

Circuits mobiles dans un champ magnétique stationnaire

Sommaire

| | |
|---|----------|
| 3.1 Couplage électromécanique via les phénomènes d'induction | 2 |
| 3.1.1 Le rail de Laplace en fonctionnement générateur | 2 |
| 3.1.2 Le haut-parleur électrodynamique : fonctionnement "moteur" | 6 |
| 3.1.3 Mise en équation | 6 |
| 3.1.4 Bilan énergétique | 7 |
| 3.2 Applications aux machines tournantes | 8 |
| 3.2.1 Moteur à courant continu à entrefer plan | 8 |
| 3.2.2 Moteur à courant continu (à bobinage) | 9 |
| 3.2.3 Moteur synchrone | 11 |
| 3.2.4 Moteur asynchrone | 12 |

Questions de cours :

- Présenter le rail de Laplace en fonctionnement générateur : système, principe de fonctionnement qualitatif, équation électrique et mécanique.
- Pour le système du rail de Laplace générateur, à partir des équations électrique $e = Ri(t) = -Bav(t)$ et mécanique $m \frac{dv}{dt} = iaB + F$ (F force motrice appliquée à la tige), effectuer un bilan énergétique que l'on interprètera.
- Expliquer le principe de fonctionnement d'un haut-parleur électrodynamique (schéma, explications qualitatives).
- Présenter le moteur à courant continu à entrefer plan : constitution (rotor, stator), fonctionnement (expliquer l'intérêt du collecteur), équations caractéristiques, exemples d'utilisation.
- Présenter le moteur synchrone : constitution, condition de synchronisme, avantages, défauts et applications.
- Présenter le moteur asynchrone : constitution, point de fonctionnement, avantages, défauts et applications.

Capacités exigibles du BO :

- Interpréter qualitativement les phénomènes observés pour l'expérience du rail de Laplace générateur.
- Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe.
- Effectuer un bilan énergétique.
- Connaître des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.
- Expliquer l'origine des courants de Foucault et en connaître des exemples d'utilisation.
- Mettre en évidence qualitativement les courants de Foucault.
- Analyser le fonctionnement du moteur à courant continu à entrefer plan en s'appuyant sur la configuration des rails de Laplace.
- Citer des exemples d'utilisation du moteur à courant continu.
- Expliquer le principe de fonctionnement d'un haut-parleur électrodynamique dans la configuration simplifiée des rails de Laplace.
- Effectuer un bilan énergétique sur le haut-parleur.

Nous allons étudier dans ce chapitre l'autre facette de l'induction, celle de Lorentz où un circuit est mobile dans un champ magnétique stationnaire, c'est-à-dire constant dans le temps. Nous en avons déjà vu des exemples lors de l'étude de la force de Laplace, mais nous allons en profiter pour utiliser les lois de l'induction et effectuer des bilans énergétiques.

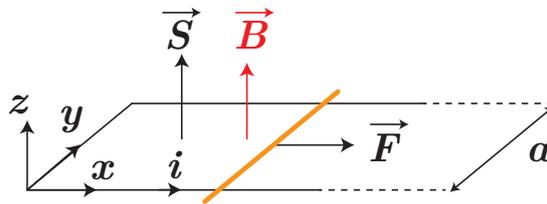
I. Couplage électromécanique via les phénomènes d'induction

Un phénomène d'induction se produit alors que le champ magnétique est uniforme dans deux situations particulières : soit lorsque l'orientation du circuit change, soit lorsque le circuit se déforme, ce que nous nous proposons d'étudier dans l'exemple-type qui suit. Il s'agit du rail de Laplace, précédemment rencontré, qui va servir de modèle lorsqu'on aborde un système faisant intervenir à la fois le phénomène d'induction et un déplacement mécanique. On a déjà observé que l'application d'un courant dans un tel circuit permettait de mettre en mouvement la barre.

I.1 Le rail de Laplace en fonctionnement générateur

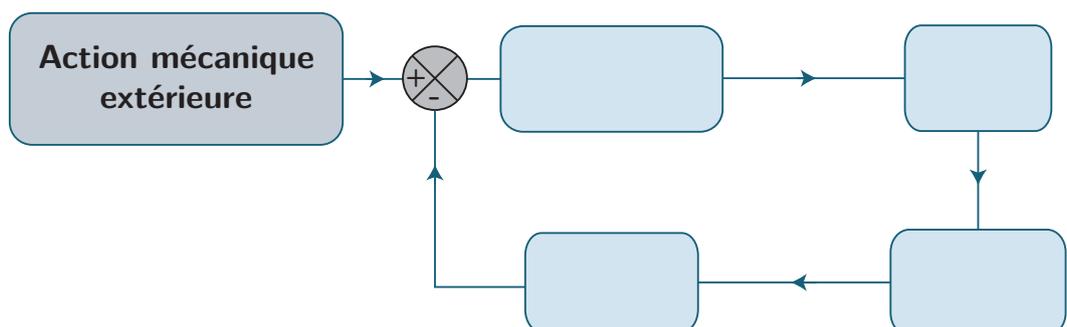
a) Dispositif

On rappelle le dispositif employé, constitué de deux rails conducteurs parallèles, distants d'une longueur a et reliés par un fil d'un côté, le circuit étant alors fermé électriquement grâce à une tige mobile conductrice de masse m placée verticalement aux rails et tirée par une force constante $\vec{F} = F \vec{e}_x$.



b) Principe de fonctionnement

Avant de résoudre des équations, on peut simplement se demander quel phénomène va se produire à l'aide des lois de Lenz et Faraday :



c) Mise en équation du phénomène

i) Équation électrique

L'équation électrique obtenue ne permet néanmoins pas de connaître la fém en fonction du temps, ne connaissant pas l'expression de la position de la tige. **Il faut donc établir une deuxième équation.**

Nous avons négligé le phénomène d'auto-induction. En théorie il faudrait ajouter dans le circuit électrique une bobine, et donc ajouter $L \frac{di}{dt}$ dans l'équation précédente. Néanmoins il paraît légitime ici de négliger son effet, dans la mesure où l'on a une seule spire de courant. Cependant ce ne sera pas toujours le cas.

ii) Équation mécanique

Exercice

Déterminer l'expression de la force de Laplace et commenter son orientation.

Les forces s'exerçant sur la barre sont donc :

- son poids selon $-\vec{e}_z$;
- la réaction des deux barres parallèles, orientées selon \vec{e}_z ;
- la force de Laplace ;
- la force exercée par l'opérateur.

L'application de la loi de la quantité de mouvement à la tige dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen conduit alors à

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_L \quad (3.4)$$

soit projeté selon l'axe (Ox) :

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = i(t)aB + F \quad (3.5)$$



Erreur fréquente : cette équation **ne peut PAS être intégrée** directement, car i est une fonction du temps. Ainsi $m\dot{x} \neq (iaB + F)t + \text{cste}$!

On aboutit donc à deux équations couplées.

Méthode : découplage du système électromécanique

- Isoler l'intensité i dans l'équation mécanique : c'est toujours possible car elle n'y intervient qu'une seule fois via la résultante ou le moment résultant des actions de Laplace ;
- injecter cette expression dans l'équation électrique (qui peut contenir des opérations de dérivation sur i) ;
- Résoudre l'équation obtenue, qui porte exclusivement sur la variable de position du circuit (avec la prise en compte des conditions initiales).

Plusieurs remarques :

- la force de Laplace est ici équivalente à une **force de frottements fluides**, s'opposant ainsi au déplacement de la tige, conformément à notre analyse initiale ;
- on aboutit à une équation différentielle du premier ordre, soluble très facilement, où l'on tend au bout de quelques τ vers une vitesse limite constante caractérisée, comme pour la chute libre, par l'exacte compensation entre la force de frottements et la force exercée ici par l'opérateur.

d) Bilan de puissance

Réaliser un bilan de puissance

Une méthode qui s'applique toujours pour obtenir un bilan de puissance d'un système électromécanique consiste à multiplier par i l'équation électrique, et par la vitesse v l'équation mécanique

En outre, on constate que la puissance de la fém vaut $P_{\text{fem}} = ei = -Bavi$ et que la puissance des forces de Laplace vaut l'opposé : $P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = iaBv$.

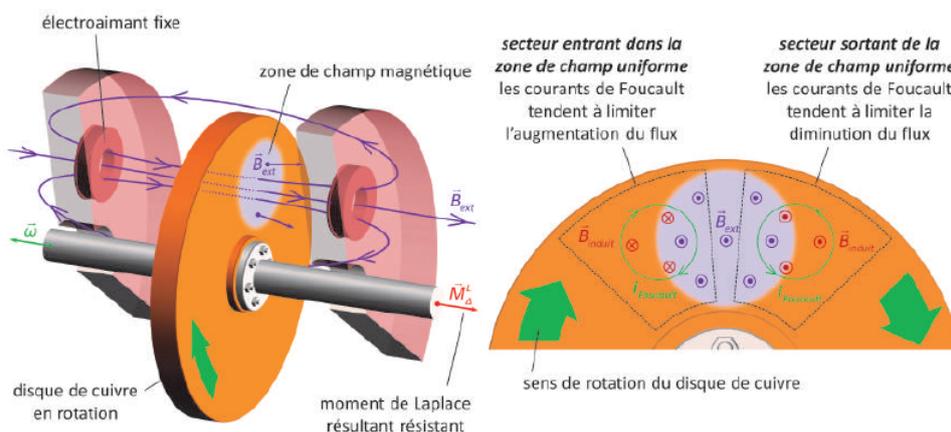
Puissance de Laplace

e) Application au freinage par induction

On l'a vu dans l'exemple précédent, la force magnétique qui peut apparaître à cause du phénomène d'induction s'oppose au mouvement du conducteur qui a été la cause du phénomène d'induction. Dès qu'il y a conversion de puissance mécanique en puissance électrique, l'action mécanique de Laplace est une action de freinage, conformément à la loi de Lenz. Cela a plusieurs applications intéressantes :

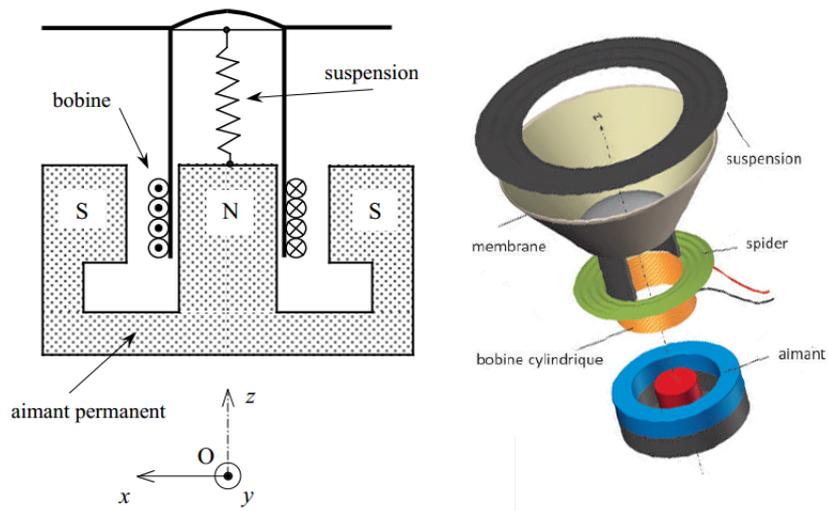
- freinage par induction sur les TGV ou les camions ;
- récupération d'énergie lors de ce freinage, afin de convertir l'énergie cinétique du véhicule en énergie électrique (voitures hybrides)

À noter que lorsque le conducteur en mouvement n'est plus filiforme, la modélisation développée jusqu'à présent n'est plus valable, mais les phénomènes restent qualitativement les mêmes. Il y a apparition de courants induits à l'intérieur du conducteur, répartis dans tout le volume, appelés **courants de Foucault**.

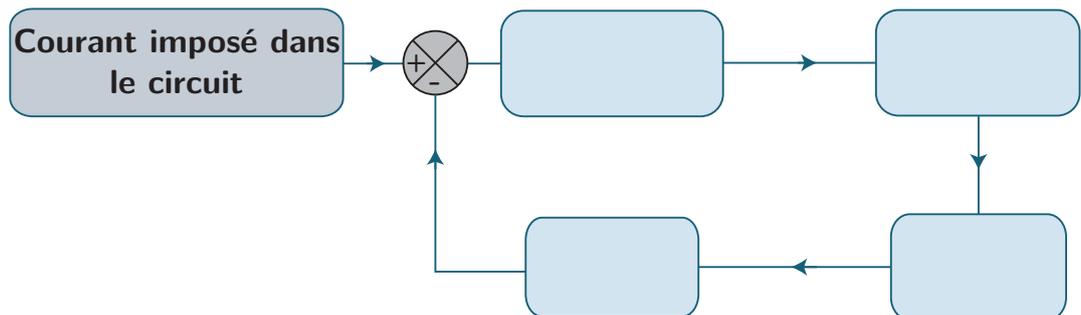


I.2 Le haut-parleur électrodynamique : fonctionnement "moteur"

a) Principe



Un haut-parleur est composé d'un aimant torique ou annulaire, permanent et fixe, permettant de créer du fait de sa géométrie un champ magnétique radial d'intensité constante B . Une membrane de masse m est reliée mécaniquement à cet aimant par une suspension (souvent en deux points), modélisée par un ressort de constante de raideur k . Un cylindre portant une bobine d'axe (Oz) de longueur de fil totale ℓ_b peut se déplacer librement dans l'entrefer de l'aimant. On peut expliquer à nouveau qualitativement ce qu'il se produit :



Si une onde de pression vient rencontrer et mettre en mouvement la membrane, une fém induite pourra être récupérée : c'est le principe du microphone ! Bien souvent les systèmes électromécaniques sont réversibles.

I.3 Mise en équation

a) Équation mécanique

Calculons dans un premier temps la force de Laplace. On négligera l'hélicité de la bobine, et l'on se place dans un repère cylindrique. \vec{B} s'exprime par $\vec{B} = B\vec{e}_r$, tandis qu'un petit élément d'une spire s'écrit $d\vec{\ell} = d\ell\vec{e}_\theta$. Par conséquent la force de Laplace élémentaire vaut :

$$d\vec{F}_L = id\vec{\ell} \wedge \vec{B} = id\ell B\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = -id\ell B\vec{e}_z \quad (3.12)$$

L'intensité du courant et du champ magnétique ne dépendant pas de la position sur le fil, on intègre alors sur tout le fil, de longueur ℓ_b , pour obtenir :

$$\vec{F}_L = i\ell_b B\vec{e}_z \quad (3.13)$$

On rend compte du couplage de la membrane avec l'air par des frottements visqueux (sans frottements, pas d'air déplacé et donc pas de son) de la forme $\vec{F}_f = -\gamma v_z \vec{e}_z$, tandis que le ressort exerce une force de rappel de la forme $\vec{F}_r = -kz \vec{e}_z$ où la membrane est repérée par rapport à sa position au repos en $z = 0$.

L'application de la loi de la quantité de mouvement à la membrane dans le référentiel de l'aimant, supposé galiléen permet d'aboutir, une fois les forces projetées selon l'axe (Oz), en posant $v = \dot{z}$, à

$$m \frac{dv}{dt} = -kz - \gamma v + i \ell_b B \quad (3.14)$$

b) Équation électrique

Astuce

Si on connaît la résultante des forces de Laplace, ou des moments associés aux forces de Laplace, il est plus judicieux de calculer directement la fém induite en se servant du bilan de puissance établi dans la section précédente, $P_{\text{fem}} + P_L = 0$

Le calcul du flux du champ magnétique n'est pas aussi évident que dans le système précédent, on peut alors se servir de la méthode :

$$P_{\text{fem}} + P_L = 0 = ei + \vec{F}_L \cdot \vec{v} = ei + i \ell_b B v \iff e = -\ell_b B v \quad (3.15)$$

ainsi on obtient directement la fém

Exercice

Représenter le circuit électrique équivalent et écrire la loi des mailles correspondante en fonction de la vitesse de déplacement du circuit.

Dès que l'on découple les deux équations en régime sinusoïdal forcé (on alimente le HP avec un GBF), on peut exprimer l'amplitude de la vitesse de déplacement de la membrane. On constate alors qu'elle fait apparaître une résonance (passe-bande mécanique), justifiant qu'il faut plusieurs HP aux caractéristiques mécaniques et électriques différentes afin de reproduire fidèlement l'ensemble du spectre audible.

1.4 Bilan énergétique

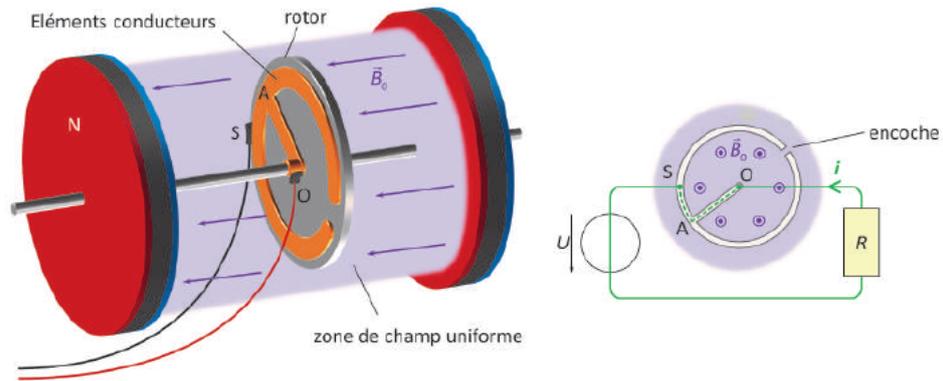
Exercice

Réaliser le bilan énergétique à partir des équations électrique et mécanique, et interpréter.

II. Applications aux machines tournantes

Les systèmes précédents permettent un calcul aisé ainsi qu'un bilan de puissance quantitatif à partir d'un petit nombre de paramètres. Les principes généraux vont pouvoir être appliqués sur des objets plus complexes tels que les moteurs, qui bien souvent peuvent également être utilisés de manière réversible en générateur d'électricité (alternateur, dynamo,...).

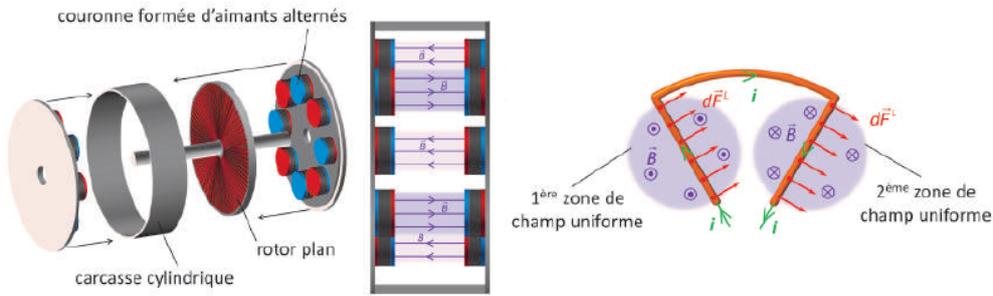
II.1 Moteur à courant continu à entrefer plan



Ce type de moteur, à courant continu, est explicitement au programme bien qu'il ne soit pas le plus utilisé. Il est constitué :

- d'une partie fixe (**stator**) composée d'une carcasse cylindrique fermée par deux aimants permanents créant à l'intérieur du stator un champ magnétique stationnaire de direction parallèle à l'axe de rotation ;
- d'une partie mobile de faible épaisseur (entrefer plan) avec un disque isolant et d'une tige conductrice avec une encoche, le tout étant lié à l'arbre de transmission : cela constitue le **rotor** ;
- des balais assurent la connexion électrique (en O et en S).

Le dispositif réel est constitué d'un très grand nombre de conducteurs, créant des couples de Laplace : c'est préférable, car la résultante des actions de Laplace est nulle, et l'arbre de transmission ne subit pas d'efforts pour compenser ces actions.



On note aussi l'utilisation d'aimants alternés, car l'usure des balais fait qu'on ne les place pas à la périphérie (vitesse la plus grande) mais plutôt proche du centre, ce qui crée des contraintes (il faut que toutes les forces de Laplace aillent dans le même sens!).

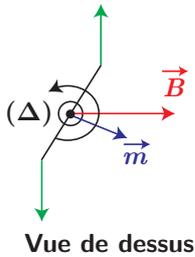
II.2 Moteur à courant continu (à bobinage)

a) Principe de fonctionnement

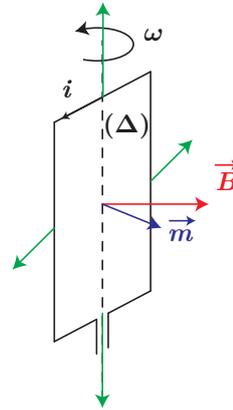
On va se baser sur les résultats obtenus au chapitre ICE1 : un cadre mobile (**le rotor**) alimenté par un courant continu, subit un champ magnétique \vec{B} uniforme (créé par le stator), et est soumis à des forces de Laplace sur chacune de ses arêtes, dont la résultante est nulle, mais le moment de forces est non nul :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} = SB \cos(\vec{S}, \vec{B}) i \vec{e}_\Delta \quad (3.16)$$

comme $\vec{m} = i\vec{S}$ est le moment magnétique associé à la spire de courant orientée.



Ce moment, comme on l'a vu, permet la rotation du cadre mobile autour de son axe de symétrie, jusqu'à ce que le moment s'aligne dans le sens du champ magnétique, dont on rappelle qu'il s'agit d'une position d'équilibre stable.

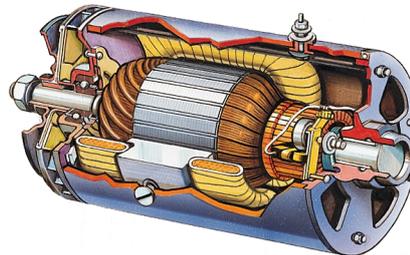


Exercice

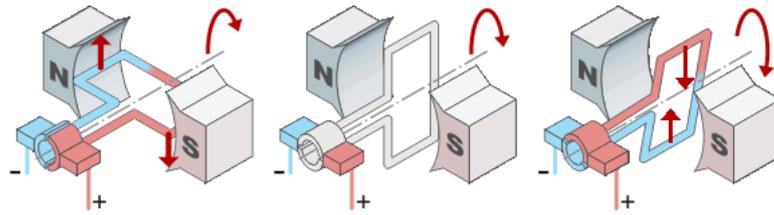
Calculer la fém induite dans la spire et montrer qu'elle est proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur.

b) Structure physique - nécessité d'un commutateur

Ci-contre correspond un dessin de moteur continu usuel. La première constatation est qu'il n'y a pas qu'une seule spire, mais un grand nombre, pour permettre de découpler les efforts sur une multitude de spires. Les lois précédemment obtenues se mettent alors sous une forme simple :



Equations caractéristiques du moteur à courant continu



Un problème subsiste, il faut intervertir le sens du courant tous les demi-tours, sinon la spire reste à l'équilibre. C'est le rôle du commutateur (auss appelé collecteur) : le but est qu'à chaque demi-tour, le courant dans la spire soit inversé. Le commutateur frotte sur la surface de la bague tournante, le contact électrique étant assuré par des "balais". Le souci majeur vient de l'usure de ces pièces mécaniques et donc il nécessite un entretien régulier, auquel s'ajoutent des frottements.

c) Équations électro-mécaniques

- Pour l'équation électrique, si on ne prend pas en compte les effets inductifs éventuels (courant continu !), on a simplement un générateur de tension u reliant une résistance (celle du bobinage) et la fém, soit

$$U = RI - e = RI + K\omega \quad (3.18)$$

- d'un point de vue mécanique, on est en présence d'un système tournant autour d'un axe fixe (Δ), on applique donc la loi du moment cinétique scalaire au rotor dans le référentiel du stator, supposé galiléen, en notant Γ_r le couple résistant supposé constant (modélisant la charge) :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma - \Gamma_r = KI - \Gamma_r \quad (3.19)$$

où J est le moment d'inertie du système par rapport à l'axe.

On écrit ici l'équation électrique avec des majuscules, comme les grandeurs sont indépendantes du temps.

Un moteur est en général conçu pour fonctionner avec une charge bien définie et une vitesse de rotation bien définie, ce que l'on appelle le **point de fonctionnement nominal**, où le **rendement** de conversion électromécanique est **maximal**. C'est en général une caractéristique indiquée sur les moteurs.

d) Bilan de puissance

On peut enfin effectuer un bilan de puissance :

$$P_{\text{fournie}} = UI \begin{cases} \rightarrow P_{\text{utile}} = \Gamma\omega \\ \rightarrow P_{\text{perdue}} = RI^2 + P_{\text{frotts}} \end{cases}$$

On appelle souvent l'ensemble des pertes par effet Joule et des pertes par frottements les **pertes collectives**. On définit enfin le rendement comme $\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fournie}}}$. Ce rendement est en général faible : environ 30% dans le meilleur des cas !

e) Applications

On trouve ces moteurs dans de nombreux systèmes du quotidien :

- ils actionnent tous les systèmes tournants de petite taille (dans l'ordinateur, la voiture, dans les robots...);
- ils sont utilisés dans les appareils électroménagers (robots, mixer), ce sont des moteurs à courant continu "détournés" car alimentés par un courant alternatif à la fois pour le rotor comme le stator (une bobine créant un champ magnétique), ce qui remplace l'utilisation d'un collecteur (=moteur universel);
- il ne faut pas oublier que ce type de convertisseur électromécanique est réversible : si on tourne mécaniquement l'axe du moteur, on crée du courant, c'est une **dynamo** (ou génératrice)!

II.3 Moteur synchrone

a) Principe

L'idée est d'employer un champ magnétique tournant (stator), que l'on peut réaliser avec plusieurs bobines, et de placer dans ce champ magnétique tournant un aimant permanent, de moment magnétique non nul (rotor), ou un circuit bobine parcouru par un courant constant.

Qualitativement, le moment magnétique cherche à s'aligner avec le champ magnétique, et va donc tenter de le suivre en tournant à son tour. Cependant, la vitesse de rotation du moment magnétique est nécessairement la même que celle du champ, d'où son nom (synchrone).

Exercice

Expliquer qualitativement à l'aide des phénomènes d'induction que la vitesse de rotation du moment magnétique doit être liée à celle du champ, si on considère un cadre mobile parcouru par un courant I traversé par un champ magnétique fixe (on se place dans le référentiel du champ magnétique).

Il y a donc **synchronisme entre les deux vitesses de rotation**. Lorsqu'un couple résistant est appliqué, et que le moteur tourne à vitesse constante, on doit avoir égalité entre les deux couples :

$\Gamma = \Gamma_r = mB \sin(\phi_0)$ soit $\sin(\phi_0) = \frac{\Gamma_r}{mB}$. On constate que le **moment magnétique est toujours en retard sur le champ**, et que ce retard croît à mesure que le couple résistant augmente (jusqu'à ce que l'on atteigne le couple maximal mB , après il y a **décrochage**).

b) Applications

Détaillons les divers avantages liés à son utilisation :

- contrôle précis de la vitesse de rotation via la vitesse de rotation du champ magnétique, quel que soit le couple (pourvu qu'il ne soit pas trop grand) : utilisation adéquate dans des usines de production où l'on souhaite une rigueur dans les vitesses;
- fortes puissances mécaniques : il équipe par exemple la ligne TGV Atlantique;
- son fonctionnement est réversible : on peut s'en servir comme alternateur (dans toutes les centrales, qu'elles soient hydrauliques, nucléaires, thermiques!) pour produire un courant alternatif;
- très bon rendement, supérieur à 95%!

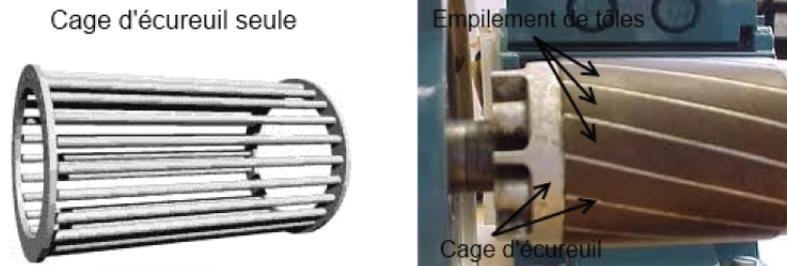
La vitesse de rotation du champ magnétique est souvent liée à la fréquence d'alimentation de 50 Hz, équivalent à 3000 tours par minutes.

on parle de **machines auto-pilotées** si on peut modifier la fréquence d'alimentation créant le champ magnétique tournant à l'aide d'un onduleur).

Un inconvénient majeur, cependant, réside dans son démarrage : en effet, on peut faire une expérience simple et placer une aiguille fixe dans un champ tournant, on se rendra compte que l'aiguille ne se mettra en mouvement que si on lui donne une vitesse initiale. Par conséquent, certains moteurs synchrones sont lancés par des moteurs différents, ou d'autres techniques plus sophistiquées.

II.4 Moteur asynchrone

a) Principe



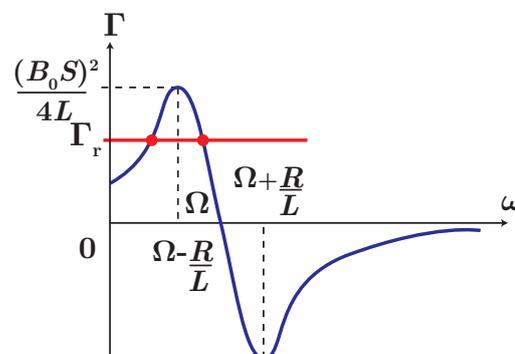
L'idée du moteur asynchrone consiste à remplacer le rotor précédent par un circuit mobile, sans source, par exemple une spire rectangulaire comme pour le moteur à courant continu. Du fait du champ magnétique variable, on a un flux variable, donc une fém, et donc des courants sont induits dans la spire, ce qui implique des forces de Laplace. Qualitativement, on peut s'attendre par la loi de Lenz à ce que le cadre mobile tourne (conséquence) en essayant de suivre le champ magnétique afin de faire en sorte que le flux ne varie pas (cause).

Vitesse de rotation d'un moteur asynchrone

Une propriété remarquable est que la fréquence de rotation du moteur est nécessairement inférieure à Ω , vitesse de rotation de \vec{B} , sinon dans le repère du champ tournant, il n'y aurait pas de phénomène d'induction, et donc pas de couple.

b) Point de fonctionnement

On peut tracer l'allure du couple développé par le moteur asynchrone en fonction de la fréquence de rotation, afin de connaître le point de fonctionnement :



Dans ce graphique, R correspond à la résistance du bobinage, L à son inductance, S sa section, et B_0 l'intensité du champ tournant. Plusieurs remarques :

c) Applications

Du fait d'excellents rendements (très proches de 1), ces moteurs sont utilisés dans de nombreuses machines tournantes nécessitant un couple important, pas de vitesse de rotation précise. Ils sont robustes, bon marché (pas d'aimant!), sans entretien.

Au quotidien, on en trouve dans les VMC, le chauffage central, les pompes de vidange de machine à laver. Ils équipent de nombreux TGV dont la ligne Eurostar.

Enfin, ils sont **réversibles**, à la seule condition qu'on **alimente le rotor avec un courant continu pour qu'il y ait un champ magnétique créé** au niveau du rotor, qui induise une fém dans le stator (car faire tourner une spire dans un bobinage n'a jamais créé de courant...).

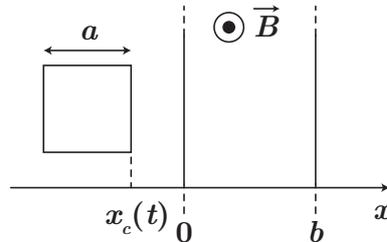
Bilan sur les moteurs

| Moteur | Continu | Synchrone | Asynchrone |
|----------------------------------|--|--|---|
| Rotor | bobinage de grande section parcouru par un courant d'induit pouvant être important | aimant ou bobinage avec aimant (électroaimant) | bobinage seul / "cage" |
| stator | aimant permanent (bobinage pour les machines de puissance) | bobines créant un champ tournant | bobines créant un champ tournant |
| Vitesse | Réglage avec U | Fixe quelque soit la charge (vitesse de \vec{B}) | Variable selon la charge |
| Couple | Réglable avec I | Variable (mais synchronisme) | Variable, mais fait diminuer la vitesse de rotation s'il augmente |
| Rendement | de 30 à 90% | 95% à 98% | 95% |
| Défauts | Rendement, usure des balais | ne démarre pas tout seul, décrochage si trop de couple demandé | Dépendance entre vitesse et charge ; surintensité au démarrage |
| Avantages | Commande simple du couple et de la vitesse de manière indépendante, peu coûteux | vitesse fixée | Robuste avec peu d'entretien |
| Fonctionnement générateur | oui (dynamo) | oui (alternateur) | oui (à condition d'alimenter le rotor) |

Exercices

3.1 Freinage d'un mobile en translation

On considère une spire conductrice carrée de côté a , de masse m et de résistance R , en translation rectiligne selon l'axe (Ox) . Le champ magnétique est non nul uniquement dans une zone de l'espace de taille $b > a$, où il est uniforme et stationnaire, égal à $B\vec{e}_z$. On lance le cadre avec une vitesse $v_0\vec{e}_x$, il pénètre dans la zone de champ à $t=0$ ($x_c(0) = 0$).



1. Expliquer qualitativement ce qu'il va se produire pour les trois cas suivants :
 - (a) $0 \leq x_c \leq a$
 - (b) $a \leq x_c \leq b$
 - (c) $b \leq x_c \leq a + b$
2. On va simplement étudier complètement le premier cas. Exprimer la force électromotrice induite dans le circuit.
3. En déduire la force de Laplace qui s'exerce sur le cadre pendant cette phase.
4. Déterminer l'expression de la vitesse au cours du temps, puis l'abscisse $x_c(t)$.
5. Donner enfin la date t_1 à laquelle l'intégralité du cadre est entrée dans la zone de champ.
6. Ce système a-t-il un intérêt pour les voitures ? Expliquer.

3.2 Rails de Laplace en interaction

Deux tiges identiques sont mobiles sans frottement sur deux rails parallèles distants d'une longueur d . Un champ magnétique permanent uniforme et vertical règne en tout point. Initialement, la tige de droite, appelée (T_2) est animée d'une vitesse v_0 tandis que l'autre, (T_1) est immobile. La résistance électrique totale du circuit vaut R , les frottements mécaniques sont négligés.

1. Montrer qualitativement que la tige (T_2) ralentit tandis que (T_1) se met en mouvement.
2. Établir la loi de variation de chacune des vitesses au cours du temps.
3. Les équations obtenues étant couplées, on les découple en introduisant $S = v_1 + v_2$ et $D = v_1 - v_2$. Obtenir les équations différentielles liées à S et D , et les résoudre.
4. Quel est l'état du mouvement après une durée suffisamment longue. Était-ce prévisible ?
5. Faire un bilan énergétique sur l'ensemble du mouvement.

3.3 Charge visqueuse pour une MCC

Considérons un moteur à courant continu, que l'on branche à une charge mécanique exerçant un couple résistant visqueux de la forme $\Gamma_r = \alpha\omega$ où $\alpha = 5 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$ et ω la vitesse angulaire de rotation. On donne les caractéristiques du moteur : tension d'alimentation $U = 50 \text{ V}$, résistance $R = 1 \Omega$ et constante électromotrice $K = \frac{C}{i} = 5 \text{ Wb}$ avec C le couple moteur.

1. Régime permanent.
 - (a) Après avoir donné l'équation électrique associée au moteur, démontrer la relation liant le couple à la tension d'alimentation.

- (b) En déduire l'expression littérale de la vitesse de rotation du moteur en fonction de K , U , α et R . Application numérique ?
- (c) En déduire l'intensité du courant.
- (d) Définir et exprimer un rendement. Application numérique ?

2. Régime transitoire

- (a) À $t = 0$ on impose la tension U , alors que le moteur est à l'arrêt. Donner l'équation différentielle associée à la vitesse angulaire du moteur. On précise que le moment d'inertie de l'association moteur-charge vaut $J = 5 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}$.
- (b) La résoudre pour obtenir l'évolution temporelle de la vitesse angulaire.
- (c) Commenter la dépendance du temps caractéristique d'évolution avec le coefficient de frottements α . Est-ce surprenant ? Expliquer.

3.4 Alternateur d'éolienne

Une éolienne entraîne, par un système de démultiplication, une bobine plate en rotation autour de l'axe (Oz). La bobine a une résistance r , une inductance L et est fermée sur une résistance R_0 . On pose $R = R_0 + r$. Elle comporte N spires de surface S et se déplace dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{e}_x$.

1. L'éolienne tourne à vitesse angulaire constante ω . Calculer la force électromotrice aux bornes de la bobine.
2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par le courant dans la bobine.
3. En régime sinusoïdal forcé, l'intensité se met sous la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$. En utilisant les notations complexes, déterminer I_m et $\cos(\varphi)$.
4. Calculer l'expression du moment des forces de Laplace subi par la bobine. En déduire la valeur moyenne en fonction de $M = NI_m S$, B et $\cos(\varphi)$ puis en fonction de N , S , B , R , L et ω .
5. Sachant que le moteur éolien a une puissance moyenne constante, représenter sur le même graphique le couple moteur et le couple résistant de Laplace.
6. En déduire le point de fonctionnement. Est-il stable ?
7. Déterminer alors la vitesse angulaire en régime permanent, et montrer qu'au-delà d'une certaine puissance P , il n'existe plus de régime permanent. Commentaire ?

3.5 Étude quantitative d'un haut-parleur

Nous proposons de poursuivre ici l'étude du haut-parleur initiée dans le cours. Nous prendrons pour point de départ les résultats donnés ci-dessous.

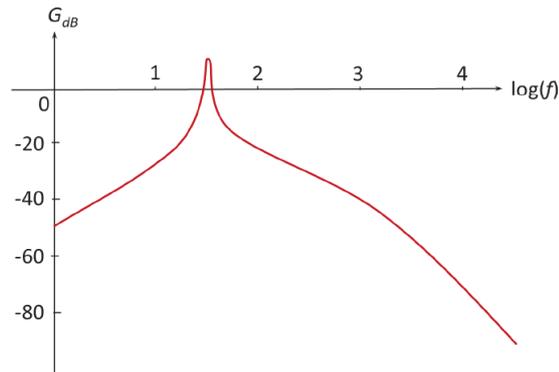
Le système d'équations couplées vérifié par le courant i circulant dans le haut-parleur et par l'abscisse x de la tige mobile s'écrit, en posant $v = \frac{dx}{dt}$:

$$\begin{cases} Ri + L \frac{di}{dt} = E - \ell_b B v & (3.22) \\ m \frac{dv}{dt} = i \ell_b B - kz - \gamma v & (3.23) \end{cases}$$

En régime permanent sinusoïdal, la vitesse de la tige \underline{v} et la tension \underline{E} aux bornes du générateur alimentant le haut-parleur vérifient, en notation complexe, la relation :

$$\frac{\underline{v}}{\underline{E}} = \frac{\ell_b B}{(B\ell_b)^2 + (R + jL\omega)(\gamma + j(m\omega - \frac{k}{\omega}))} \quad (3.24)$$

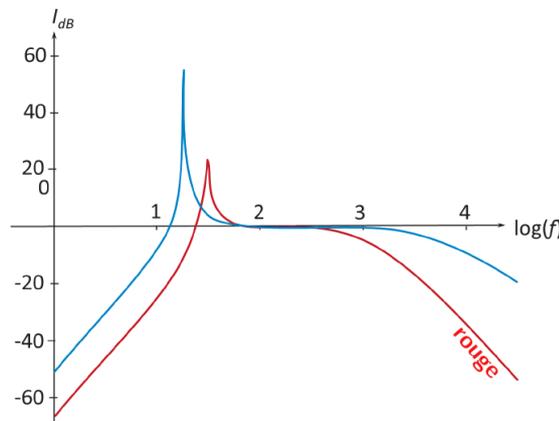
1. Pourquoi cette quantité peut-elle être a priori qualifiée de « fonction de transfert » du haut-parleur ? Quelle caractéristique devrait avoir cette fonction de transfert pour que le haut-parleur émette un signal sonore reproduisant fidèlement le signal électrique d'entrée ?
2. En utilisant des valeurs typiques pour de petits haut-parleurs du commerce, nous avons tracé numériquement le diagramme de Bode du gain associé à cette fonction de transfert :



Commentez l'allure de ce diagramme, en expliquant si elle vous semble conforme à ce que l'on attend d'un bon haut-parleur.

3. En réalité l'analyse de la fonction de transfert précédente n'est pas pertinente car, outre la conversion électromécanique, il faut prendre en compte l'efficacité du rayonnement de la membrane, qui dépend elle aussi de la fréquence. La courbe rouge de la figure ci-dessous représente l'intensité de l'onde sonore émise par le haut-parleur précédent en fonction de la fréquence, pour une amplitude fixe de la f.é.m. d'alimentation ; elle résulte d'un calcul basé sur une modélisation simple du rayonnement de la membrane.

- Commentez l'allure de ce nouveau diagramme en précisant, le cas échéant, dans quel domaine fréquentiel ce haut-parleur doit être utilisé. À votre avis, pourquoi les enceintes de bonne qualité sont-elles formées de plusieurs haut-parleurs différents ?
- Les constructeurs choisissent volontairement les paramètres du dispositif afin d'obtenir une fréquence de résonance la plus basse possible. Quel est l'intérêt de ce choix ?



4. La courbe bleue de la figure précédente correspond à un second haut-parleur de caractéristiques légèrement différentes du précédent. Comment se distinguent ces deux haut-parleurs ? Lequel vous semble le plus intéressant ?

5. On s'intéresse maintenant aux propriétés purement électrocinétiques du haut-parleur.

- Montrer que le courant circulant dans le haut-parleur est lié à la f.é.m. par une relation de la forme :

$$\frac{E}{i} = R + jL\omega + \underline{Z}_m(\omega) \quad (3.25)$$

où \underline{Z}_m sera exprimée en fonction des données.

- Proposer un nouveau schéma électrique équivalent pour le circuit. Comment expliquer que la quantité \underline{Z}_m soit appelée "impédance motionnelle" du haut-parleur ?
- Existe-t-il une association de dipôles simples dont l'impédance équivalente serait \underline{Z}_m ? Conclure.