

Lois de l'induction et applications à des circuits fixes

Sommaire

2.1 Les lois de l'induction	2
2.1.1 Expériences qualitatives	2
2.1.2 Notion de flux magnétique	2
2.1.3 Interprétation qualitative : loi de Lenz	3
2.1.4 Interprétation quantitative : loi de Faraday	4
2.2 Auto-induction ou induction propre	4
2.2.1 Exemple du solénoïde (démonstration à connaître)	4
2.2.2 Fém auto-induite et schéma électrique équivalent	5
2.2.3 Superposition de l'auto-induction et d'un phénomène d'induction externe	6
2.3 Induction mutuelle et applications	6
2.3.1 Phénomène de couplage entre deux bobines	6
2.3.2 Circuits électriques couplés	7
2.3.3 Aspects énergétiques	8
2.3.4 Le transformateur	8

Questions de cours :

- Citer la loi de Lenz, la loi de Faraday, et appliquez-les au cas d'un aimant que l'on approche d'une spire fermée conductrice.
- Auto-induction : présentation du phénomène, calcul de l'inductance propre d'un solénoïde. Tension aux bornes d'un solénoïde en convention récepteur (en expliquant).
- Induction mutuelle : présentation du phénomène, calcul de l'inductance mutuelle entre deux bobines imbriquées. Applications.
- Le transformateur : présentation, démonstration de la relation entre les tensions, applications et limitations.

Capacités exigibles du BO :

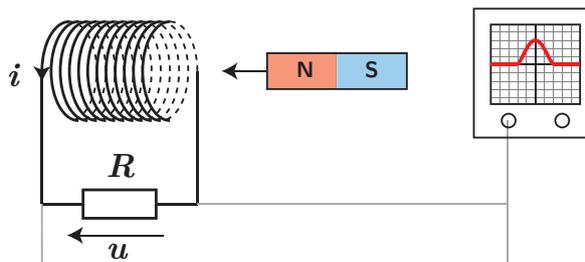
- Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
- Décrire, mettre en oeuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.
- Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
- Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'alébrisation.
- Différencier le flux propre des flux extérieurs.
- Utiliser la loi de modulation de Lenz.
- Évaluer et connaître l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur, le champ magnétique créé par une bobine infinie étant donné.
- Conduire un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
- Connaître des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante pour deux bobines en interaction.
- Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents pour deux bobines en interaction.
- Établir la loi des tensions pour le transformateur de tension.
- Conduire un bilan de puissance et d'énergie.

On a vu dans le chapitre précédent comment créer un champ magnétique, mais également comment s'en servir pour effectuer des actions mécaniques via les forces de Laplace. Néanmoins un aspect très utilisé aujourd'hui, et découvert par Faraday en 1831 concerne l'obtention d'une tension et éventuellement d'un courant *via* un champ magnétique.

I. Les lois de l'induction

I.1 Expériences qualitatives

Branchons une bobine à une résistance variable, et l'on observe à l'oscilloscope la tension aux bornes de la résistance (permettant ainsi de mesurer le courant traversant le circuit). Si on approche ou éloigne le pôle Nord d'un aimant, une tension est clairement observable à l'oscilloscope ; le même constat peut être fait si on laisse l'aimant fixe mais que l'on déplace la bobine.



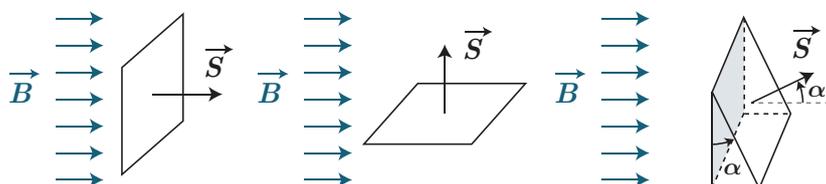
Notons qu'il ne s'agit en réalité que d'un changement de point de vue dans le cas de notre aimant : soit on se place dans le référentiel de l'aimant, soit celui de la bobine !

La dernière observation permet de conclure qu'il existe deux types de phénomènes d'induction :

- soit le circuit est fixe et le champ magnétique dépend du temps, on parle alors d'**induction de Neumann** ;
- soit le circuit est mobile, et le champ magnétique est stationnaire, on parle alors d'**induction de Lorentz**, étudiée principalement au prochain chapitre.

I.2 Notion de flux magnétique

On vient de constater l'importance du sens du champ magnétique au niveau de la bobine. On constate aussi que l'inclinaison de la bobine diminue l'effet, voire le rend inexistant si le champ magnétique est perpendiculaire à l'axe de la bobine. Cherchons donc à quantifier la quantité de champ magnétique qui traverse un circuit. Pour faire simple, considérons un champ magnétique uniforme, et une spire orientée de vecteur surface \vec{S} :

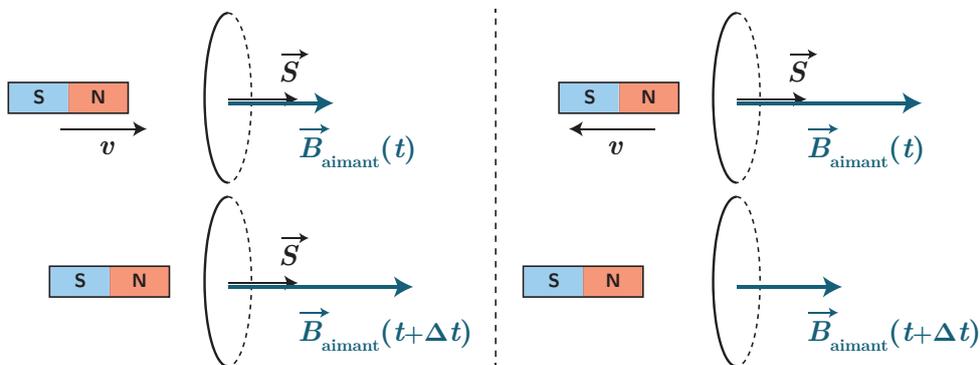


Flux du champ magnétique

Si \vec{B} dépend de l'espace, on peut alors calculer le flux en découpant la surface en une infinité de surfaces élémentaires de vecteur surface $d\vec{S}$ et sommer l'ensemble des flux élémentaires :

$$\phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.2)$$

I.3 Interprétation qualitative : loi de Lenz



À l'inverse, lorsque l'aimant s'éloigne de la spire, et donc que le flux de son champ magnétique diminue, le courant induit est de sens opposé et le champ magnétique induit tend à compenser également la diminution de champ magnétique.

Cela se traduit sous un principe de modération :

Loi de Lenz

Ici, la cause est la variation de champ magnétique dû au déplacement de l'aimant, l'effet est le courant induit qui crée un champ magnétique qui s'oppose à cette variation de champ magnétique.

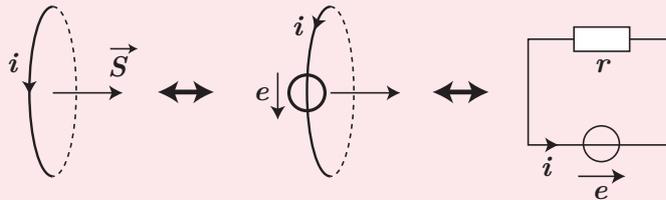
I.4 Interprétation quantitative : loi de Faraday

On observe enfin que l'intensité du courant est liée à la rapidité avec laquelle on déplace l'aimant : plus la variation est rapide, plus le courant dans le circuit fermé est grand, en valeur absolue.

Faraday constata que le courant induit obtenu est équivalent à l'introduction dans le circuit d'un générateur fictif de tension e , encore appelée **force électromotrice induite** (ou fém induite) :

Loi de Faraday

Il faut prendre garde aux conventions d'orientation : le calcul du flux est lié à l'orientation du contour et donc du vecteur surface. Il en va de même de la fém dont **le sens de la tension est le même que l'orientation du contour**. Cela joue un rôle dès qu'on veut traduire sur un circuit électrique les conséquences des phénomènes inductifs.



Néanmoins, le sens choisi pour orienter le contour est arbitraire, mais cela ne change évidemment pas le résultat physique (si on orientait dans le sens contraire, Φ changerait de signe, mais e également).



Exercice

Retrouver via la loi de Faraday le sens du courant tel qu'observé dans l'expérience précédente où l'on approche la face Nord de l'aimant en direction de la verticale d'une spire.

II. Auto-induction ou induction propre

II.1 Exemple du solénoïde (démon à connaître)

Considérons dans un premier temps un solénoïde d'axe (O, \vec{e}_x) alimenté par un générateur de tension. Dans le cas où cette tension est variable, un phénomène d'induction se produit, que l'on qualifie d'**auto-induction** ou **induction propre**.

Démonstration

On peut aller plus loin en calculant le flux de ce champ, appelé **flux propre** Φ_p , car lié au champ créé par le circuit source du champ magnétique :

- en première approximation, comme le solénoïde est suffisamment long, on considère que le champ magnétique est constant y compris sur les bords ;
- on suppose aussi que le pas de l'hélice formant la bobine est suffisamment petit devant le rayon pour considérer le bobinage comme un ensemble de N spires accolées sur une distance ℓ (on parle de bobine à spires jointives).

Flux propre et inductance propre

Dans le cas du solénoïde, par identification :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} \quad (2.7)$$

Un odg pour $N = 1000$, $r = 5$ cm et $\ell = 20$ cm donne $L = 50$ mH, valeur typique au laboratoire.

L'utilisation de matériaux ferromagnétiques doux (fer) au sein de la bobine est intéressant car il permet de renforcer le champ magnétique traversant le circuit (on atteint le tesla), et donc augmenter le flux propre : on peut ainsi augmenter la valeur de L , ou réduire considérablement la taille de la bobine pour qu'il rentre dans un circuit électronique.

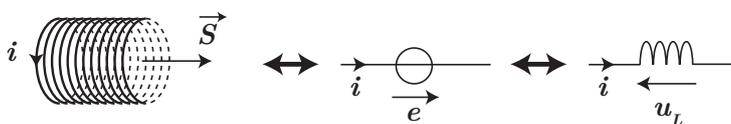
μ_0 , appelée permittivité relative du vide, vaut $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$.

II.2 Fém auto-induite et schéma électrique équivalent

Si le courant circulant dans un circuit fixe est constant, aucun effet d'induction n'est perceptible : il faut que le flux soit variable, et donc que le courant soit variable. Apparaît alors une fém d'auto-induction

$$e = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

correspondant à une tension en convention générateur. On peut faire le lien avec la loi de Lenz : si un générateur externe impose une augmentation du courant, la fém d'auto-induction est négative et s'oppose à l'augmentation du courant !



On peut alors remplacer dans le schéma électrique le bobinage par une inductance L de tension $u_L(t) = L\frac{di}{dt}$.

Il est aussi possible d'observer des effets d'auto-induction si la valeur de L varie au cours du temps : le circuit est alors déformable.

D'un point de vue pragmatique, si un exercice n'évoque pas la notion d'inductance propre, il est probable que l'auto-induction puisse être négligée, particulièrement dans le cas où le bobinage est très faible (quelques spires).

II.3 Superposition de l'auto-induction et d'un phénomène d'induction externe

Il est possible que plusieurs effets se combinent : d'une part un phénomène d'auto-induction dû au passage d'un courant dans un élément inductif, et d'autre part un champ magnétique "extérieur" qui vient se superposer au champ propre et engendre un flux supplémentaire. Ainsi il faudra distinguer la fém d'auto-induction de la fém due au champ extérieur : $e = -L \frac{di}{dt} + e_{\text{ext}}$. Cependant, dans la majorité des cas, le phénomène d'induction lié à un champ extérieur est le phénomène prépondérant, et l'on néglige l'inductance propre.

III. Induction mutuelle et applications

L'induction propre est un phénomène que l'on exploite avec les bobines, par exemple dans les circuits électriques pour du filtrage ou encore pour produire des étincelles. Néanmoins un phénomène encore plus courant est celui de l'**induction mutuelle**, que l'on retrouve dans les plaques à induction, les antivols, les systèmes NFC des téléphones portables, etc.

III.1 Phénomène de couplage entre deux bobines

Inductance mutuelle

De la même manière que l'on a défini le coefficient d'auto-induction, le flux $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ du champ magnétique créé par le circuit 2 dans le circuit 1 est proportionnel au courant traversé par le deuxième circuit, et on appelle la constante de proportionnalité M , **coefficient d'inductance mutuelle**, dont le signe est quelconque (et dépend de l'orientation de chaque circuit), exprimé en henry :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2 \quad (2.9)$$

On peut montrer également que, de manière symétrique :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \quad (2.10)$$

avec le même coefficient de proportionnalité, ne dépendant que de la géométrie des deux circuits, et leurs positions respectives.



Démonstration

D'un point de vue pratique, il est parfois plus facile de calculer un des deux flux issus du couplage : on peut alors en déduire le coefficient de mutuelle inductance qui sera forcément le même pour l'autre flux.

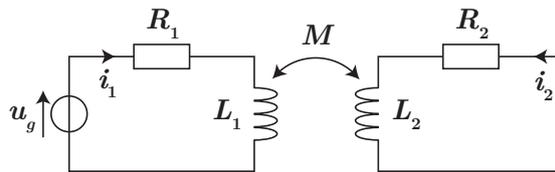
Exercice

Refaites la même chose avec $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ afin de montrer que le coefficient M est identique.

On peut montrer que l'inductance mutuelle (en valeur absolue) prend une valeur forcément inférieure à $\sqrt{L_1 L_2}$ avec L_i les inductances propres respectives de chaque circuit. Lorsque $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$, on dit que les deux circuits sont en influence maximale (ou totale) : c'est par exemple le cas de deux bobines de même longueur l'une dans l'autre, mais on va étudier peu après un autre cas très concret.

III.2 Circuits électriques couplés

Dès que l'on a deux circuits électriques où les éléments inductifs sont proches, il faut tenir compte de l'inductance mutuelle dans les équations électriques. On peut par exemple étudier le montage ci-dessous :



ainsi l'approche du circuit 2 par rapport au circuit 1 **modifie l'impédance branchée au générateur** car on peut alors écrire en combinant les deux équations

$$u_0 = i_1 \left(R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega}{R_2 + jL_2\omega} \right) \quad (2.15)$$

ce qui peut avoir pour application concrète la détection du circuit 2, non relié à un générateur :

- principe de détection des voitures (la carrosserie jouant alors le rôle de circuit du fait de sa carcasse métallique) ;
- principe des détecteurs de vols (une étiquette avec un circuit en spirale sur l'objet, et les portiques jouaient le rôle de circuit inductif) ;

Dans un autre registre, on peut citer la plaque à induction, où la casserole subit un champ magnétique variable créé par une bobine, il s'en suit la création de courants induits au sein du matériau conducteur (plus précisément des courants de Foucault), qui ensuite par effet Joule vont permettre la mise en chauffe.

III.3 Aspects énergétiques

D'un point de vue strictement énergétique, comment doit-on prendre en compte le couplage par inductance mutuelle? En effet, on pourrait s'attendre à ce que l'énergie totale sous forme magnétique soit simplement

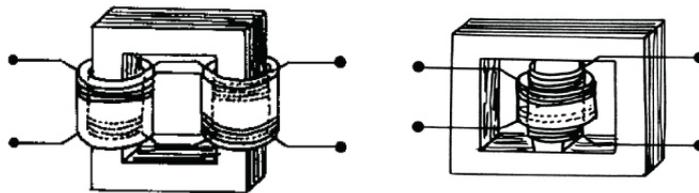
$$E_t = E_{L_1} + E_{L_2} = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 \quad (2.16)$$

mais ce n'est pas le cas. On va conduire un **bilan énergétique global en multipliant chaque loi des mailles par le courant le traversant** :

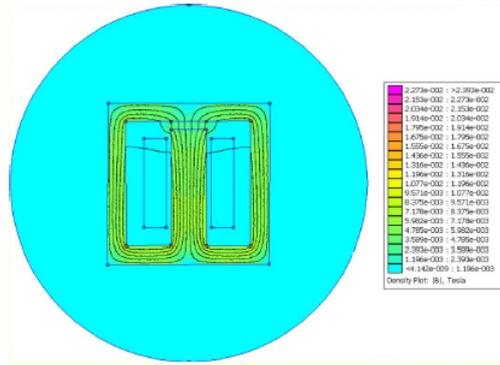
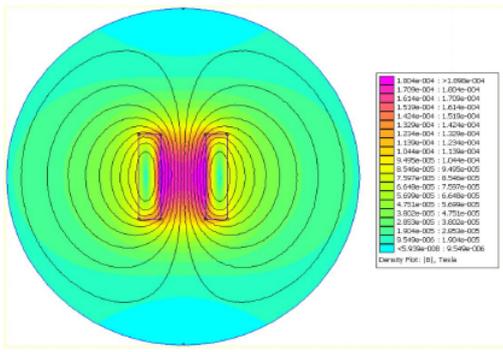
III.4 Le transformateur

Un transformateur est un quadripôle entrée-sortie permettant de modifier les caractéristiques de tension et de courant d'un signal d'entrée sinusoïdal (abaisseur de tension dans les petits transformateurs de la vie courante, et élévateur de tension pour les lignes électriques).

Plusieurs configurations sont possibles, les deux plus courantes sont données ci-dessous. Dans le second cas, appelé circuit magnétique cuirassé, la colonne centrale porte l'ensemble des bobinages primaires et secondaires, et les colonnes latérales servent à fermer le circuit magnétique.



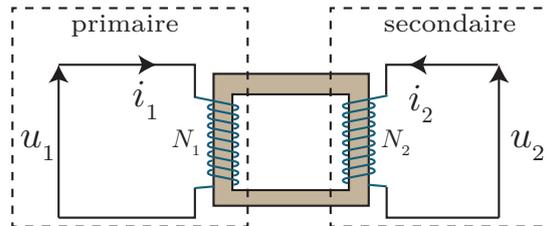
L'intérêt d'utiliser un circuit magnétique est qu'il canalise le flux magnétique, illustré ci-dessous, avec une bobine seule à gauche, et à droite avec un ferromagnétique));



Un transformateur est alors constitué :

- d'un circuit magnétique, où l'on fait l'hypothèse que le champ magnétique est uniforme dans tout le matériau magnétique ;
- d'un enroulement primaire de N_1 spires recevant de l'énergie électrique en amont, appelé **circuit primaire** ;
- d'un enroulement secondaire de N_2 spires qui restitue une partie de l'énergie électrique reçue à un circuit aval appelé **circuit secondaire** ou **circuit de charge**.

On schématise le transformateur de la manière suivante :



Démonstration



Transformateur

Ainsi on peut moduler à la hausse ou à la baisse l'amplitude d'une tension sinusoïdale.

Il ne faut pas croire ici que l'on perd de l'énergie, vous montrerez en 2e année que $\frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m}$ et donc que la puissance fournie par le primaire $-v_1 i_1$ est égale à la puissance reçue au secondaire $v_2 i_2$, dans un cas parfait, sans pertes.

Citons quelques applications :

- élévateur de tension pour les lignes à hautes tensions (transport électrique) : afin de limiter les pertes par effet Joule on augmente la tension durant le transport (jusqu'à quelques centaines de kV) ;
- le transformateur d'isolement (avec $m = 1$) permettant d'avoir aucun lien électrique entre le circuit primaire et secondaire (et donc s'affranchir de la masse que l'on a sur certains appareils)

Citons enfin les limitations des transformateurs :

- le matériau ferromagnétique n'est pas un conducteur parfait des lignes de champ : il y a des "fuites" de champ ;
- il y a des pertes par effet Joule dans les bobinages ;
- il y a également des pertes dans le matériau ferromagnétique (hystérésis du matériau), conducteur électrique (d'où son chauffage), limitées par le "feuilletage" du matériau.

2.1 Deux types d'induction

1. Une spire circulaire de rayon a et d'axe (Ox) , contenue dans le plan (yOz) . Un aimant, en O , est animé d'un mouvement de rotation à vitesse Ω constante dans le plan (xOy) . On admet que lorsque l'angle que fait l'aimant avec (Ox) est égal à θ , le flux du champ créé se met sous la forme $\Phi(t) = \Phi_0 \cos(\theta)$, où Φ_0 est une constante.
 - (a) Justifier l'existence d'un courant induit dans la spire. Son intensité est-elle constante ? variable ? Périodique ?
 - (b) On note R la résistance électrique de la spire et on néglige son inductance propre. Exprimer alors $i(t)$.
 - (c) En déduire l'expression de la puissance perdue par effet Joule dans la spire. Cette puissance n'est pas générée spontanément, d'où vient-elle ?
2. On considère maintenant un cas contraire : c'est la spire qui se met en rotation autour de l'axe (Oy) , et on suppose qu'il existe un champ B constant dirigé selon l'axe (Oz) : $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$. A $t = 0$, la spire est dans le plan (xOy) et on note θ l'angle que fait la spire avec l'axe (Ox) . On oriente enfin la spire tel qu'à $t = 0$ son vecteur surface soit orienté selon \vec{e}_z .
 - (a) Exprimer le flux magnétique à travers la spire.
 - (b) En déduire la force électromotrice produite. Commenter par rapport à la situation précédente.

2.2 Spire autour d'un solénoïde

Un solénoïde de rayon $R_1 = 2$ cm constitué de $n = 10$ spires/cm est alimenté par un générateur de f.é.m. $U = 30$ V. la résistance interne du générateur est de $r = 1,2 \Omega$ et celle du solénoïde $r' = 6,8 \Omega$. Une spire conductrice de rayon $R_2 = 4$ cm est placée autour du solénoïde, elle a même axe que celui-ci.

1. Quel est le flux magnétique à travers la spire ? En déduire la valeur de l'inductance mutuelle.
2. Si on éteint le générateur à $t = 0$, quelle est l'évolution du courant dans la bobine ? On négligera dans cette dernière l'influence du couplage par mutuelle.
3. En déduire la f.é.m. induite dans la spire pour $t > 0$, de résistance négligeable, si l'auto-induction est négligeable.

2.3 Plaque de cuisson

Le chauffage du fond métallique des casseroles et autres poêles de cuisson peut être réalisé par effet Joule des courants induits directement dans le fond de la casserole par un champ magnétique variable, les courants de Foucault.

Logé dans une table support en céramique, un bobinage alimenté en courant sinusoïdal, appelé inducteur, génère ce champ. L'inducteur a un rayon de 5 cm et compte vingt spires de cuivre de résistance électrique $R_1 = 18$ m Ω et d'auto-inductance $L_1 = 30$ μ H. Il est alimenté par une tension harmonique v_1 de pulsation ω . Du point de vue électromagnétique, on modélise le fond de casserole par une spire circulaire unique, fermée sur elle-même, appelée induit. L'induit a une résistance $R_2 = 8,3$ m Ω et une auto-inductance $L_2 = 0,24$ μ H. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par couplage inductif entre l'inducteur et l'induit d'inductance mutuelle $M = 2$ μ H.

1. En s'appuyant sur un schéma électrique équivalent, établir les équations électriques relatives aux deux circuits.
2. En déduire l'expression littérale de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{I_2}{I_1}$.
3. En déduire l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e = \frac{V_1}{I_1}$ du système.
4. La pulsation ω est choisie bien plus grande que R_1/L_1 et R_2/L_2 . Simplifier les deux expressions précédentes et calculer numériquement leur module.
5. On soulève la casserole. Indiquer qualitativement comment varie l'amplitude du courant appelé par l'inducteur.

2.4 Détection de voitures

Cet exercice a pour but de modéliser un détecteur de voitures en utilisant le couplage par mutuelles à un circuit oscillant au sein duquel circule un courant sinusoïdal. Soit (S_1) le circuit détecteur, modélisé par un générateur délivrant une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω , un condensateur de capacité C et un bobinage de résistance r_1 et d'inductance propre L_1 . Soit (S_2) la partie inférieure de la carcasse métallique d'une voiture, que l'on modélise par un circuit fermé de résistance r_2 et d'inductance propre L_2 . Lorsque la voiture s'approche du détecteur, des courants de Foucault apparaissent dans la carcasse de la voiture et les deux systèmes se couplent par induction. On note alors M le coefficient d'induction mutuelle.

1. À quelles conditions sur les paramètres du circuit peut-on négliger les résistances? on pensera à utiliser la notion d'impédance. On suppose cette condition réalisée par la suite.
2. Soit $u_1(t)$ la tension aux bornes du bobinage de (S_1) et i_1 le courant qui le traverse. Montrer que ces deux grandeurs sont reliées par une relation du type $u_1(t) = L_1(1 - K) \frac{di_1}{dt}$. On déterminera la valeur du coefficient K et on interprétera cette relation.
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le circuit inducteur. Exprimer alors la fréquence propre $f(K)$ du circuit en fonction de L , C et K .
4. Exprimer la variation relative $\Delta_r = \frac{f(K) - f(0)}{f(0)}$ de fréquence propre du circuit (S_1) lors de l'utilisation du système pour détecter une voiture. On fera l'hypothèse que $K \ll 1$ et l'on simplifiera l'expression obtenue. Que penser de cette méthode de détection?

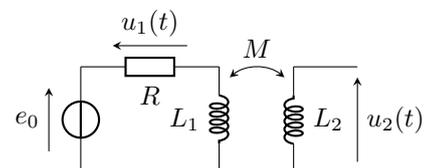
2.5 Transformateur

On considère un générateur de tension de f.é.m. E et de résistance interne R_g , débitant du courant dans une résistance utile R_u .

1. Quelle est la puissance reçue par la résistance utile?
2. Montrer que, à E fixé, cette puissance est maximale pour une valeur de R_u que l'on explicitera. On admet que ce résultat reste vrai en régime alternatif.
3. Cependant la valeur de R_u peut nous être imposée. L'utilisation d'un transformateur va permettre d'effectuer une "adaptation d'impédance" et limiter les pertes. On relie le primaire au générateur, et le secondaire à la résistance utile.
 - (a) Rappeler les relations entre tension au primaire et tension au secondaire pour un transformateur parfait. On rappelle que pour les courants, on a $\frac{i_2}{i_1} = -\frac{1}{m}$ avec m le rapport de transformation.
 - (b) À l'aide des deux relations précédentes, exprimer la quantité $\frac{u_1}{i_1}$ en fonction de m et R_u et représenter le circuit électrique équivalent.
 - (c) Conclure sur le rapport de transformation qui convient pour optimiser la puissance cédée à la charge.

2.6 Mesure d'une inductance mutuelle

Le montage ci-contre permet de mesurer le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines. Les deux bobines se font face sur la figure. La première bobine est montée en série avec une résistance $R = 100 \Omega$ et un générateur de tension e_0 sinusoïdal de fréquence $f = 2,0 \text{ kHz}$. Les tensions u_1 et u_2 sont mesurées grâce à un oscilloscope supposé idéal, c'est-à-dire de résistance d'entrée infinie.



1. Quelle est l'intensité circulant dans la bobine 2? D'après la loi de comportement habituelle de la bobine, que vaudrait alors la tension u_2 ? Pourquoi cette loi n'est pas applicable telle quelle?
2. Exprimer la tension u_2 en fonction de M et u_1 .
3. Calculer M sachant que les tensions lues à l'oscilloscope ont des amplitudes $U_1 = 3,00 \text{ V}$ et $U_2 = 0,50 \text{ V}$.
4. On fait tourner la bobine sur elle-même dans le plan de la paillasse. Indiquer sans calcul comment est modifiée la valeur de M lorsque l'angle de rotation vaut 180° , puis 90° .