéaires où l'amplitude, par exemple, influe sur la période des oscillations (on parle de non-isochronisme).

II. Oscillateurs amortis : analogie électromécanique

II.1 Approche qualitative



Pour une masse accrochée à un ressort vertical, on peut effectuer les constatations expérimentales suivantes :

- dans l'air la masse oscille longtemps avec une amplitude qui décroît progressivement dans ce qui semble être un régime pseudo-périodique ;
- si on place la masse dans l'eau, on constate qu'elle oscille toujours, mais le nombre d'oscillations décroît drastiquement : on augmente la dissipation du fait des frottements avec le fluide, ce qui pourrait s'apparenter à une diminution du facteur de qualité ;
- si on la place enfin dans le glycérol ou du miel, liquides visqueux, la masse va atteindre sa position d'équilibre sans osciller, du fait d'un frottement important : cela semble être un régime apériodique.

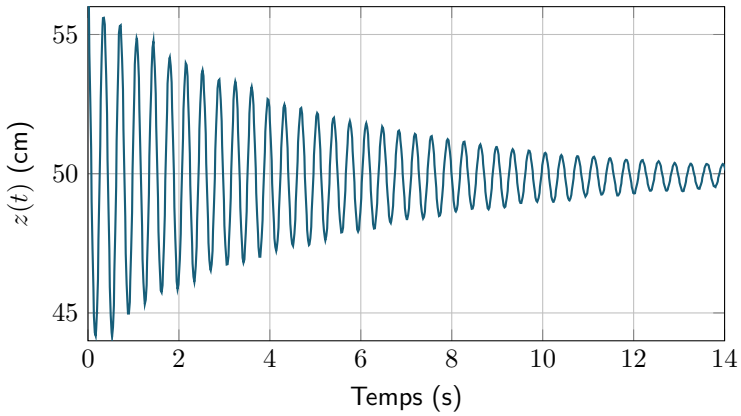


Figure 2.1 – Courbe expérimentale (réelle !) de l'évolution de la position d'une masse accrochée à un ressort en fonction du temps, dans l'air

II.2 Mise en équation

Considérons donc un système constitué d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 et d'une masse m astreinte à se déplacer verticalement. La masse est soumise à plusieurs forces :

- le poids $\vec{P} = +mg\vec{e_z}$;
- la force de rappel élastique dont on rappelle l'expression $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e_z} = -k(z(t) - \ell_0)\vec{e_z}$;
- une force dite de **frottements fluide** $\vec{F_f} = -\alpha\vec{v}$ s'opposant constamment au mouvement, avec α coefficient de frottements fluide (exprimé en kg·s^{-1}).



Exercice

Obtenir l'équation différentielle d'un oscillateur amorti et en déduire le facteur de qualité et la pulsation propre.

L'application de la loi de la quantité de mouvement à la masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen conduit à

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{F_f} \tag{2.10}$$

Étant donné que le mouvement est vertical, on projette cette relation selon $\vec{e_z}$:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -k(z(t) - \ell_0) - \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + mg \tag{2.11}$$

On écrit cette équation sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}\ell_0 + g} \tag{2.12}$$

On peut ainsi exprimer la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, et le facteur de qualité est tel que $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\alpha}{m}$, soit $Q = \dfrac{m\omega_0}{\alpha}$, d'autant plus grand que le coefficient de frottement α est faible.

La résolution est classique et dépend de la valeur de Q. Notons que la solution particulière est une constante $z_p = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$: il s'agit de la position d'équilibre de l'oscillateur. **Un oscillateur amorti oscille toujours, en régime libre, autour de sa position d'équilibre.**

II.3 Analogie

L'établissement de cette équation différentielle permet de réaliser une analogie entre les différentes grandeurs physiques mises en jeu dans le circuit RLC et dans le système-masse ressort :

- la position $z(t)$ est l'analogue de la tension $u_c(t)$;
- il en est de même pour la vitesse $v(t)$ et la dérivée de la tension $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i(t)}{C}$ (donc il y a une similitude entre vitesse et intensité) ;
- la masse m et l'inductance L traduisent un effet d'inertie du système quant à la variation de vitesse ou d'intensité électrique ;
- la raideur du ressort k est liée à l'inverse de la capacité $\dfrac{1}{C}$;
- et surtout le coefficient de frottement α et la résistance R traduisent tous deux la dissipation.

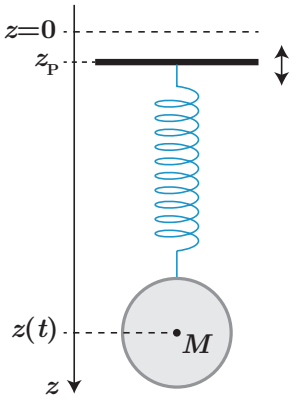
En définitive, on connaît donc les paramètres influençant les régimes libres de tels systèmes. Étudions à nouveau des régimes forcés mécaniques, où l'analogie va se poursuivre.

III. Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé

III.1 Observations expérimentales

a) Introduction

Les oscillateurs, qu'ils soient électriques ou mécaniques, peuvent être soumis à des perturbations. Prenons l'exemple de l'expérience Virgo (Italie) ou Ligo (États-Unis) ayant mis en évidence en 2015 les ondes gravitationnelles. L'idée est d'utiliser des cavités dites Fabry-Pérot constituées de deux miroirs en vis-à-vis suspendus dans le vide et distants de quelques kilomètres : au passage d'une onde gravitationnelle la distance entre les miroirs va très légèrement varier. Malheureusement du fait des vibrations du sol – entre autres – ces miroirs peuvent également se translater l'un par rapport à l'autre, ce qui va avoir une influence sur la précision de l'expérience.
On peut modéliser la situation en première approche comme une masse suspendue à un ressort, lui-même accroché à un support d'altitude $z_p(t)$ susceptible de varier. On va chercher à déterminer quelles peuvent être les conséquences sur le mouvement de la masse.

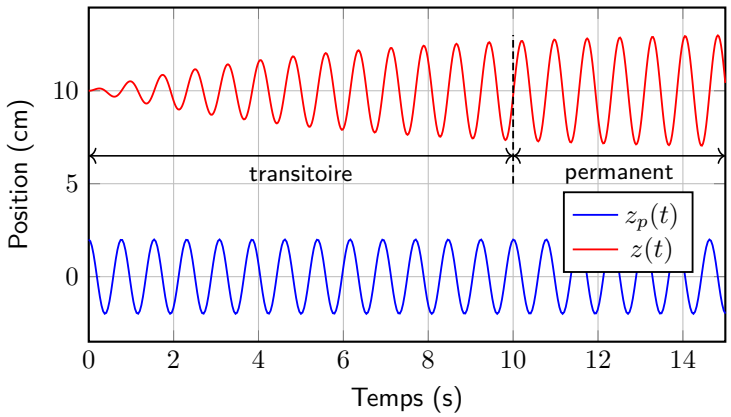


À des fins de simplification, on va déjà s'intéresser à ce qu'il se passe si la vibration du support suit une évolution sinusoïdale (on pourra ensuite généraliser à tout signal périodique un peu plus tard).

b) Résultats expérimentaux

i) Régime transitoire et permanent

On enregistre au cours du temps la position de la masse, lorsque le support vibre de manière sinusoïdale à la fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$: on écrit donc $z_p(t) = a\cos\omega t$ avec $a > 0$. On a mesuré au préalable les propriétés de l'oscillateur amorti : sa fréquence propre est $\omega_0 = 10{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et son facteur de qualité vaut $Q = 3$. On observe alors le signal ci-dessous :



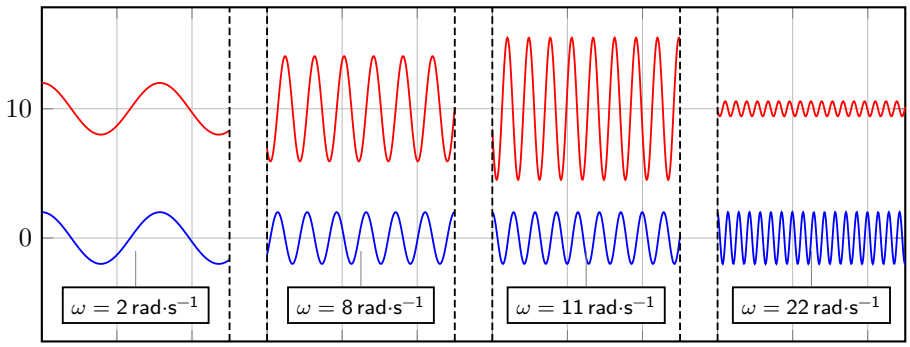
On constate ainsi un régime transitoire suivi d'un régime permanent, mais cette fois-ci le régime permanent n'est pas constant : le signal a la même forme que le signal d' « entrée » (le signal excitateur), à savoir une sinusoïde ayant la même fréquence f_p : seules l'**amplitude** et la **phase** diffèrent par rapport au signal d'entrée.

Régime forcé d'un oscillateur

En régime sinusoïdal forcé et après un régime transitoire, le **régime permanent est sinusoïdal**, de **même fréquence que l'excitation**, mais d'**amplitude et de déphasage à l'origine différent**. Ce résultat est **indépendant des conditions initiales**.

ii) Influence de la fréquence

Faisons varier la fréquence du support et observons le régime permanent associé au mouvement de la masse :



Plusieurs phénomènes sont à observer :

- à basses fréquences (pour $\omega < \omega_0$), la masse suit le mouvement du plateau avec la même amplitude et sans déphasage : les variations d'altitude du support sont suffisamment lentes pour que la masse suive le mouvement et le ressort est de longueur constante ;
- pour une fréquence proche de la fréquence propre de l'oscillateur, l'amplitude du mouvement de la masse passe de manière surprenante par un maximum supérieur à l'amplitude de l'oscillateur : il s'agit du phénomène de **résonance**. On peut le comprendre qualitativement par le fait que si on apporte de l'énergie au bon moment, on peut amplifier le mouvement malgré la dissipation.
- à hautes fréquences (pour $\omega > \omega_0$), la masse n'oscille quasiment pas du fait de son inertie : elle n'a pas le temps de suivre les modifications d'altitude du support, et seul le ressort se déforme. On constate que les signaux sont quasiment en opposition de phase ;

C'est ce qui se passe lorsqu'un enfant est poussé sur une balançoire.

III.2 Étude du régime sinusoïdal forcé

Essayons de comprendre ces faits expérimentaux de manière plus quantitative, afin de prévoir si un oscillateur mécanique se comporte toujours de la sorte et quels paramètres influent sur l'amplitude maximale du mouvement, ce qui peut par exemple avoir des conséquences utiles pour le comportement routier d'amortisseurs de voiture.

a) Mise en équation

On considère que le ressort est accroché à un « plafond oscillant » dont la position varie sinusoïdalement : $z_\text{p}(t) = a\cos\omega t$. La masse m est toujours soumise aux mêmes forces, seule la force de rappel élastique est modifiée. Bilan des forces :

- son poids $\vec{P} = mg\vec{e_z}$
- la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e_z} = -k(z(t) - z_\text{p}(t) - \ell_0)\vec{e_z}$
- la force de frottements fluides $\vec{F_\text{f}} = -\alpha\vec{v}$

L'application de la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, projetée selon $\vec{e_z}$ nous permet d'aboutir à l'équation :

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + k(z(t) - z_\text{p}(t) - \ell_0) = mg \tag{2.13}$$

qui se réécrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 a\cos\omega t + \omega_0^2\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right) \tag{2.14}$$

Cette équation possède un second membre avec une partie constante, et une partie sinusoïdale forcée. Pour pouvoir utiliser les notations complexes, on doit d'abord se débarrasser de la partie constante : il suffit de changer de variable en posant $Z(t) = z(t) - z_\text{cst}$ où z_cst est la solution particulière de l'équation différentielle associée à la partie constante du second membre. En réalité, il s'agit simplement de la position d'équilibre du système, en l'absence de forçage sinusoïdal : $z_\text{cst} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$. Ainsi en utilisant $z(t) = Z(t) + z_\text{cst}$, il vient :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 Z(t) = \omega_0^2 a\cos(\omega t)} \tag{2.15}$$

Cette équation admet une solution se décomposant en deux parties :

- la solution de l'équation sans second membre, modélisant le régime transitoire limité dans le temps, qui ne va pas nous intéresser par la suite ;
- la solution particulière, correspondant à la solution en régime permanent, qui est celle dont on veut déterminer les caractéristiques.

b) Utilisation des grandeurs complexes

En régime permanent, on cherche une solution de la même forme que le second membre avec la même pulsation : $Z(t) = Z_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$, où Z_m est l'amplitude et φ le déphasage par rapport au signal excitateur. Utilisons les complexes et posons $\underline{Z}(t) = Z_\mathrm{m}e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{Z}e^{j\omega t}$.



Exercice

Déterminer l'amplitude complexe de la position.

Injectons cette solution dans l'équation différentielle écrite en complexe :

$$\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 Z(t) = \omega_0^2 a\cos(\omega t) \underset{\mathbb{C}}{\rightarrow} \frac{\mathrm{d}^2\underline{Z}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\underline{Z}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\underline{Z}(t) = \omega_0^2 a e^{j\omega t} \tag{2.16}$$

On utilise la propriété précédente sur la dérivation, sachant qu'une dérivée seconde est ainsi remplacée par la multiplication par $(j\omega)^2$:

$$\underline{Z}(t)\left((j\omega)^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) = \omega_0^2 a e^{j\omega t} \tag{2.17}$$

soit en divisant par $e^{j\omega t}$

$$\underline{Z}_\mathrm{m}\left(-\omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) = \omega_0^2 a \tag{2.18}$$

L'amplitude complexe recherchée s'écrit donc

$$\boxed{\underline{Z}_\mathrm{m} = Z_\mathrm{m}e^{j\varphi} = \frac{\omega_0^2 a}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}} \tag{2.19}$$

III.3 Résonance en élongation

Étudions l'influence de la pulsation d'excitation ω sur l'amplitude du système, afin de comprendre le phénomène de résonance observé expérimentalement.

Pour alléger les notations, posons $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite. L'amplitude vue précédemment se réécrit :

$$Z_\mathrm{m} = \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}} \tag{2.20}$$

Le phénomène de résonance se produit expérimentalement pour une pulsation proche de ω_0, avec une amplitude maximale plus grande que a. D'après les calculs déjà réalisés au chapitre SP7, on montre qu'il se produit une résonance pour $x = x_\mathrm{r} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ à la condition que $Q \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}71$.

Le tracé de $\dfrac{Z_\mathrm{m}(x)}{a}$ ci-dessous, pour différentes valeurs du facteur de qualité, est cohérent avec ce que l'on vient de montrer :

- pour $\omega \ll \omega_0$, l'amplitude est identique à celle de l'excitateur : $\underline{Z}_\mathrm{m} \rightarrow a$: le plafond se déplace suffisamment lentement pour que la masse ait le temps de suivre le mouvement sans déphasage ni changement d'amplitude
- pour $x = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ et donc $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ proche de ω_0, le système présente un phénomène de résonance si le facteur de qualité vérifie $Q \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et l'amplitude de l'oscillateur est supérieur à celle de l'excitateur ;
- dans le cas où $Q \geq 3$, $Z_\mathrm{m}(u_\mathrm{r}) \simeq Qa$: l'amplitude à résonance peut prendre des valeurs très supérieures à celle du forçage. On note également que $x_\mathrm{r} \simeq 1$ c'est-à-dire que la pulsation de

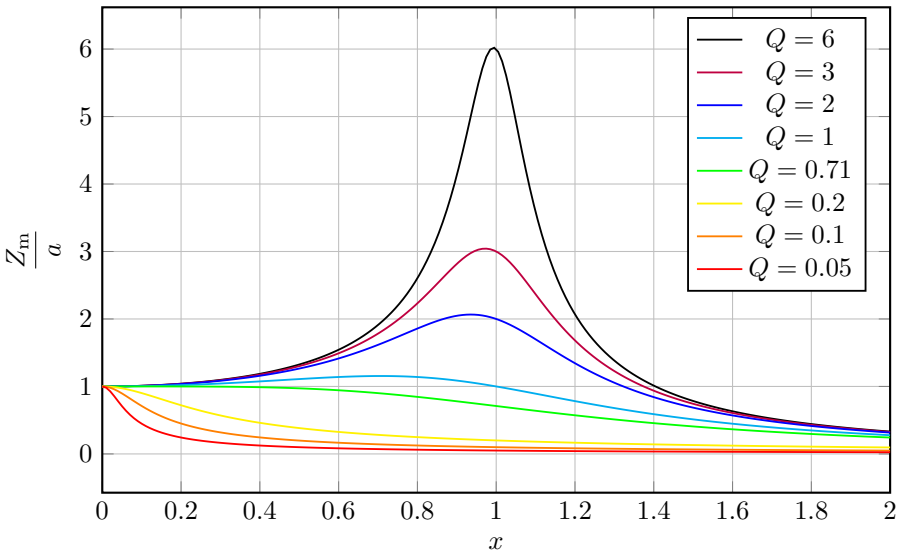


Figure 2.2 – Amplitude réduite $\dfrac{Z_\mathrm{m}}{a}$ en fonction de la pulsation réduite $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ pour différentes valeurs du facteur de qualité Q

résonance se rapproche de la pulsation propre. Enfin, la largeur du pic de résonance diminue à mesure que le facteur de qualité augmente : la résonance est plus **aigüe** ;

- à hautes fréquences, pour $\omega \gg \omega_0$, l'amplitude décroît rapidement, le mouvement du support est très atténué au niveau de la masse : l'inertie empêche à la masse de suivre le mouvement. On trouve $\underline{Z}_\mathrm{m} \simeq \dfrac{a\omega_0^2}{-\omega^2}$: le déphasage vaut π et l'amplitude est très inférieure à a.

Parallèle avec le circuit RLC série

* En s'appuyant sur l'analogie électromécanique, il se produit un phénomène similaire dans un circuit RLC série relié à un générateur basse fréquence : on observe une **résonance en tension** pour la tension aux bornes du condensateur.

III.4 Résonance en vitesse

À partir de l'amplitude complexe de la position, on peut exprimer celle sur la vitesse et terminer l'analogie. $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}$ donc $\underline{v} = j\omega\underline{Z}$, d'où $\underline{v}_\mathrm{m} = j\omega\underline{Z}_\mathrm{m}$

$$\underline{v}_\mathrm{m} = \frac{j\omega a\omega_0^2}{\omega_0^2 + (j\omega)^2 + j\dfrac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{\dfrac{a\omega_0}{Q}}{\dfrac{Q\omega_0}{j\omega} + \dfrac{Qj\omega}{\omega_0} + 1} = \frac{v_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{2.21}$$

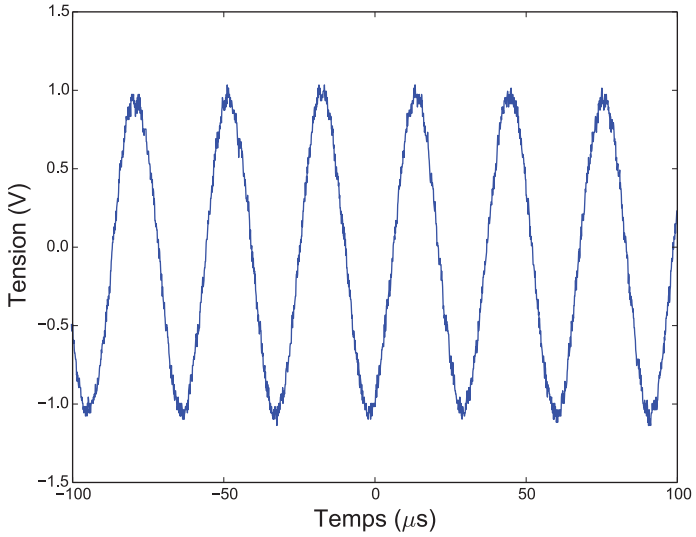
en divisant par $j\dfrac{\omega\omega_0}{Q}$. On obtient exactement la même forme d'amplitude complexe que pour l'intensité parcourant un circuit RLC série. Les conséquences sont donc identiques :

Parallèle avec le circuit RLC série

L'évolution de la vitesse de la masse en régime forcé passe toujours par un maximum en $\omega = \omega_0$. On parle de **résonance en vitesse**, la situation étant similaire à la résonance en intensité d'un circuit RLC série. La largeur de résonance vérifie $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$: comme en électricité, le facteur de qualité mécanique permet de caractériser l'acuité de la résonance.

2.1 Étude expérimentale d'un quartz

Pour comprendre le fonctionnement d'une montre, on étudie le quartz qu'elle contient (valant moins d'un euros). Ce matériau, dit *piézoélectrique*, a la particularité de lier déformation mécanique et réponse électrique : on lui soumet ici un « choc électrique », puis on mesure ses déformations ultérieures en relevant la tension à ses bornes. La figure ci-dessous est obtenue expérimentalement.



1. Mesurer la valeur moyenne, l'amplitude, la période, la fréquence, la pulsation et la phase à l'origine du signal.
2. La fréquence d'oscillation de tels quartz est directement reliée à sa taille ainsi qu'à la vitesse d'ondes sonores dites *transverses* et valant 340 m·s^{-1}. Vérifier qu'un quartz oscillant à la fréquence mesurée ici tient dans une montre ; qu'en est-t-il d'un quartz oscillant à 1 Hz ?
3. Sachant que le quartz pèse 1,7 g et oscille avec une amplitude de l'ordre de 10 µm, calculer numériquement :
   (a) la vitesse maximale du quartz ;
   (b) son accélération maximale ;
   (c) son énergie cinétique maximale.

2.2 Oscillateur transplanétaire

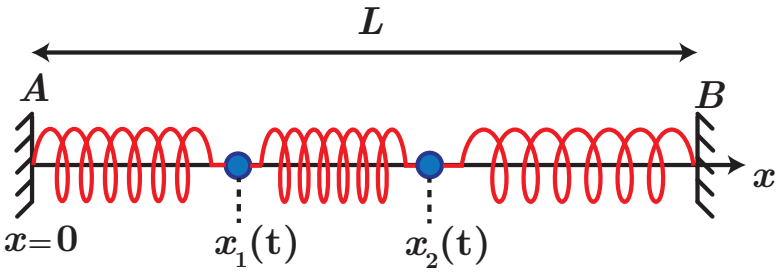
On peut montrer qu'à l'intérieur d'un astre sphérique et homogène de masse M et de rayon R, le champ de pesanteur varie linéairement en fonction de la distance x au centre de l'astre selon :

$$\vec{G} = -\frac{\mathcal{G}M}{R^3}x\vec{e_x}$$

avec $\vec{e_x}$ un vecteur unitaire vertical ascendant. On considère alors un hypothétique puits traversant la Terre de part en part en passant par son centre. Le référentiel terrestre sera supposé galiléen.
Montrer qu'un objet lâché dans ce puits et sans vitesse initiale va avoir un comportement d'oscillateur harmonique et déterminer sa période ainsi que la vitesse maximale atteinte au cours du voyage. On donne : $R_T = 6{,}38{\cdot}10^3$ km, $\mathcal{G} = 6{,}67{\cdot}10^{-11}$ USI et $M_T = 5{,}98{\cdot}10^{24}$ kg.

2.3 Couplage de deux oscillateurs

On place sur un rail à coussin d'air deux oscillateurs mécaniques identiques constitués chacun d'un ressort (raideur k et longueur à vide ℓ_0) et d'un chariot de masse m. Ces oscillateurs sont couplés par un troisième ressort, identique. Les deux chariots sont repérés par leurs abscisses x_1 et x_2, la distance entre les deux extrémités du système est fixe et vaut $L = 3\ell_0$.

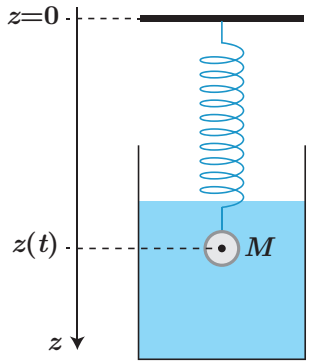


1. Établir les deux équations différentielles vérifiées par les abscisses x_1 et x_2.
2. Vérifier la cohérence des équations avec les positions d'équilibre de chaque masse supposée ponctuelle.
3. Les équations mathématiques obtenues ne sont pas solubles facilement. On introduit deux nouvelles variables $u = x_1 + x_2$ et $v = x_1 - x_2$. Montrer que chacune de ces deux nouvelles variables vérifie une équation d'oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation propre.
4. Donner la solution générale en fonction de constantes.
5. Étudier et décrire les deux cas suivants :
   - mouvement où v est constant au cours du temps ;
   - mouvement où u est constant au cours du temps.

   On s'attachera à décrire mathématiquement et physiquement ces deux cas, encore appelés des "modes" d'oscillation.

2.4 Viscosimètre

Une sphère, de rayon R et de masse volumique ρ est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η, la sphère est soumise à une force de frottement donnée par la formule de Stokes : $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la sphère. Le fluide est de masse volumique ρ_0. On repère la masse par le paramètre z.

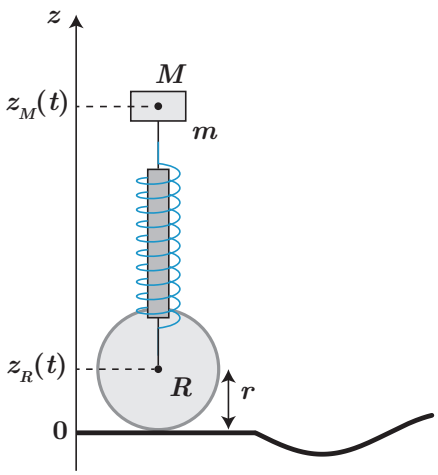


1. En effectuant une analyse dimensionnelle, déterminer la dimension de η.
2. Dans l'air, où les frottements sont négligeables, la période des oscillations est T_0. En supposant dans le fluide un régime pseudo-périodique de période T, montrer qu'il est possible d'exprimer la viscosité en fonction de paramètres mesurables, avec :

$$\eta = \frac{8\pi R^2\rho}{9T_0}\sqrt{1-\left(\frac{T_0}{T}\right)^2}$$

2.5 Étude de la suspension d'un véhicule

Dans le cadre d'un modèle simplifié de suspension, on assimile le véhicule à un point matériel M (de masse $m = 350\,\text{kg}$), posé sur un ressort dont l'autre extrémité R peut se déplacer le long d'une route horizontale ou d'une route ondulée (par le biais d'une roue de rayon $r = 35\,\text{cm}$). Le ressort a une constante de raideur $k = 1{,}29{\cdot}10^4\ \text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$ et une longueur $\ell_0 = 40\,\text{cm}$ à vide.



On repère les positions de M et R par leur altitude z_M et z_R selon un axe vertical (Oz) tel que $z_R = r$ lorsque la route est horizontale. On note enfin $z_S(t)$ l'altitude du sol, initialement nulle. Enfin, on modélise l'effet de l'amortisseur par un frottement fluide entre les points M et R dont la force résultante sur la masse m est $\vec{F}_d = -\alpha\left(\frac{\mathrm{d}z_\mathrm{M}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z_\mathrm{R}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e_z}$, avec $\alpha = 700\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$.

1. Lorsque le véhicule se déplace sur la route horizontale (avec $z_S(t) = 0$), déterminer la position à l'équilibre $z_{\mathrm{M,eq}}$ en fonction de m, g, k, ℓ_0 et r.
2. Le véhicule rencontre une marche de hauteur $h = 10\,\mathrm{cm}$ (ainsi $z_S(t) = +h$), on suppose que la longueur de l'amortisseur est instantanément réduite de la longueur h, et la masse m possède à $t = 0^+$ une vitesse verticale nulle. Déterminer la forme générale de la loi d'évolution de $z_M(t)$ et le nombre d'oscillations observées. Tracer l'allure de $z_M(t)$ et du portrait de phase.
3. Le profil de la route est maintenant une route bosselée modélisée par une courbe sinusoïdale de période spatiale $\lambda = 5{,}0\,\mathrm{m}$ et d'amplitude $H = 5\,\mathrm{cm}$. La voiture roule à vitesse constante v_x. On pose $Z(t) = z_\mathrm{M} - z_{\mathrm{M,eq}}$.

   (a) Justifier que l'on puisse écrire $z_s(x) = H\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ avec x l'abscisse du point M. Exprimer z_s en fonction du temps et non plus de x et en déduire la pulsation ω associée en fonction de la vitesse horizontale v_x du véhicule.

   (b) Montrer que $Z(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 Z(t) = F(t)$$

   où $F(t)$ dépend de z_S.

   (c) On peut montrer que $F(t)$ s'écrit, par un bon choix de l'origine des temps, sous la forme $F(t) = F_m\cos(\omega t)$. Justifier que la vitesse v d'oscillation verticale de la voiture est également sinusoïdale de même pulsation que F.

   (d) Montrer alors que son amplitude V_m vérifie

$$V_m = \frac{\frac{F_m Q}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \tag{2.22}$$

   (e) On pose $H = \frac{V_m}{F_m}$. Tracer l'allure de H en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

   (f) Calculer la vitesse associée à la pulsation $\omega = \omega_0$ et préciser s'il vaut mieux rouler vite ou lentement sur ce type de chemin.

1. À l'équilibre, on étudie la masse M dans le référentiel de la route supposé galiléen. Les forces en présence sont uniquement le poids et la force de rappel élastique. On applique la LQM à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow -mg + k(z_{\mathrm{M,eq}} - z_{\mathrm{R,eq}} - \ell_0) = 0 \Longleftrightarrow z_{\mathrm{M,eq}} = \ell_0 + r - \frac{mg}{k} \tag{2.23}$$

2. On cherche à décrire ici la réponse à un équivalent d'échelon de tension pour cet oscillateur mécanique amorti. On écrit donc l'équation différentielle associée à la position de la masse M. On réécrit la LQM dans ces nouvelles conditions :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_{\mathrm{d}} \Longrightarrow m\ddot{z}_{\mathrm{M}} = -mg - k(z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{R}} - \ell_0) - \alpha\left(\frac{\mathrm{d}z_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{2.24}$$

soit avec $z_{\mathrm{R}} = r + h$ après avoir monté la marche, on peut réécrire l'équation précédente sous forme canonique :

$$\ddot{z}_{\mathrm{M}} + \frac{\alpha}{m}\dot{z}_{\mathrm{M}} + \frac{k}{m}z_{\mathrm{M}} = \frac{k}{m}\left(\ell_0 + r + h - \frac{mg}{k}\right) \tag{2.25}$$

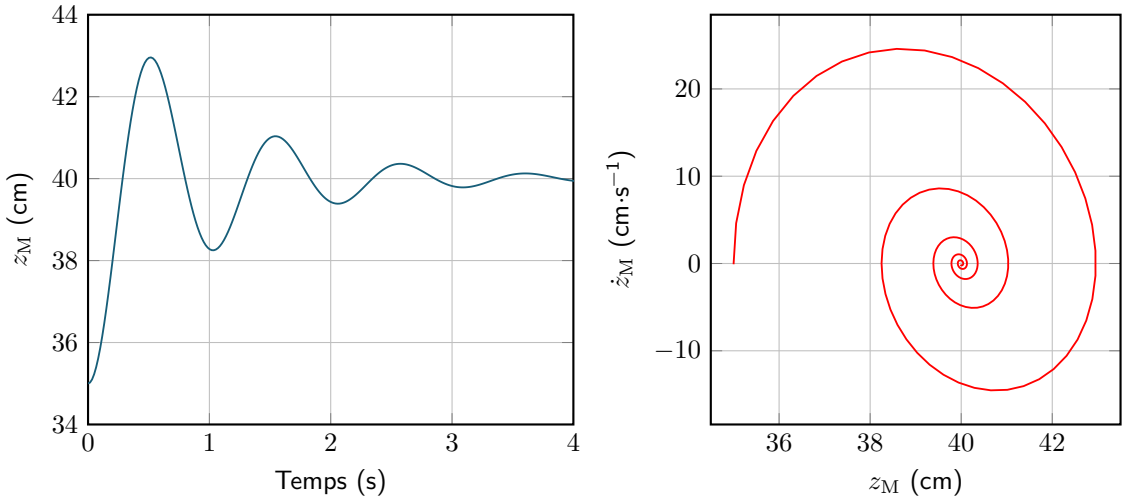
On peut donc poser $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{\alpha}$.

La forme générale de la loi d'évolution de $z_{\mathrm{M}}(t)$ s'écrit donc :

$$z_{\mathrm{M}}(t) = Ae^{-\mu t}\cos(\Omega t + \varphi) + z_{\mathrm{M,eq}} + h \tag{2.26}$$

avec $\mu_0 = \dfrac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$ (que l'on retrouve à partir du polynôme caractéristique). Il n'est pas demandé de résoudre l'équation, mais au moins de respecter les conditions aux limites pour effectuer un tracé. On précise que l'amortisseur a une altitude instantanément réduite de h, donc $z_{\mathrm{M}}(t = 0^+) = z_{\mathrm{M}}(t = 0^-)z_{\mathrm{M,eq}}$ (l'inertie liée au déplacement horizontal d'une masse importante implique la continuité de l'altitude du véhicule, mais pas de la roue) et $\dot{z}_{\mathrm{M}}(t = 0^+) = 0$ car on précise que la vitesse verticale est nulle. On calcule $\omega_0 = 6{,}1\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ et $Q = 3{,}03$ donc $\Omega \simeq \omega_0$ et le nombre d'oscillation est d'environ 3.

D'où l'allure suivante, avec une tangente horizontale



3. (a) $z_{\mathrm{s}}(x) = H\cos(kx) = H\cos\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)$ est la forme classique d'un signal sinusoïdal de période spatiale λ. Or, la vitesse est v_x, constante, donc $x(t) = v_x t$ d'où :

$$z_{\mathrm{s}}(t) = H\cos\omega t \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi v_x}{\lambda} \tag{2.27}$$

(b) Écrivons de nouveau la LQM projetée suivant l'axe vertical, mais en considérant que $z_{\mathrm{R}} = r + z_{\mathrm{s}}$:

$$m\ddot{z}_{\mathrm{M}} = -mg - k(z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{R}} - \ell_0) - \alpha(\dot{z}_{\mathrm{M}} - \dot{z}_{\mathrm{R}}) \tag{2.28}$$

soit en réorganisant les termes et sous forme canonique :

$$\ddot{z}_{\mathrm{M}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z}_{\mathrm{M}} + \omega_0^2 z_{\mathrm{M}} = \omega_0^2\left(r + \ell_0 - \frac{mg}{k}\right) + \omega_0^2 z_{\mathrm{s}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z}_{\mathrm{s}} \tag{2.29}$$

En posant $Z(t) = z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{M,eq}}$, on élimine la partie constante du membre de droite, d'où :

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 z_{\mathrm{s}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z}_{\mathrm{s}} = F(t) \tag{2.30}$$

(c) La position Z est, en régime sinusoïdal forcé, sinusoïdale de même pulsation que le forçage $F(t)$, donc de pulsation ω. Puis avec $v = \dot{z}_\mathrm{M} = \dot{Z}$, la vitesse est également sinusoïdale de pulsation ω.

(d) On passe l'équation précédente en notations complexes, sachant que $v = \dot{Z}$ donc $\underline{V}_\mathrm{m} = j\omega\underline{Z}_\mathrm{m}$:

$$\left(-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right)\underline{Z} = F_\mathrm{m}e^{j\omega t} \Longrightarrow \left(-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right)\frac{\underline{V}_\mathrm{m}}{j\omega} = F_\mathrm{m} \tag{2.31}$$

donc en isolant $\underline{V}_\mathrm{m}$ puis en prenant le module :

$$\underline{V}_\mathrm{m} = \frac{F_\mathrm{m}}{j\omega + \dfrac{\omega_0}{Q} + \dfrac{\omega_0^2}{j\omega}} = \frac{\dfrac{F_\mathrm{m}Q}{\omega_0}}{1 + jQ\dfrac{\omega}{\omega_0} - jQ\dfrac{\omega_0}{\omega}} \tag{2.32}$$

d'où :

$$V_\mathrm{m} = \frac{\dfrac{F_\mathrm{m}Q}{Q}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \tag{2.33}$$

(e) En introduisant la pulsation réduire $x = \omega/\omega_0$, il vient :

$$H(x) = \frac{\dfrac{Q}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}} \tag{2.34}$$

dont l'allure graphique est donnée ci-après.

(f) $v_{x,0} = \dfrac{\omega_0\lambda}{2\pi} = 4{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 18\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Il vaut donc mieux soit plus lentement, soit plus vite que cette vitesse. Techniquement, il est difficile de rouler vraiment plus lentement, on a tout intérêt à avoir $v_x \gg v_{x,0}$ d'après le graphique de H.

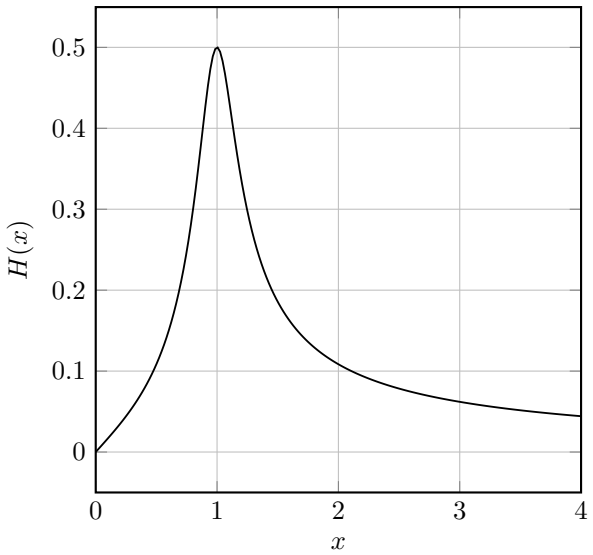


Table des matières

2 Les oscillateurs mécaniques, analogies avec l'électrocinétique **1**
2.1 L'oscillateur harmonique mécanique . . . 2
2.1.1 Mise en équation . . . 2
2.1.2 Approche énergétique . . . 2
2.2 Oscillateurs amortis : analogie électromécanique . . . 4
2.2.1 Approche qualitative . . . 4
2.2.2 Mise en équation . . . 5
2.2.3 Analogie . . . 5
2.3 Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé . . . 6
2.3.1 Observations expérimentales . . . 6
2.3.2 Étude du régime sinusoïdal forcé . . . 7
2.3.3 Résonance en élongation . . . 8
2.3.4 Résonance en vitesse . . . 9