Devoir maison 04

- Correction -

1. Appliquons la loi du moment cinétique scalaire (par rapport à l'axe $(\Delta) = (O, \vec{e_z})$) au système constitué de la tige et des deux masses m, dans un référentiel galiléen. Il est soumis à plusieurs moments de forces :

   - le moment du couple de rappel $-k\theta$;
   - le moment des deux forces gravitationnelles entre les masses : $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\text{grav}) = 2 \cdot \ell \frac{\text{GmM}}{\text{d}^2}$.

   Les autres forces mises en jeu (poids des deux masses m et tension du fil) étant parallèles à (Δ), leur moment scalaire par rapport à (Δ) est nul.

   Ainsi en appliquant la loi du moment cinétique scalaire, on a :
   $$\frac{\text{d}J\dot{\theta}}{\text{dt}} = 0 = -k\theta + 2\frac{\ell GmM}{d^2}$$
   lorsqu'on est à l'équilibre (situation pertinente ici, on se place à l'équilibre et on effectue des mesures à l'équilibre). Ainsi $\boxed{\theta = \frac{2G\ell mM}{kd^2}}$.

2. Numériquement $\theta = 1{,}2{\cdot}10^{-3}$ rad, ce qui est une valeur très faible (0,67°), difficilement mesurable (d'où la partie optique).

3. k semble être la grandeur qui pose le plus de problème : les masses sont facilement mesurables (et grandes), les distances sont macroscopiques, c'est k qui est petit. Si on enlève les masses M, on se retrouve simplement avec un pendule de torsion, auquel on peut mesurer sa période d'oscillation ou sa pulsation propre.

   > ⚠ Si on n'enlève pas les deux masses M, le moment scalaires des deux forces n'est clairement pas constant car la distance varie avec θ, et donc on n'aura PAS d'oscillateur harmonique ! !

   En effet en reprenant la loi du moment cinétique scalaire, mais dans un cas hors équilibre, on a :
   $$J\ddot{\theta} = -k\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{k}{J}\theta = 0 \qquad (1)$$
   On reconnaît là l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 telle que $\omega_0^2 = \frac{k}{J}$. Donc la période est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}$. On peut ainsi avoir accès à k, connaissant J : $\boxed{k = \frac{4\pi^2 J}{T_0^2}}$.

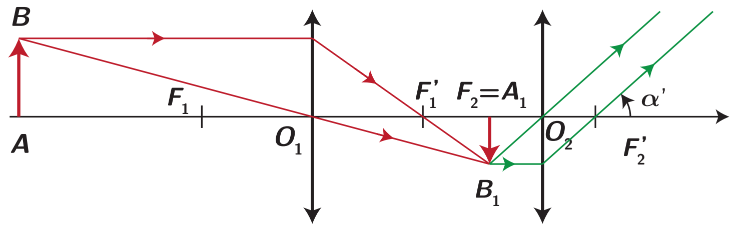
   On a ainsi
   $$G = \frac{\theta k d^2}{2mM} = \frac{\theta d^2 4\pi^2 \cdot 2m\ell^2}{2\ell m M T_0^2} = \boxed{\frac{4\pi^2\theta\ell d^2}{MT_0^2}} \qquad (2)$$

4. > ⚠ J'ai vu beaucoup de schémas où l'objet est à droite. Pourquoi pas, sauf que l'objet est bien l'émetteur de rayons lumineux, ce qui impose ensuite la position des foyers objets et images pour les lentilles. D'autre part ces foyers se notent bien en MAJUSCULE ! !

   À l'aide du schéma ci-dessous, on visualise la trajectoire des rayons lumineux, faisant apparaître une image intermédiaire A_1B_1 de l'objet AB situé approximativement à $\overline{O_1A} = -2D$ si $\theta \ll 1$.

   > ⚠ L'objet à visualiser n'est PAS sur le miroir ! Il se situe à une distance de D du miroir, d'où le facteur 2 en comptant l'aller-retour des rayons lumineux...

   Si on veut utiliser de manière confortable la lunette de visée, il faut que l'œil de l'utilisateur n'accommode pas, donc on doit avoir une image à l'infini, ce qui est possible si l'image intermédiaire est dans le plan focal objet de l'oculaire, soit $F_2 = A_1$.v



On peut calculer la position de l'image intermédiaire en appliquant la loi de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f_1'} - \frac{1}{2D} \tag{3}$$

conduisant à $\overline{O_1A_1} = 42{,}8\,\text{cm}$.

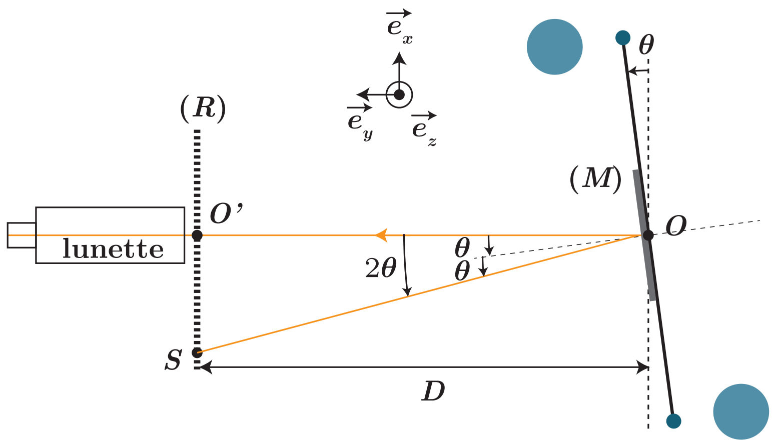
D'autre part, on a besoin de calculer la puissance de la lunette, et donc α', soit avec l'approximation des petits angles, $\alpha' \simeq \tan\alpha' = \frac{-\overline{A_1B_1}}{f_2'}$. De plus, on a pour l'objectif $\frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$. Ainsi

$$P = \frac{\alpha'}{\overline{AB}} = -\frac{1}{f_2'}\frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{2f_2'D} \tag{4}$$

d'où $f_2' = 4{,}3\,\text{cm}$ si l'on souhaite $P = 10\,\delta$. L'encombrement de la lunette vaut alors $e = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1A_1} + f_2' = 47{,}1\,\text{cm}$.

> ⚠ Il est impératif de tenir compte de la position de l'objet. La puissance permet effectuer de connaître certains rapports, mais de ces rapports on ne peut pas sortir de valeur "au pif" !

5. L'angle entre les rayons OO' et OS est 2θ du fait des lois de Descartes en réflexion (faites un schéma pour vous en rendre compte !) :



Par conséquent on a d'après les relations trigonométriques $\tan 2\theta \simeq 2\theta = \frac{O'S}{OO'} = \frac{\delta x}{D}$. Donc $\delta x = 2D\theta = 1{,}2\,\text{mm}$. Le viseur permettra d'obtenir un grossissement utile pour observer ce déplacement. En effet, usuellement on définit le grossissement comme $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ avec α l'angle sous lequel on voit l'objet en étant le plus près (ici en O approximativement, pour ne pas se placer devant le champ de la règle), donc distant de $d_m \simeq 2D = 1{,}0\,\text{m}$. Ainsi on a $G = Pd_m = 10$. Cela sera suffisant pour observer un tel déplacement avec précision, d'autant que les lunettes de visées possèdent un réticule gradué que l'on peut par exemple étalonner au préalable.