–SP1–

Signaux physiques

Sommaire

Questions de cours :

- Donner la définition de la valeur moyenne et de la valeur efficace d'un signal périodique, et l'appliquer au signal sinusoïdal ;
- Montrer le lien entre période, pulsation et fréquence ;
- Définir le déphasage entre deux signaux synchrones et présenter les cas particuliers.
- Énoncer la décomposition en série de Fourier en détaillant la signification de chaque terme, et représenter le spectre associé à un signal quelconque au choix du khôlleur.

Capacités exigibles du BO :

- Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
- Réaliser l'analyse spectrale d'un signal.
- Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustiques et électromagnétiques.
- Savoir que l'on peut décomposer un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
- Définir la valeur moyenne et la valeur efficace.

Manipulations :

- Simulations numériques ;
- Utilisation de la carte Digilent avec la fonction analyseur de réseau (signal pur, deux signaux déphasés, synthèse d'un signal quelconque, ...).
- Analyse d'un son *via* Audacity.

Introduction

L'évocation du terme signal dans la vie courante est liée généralement aux signaux sonores, visuels, aux télécommunications via internet. En physique on élargit davantage cette notion, car c'est à la base de très nombreux champs de la physique : thermodynamique, optique, électricité, mécanique des fluides, etc. On va ici présenter quelques caractéristiques fondamentales de ces signaux, qu'il faudra savoir se réapproprier dans de nombreux prochains chapitres.

I. Généralités sur les signaux

I.1 Exemples

On pourrait définir de la manière suivante un signal physique : il s'agit d'une fonction mathématique de la variable temps décrivant l'évolution d'une grandeur physique. Elle s'accompagne parfois de la dépendance en d'autres variables telles que les variables d'espace, lorsque l'on considère la propagation de ces signaux dans l'espace. Prenons quelques exemples :

- **signal acoustique** issu de la vibration des molécules d'air, qui se propage de proche en proche. On caractérise ce signal par des grandeurs mécaniques : pression, vitesse moyenne des particules. Le domaine de fréquences des ondes acoustiques audibles par l'homme est de 20 Hz à 20 kHz, au-delà on parle d'**ultrasons**.
- **signal mécanique** : pour un solide, on peut s'intéresser à son mouvement (par exemple pour un diapason, une corde de guitare). Les grandeurs physiques associées sont souvent la position, la vitesse, ou l'accélération.
- **signal optique** englobant tous les signaux électromagnétiques (radio, micro-ondes, infra-rouge,..., visible, rayons X), caractérisés par deux grandeurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ (champs électrique et magnétique).

> On peut aussi caractériser le signal optique par la présence d'un flux de photons ayant une énergie caractéristique du rayonnement, ce qu'on étudiera dans le chapitre d'introduction au monde quantique.

- **signal électrique** dans des circuits : on observe régulièrement les tensions et intensités au cours du temps (cf. chap SP4). Les fréquences mises en jeu vont en général jusqu'à 1 MHz (au-delà, il faut adopter une théorie électromagnétique).
- **signal thermodynamique** par exemple lors de l'étude des variations de température ou de pression au cours du temps pour tout type de matériaux (gaz, solides, liquides). En général les fréquences mises en jeu sont faibles.

I.2 Détection et mesure des signaux

Afin de détecter, voire mesurer des signaux physiques, il est nécessaire d'avoir un capteur adapté. De nature parfois physiologique (oreilles, yeux), on emploie beaucoup de capteurs liés à des phénomènes physiques. En général il s'agit même de **transducteurs**, convertissant le signal d'une nature physique particulière en un signal d'une autre nature, très souvent électrique.

Citons par exemple :

*
- les accéléromètres ;
- les transducteurs électromécaniques basés sur l'effet piézoélectrique (convertissant un mouvement en tension) utilisé dans les micros ou les capteurs de pression ;
- les capteurs CCD ou les photodiodes pour les signaux optiques ;
- les thermocouples pour la mesure de température ;

I.3 Cas des signaux périodiques

a) Définitions et exemples

Définition

On dit qu'un signal $s(t)$ est **périodique de période T** si :

$$s(t+T) = s(t) \quad \forall t \tag{1.1}$$

On parle de signal **pseudo-périodique** si un phénomène se produit périodiquement, tout en ne vérifiant pas la condition précédente à tout instant, par exemple un pendule qui oscille repasse à chaque instant par la position verticale, mais son amplitude décroît.

b) Valeur moyenne d'un signal périodique

Définition ♥

Soit un signal périodique $s(t)$ de période T. La valeur moyenne de ce signal est définie par :

*

$$\boxed{s_{\text{moy}} = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\text{d}t \quad \forall t_0} \tag{1.2}$$

En général on prend $t_0 = 0$ mais ce n'est pas obligatoire. Cette formule est à connaître par cœur.

Exercice

Représenter le signal $s(t)$ périodique, de période T, valant 5 pour $t \in [0; 0{,}8T[$ et -3 pour $t \in]0{,}8T; T]$.
Calculer alors la valeur moyenne de ce signal.

c) Valeur efficace d'un signal périodique

Définition ♥

Soit un signal périodique $s(t)$ de période T. La valeur efficace de ce signal est définie par :

*

$$\boxed{s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\text{d}t} \quad \forall t_0} \tag{1.3}$$

Cette formule est également à connaître par cœur.

La signification physique sera plus claire lorsque l'on traitera de la puissance moyenne transportée par un signal (en particulier électrique).

II. Signaux sinusoïdaux

II.1 Définition

Définition

Un signal sinusoïdal s'écrit de la forme la plus générale comme :

$$s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi) \tag{1.4}$$

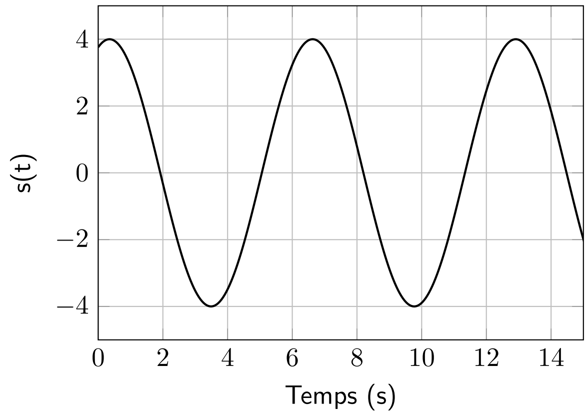
avec :

- s_0 l'**amplitude** ;
- ω la **pulsation** ;
- φ la **phase** à $t = 0$, encore appelée **phase à l'origine** (des temps) ;
- $\omega t + \varphi$ est simplement appelée la **phase**.

Un choix de l'origine des temps permet souvent de faire en sorte que $\varphi = 0$ dans des problèmes physiques.

Ne pas confondre l'amplitude avec l'**amplitude crête-à-crête** correspondant à la différence entre la valeur minimale et maximale que peut prendre s, c'est-à-dire $2s_0$.

Sa représentation graphique en fonction du temps est alors de la forme :



Manipulation

Animation : `http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/general/sinus.php`

Il existe deux autres formes utilisées à connaître :

$$s(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad s_0 = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{ou} \quad s(t) = s_0 \sin(\omega t + \psi) \tag{1.5}$$

En effet, à l'aide des relations trigonométriques, $s(t) = s_0 (\cos\omega t \cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi)$ et donc :

$$A = s_0 \cos\varphi \quad \text{et} \quad B = -s_0 \sin\varphi \tag{1.6}$$

conviennent et l'on a également $s_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$; d'autre part $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ donc $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$ permet le passage à la seconde forme.

II.2 Lien entre la pulsation, la période et la fréquence

On peut exprimer le lien entre fréquence ν, période T et pulsation ω, pour un tel signal. En effet, on peut déjà poser que $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$.

* On sait que la fonction $\cos(x)$ est $2\pi-$périodique. Si on part de $s(t) = s_0\cos(\omega t+\varphi)$, au bout de $t = T$, la phase doit avoir été augmentée de 2π comme. Donc $\omega T+\varphi = 2\pi+\varphi$, soit

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu} \tag{1.7}$$

On peut aussi le montrer en raisonnant sur le changement de variable $x = \omega t$, après une période : $x + 2\pi = \omega(t + T)$ donc $2\pi = \omega T$.

On peut alors écrire un signal sinusoïdal en fonction de T, ν ou ω :

$$\boxed{s(t) = s_0\cos(\omega t+\varphi) = s_0\cos(2\pi\nu t+\varphi) = s_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)} \tag{1.8}$$

Exercice

Sur le signal du graphique précédent, déterminer ses caractéristiques : amplitude, pulsation, période, fréquence, phase à l'origine des temps.

On part de $s(t) = s_0\cos(\omega t+\varphi)$. $s_0 = 4$ (ne pas confondre avec l'amplitude crête-à-crête !!) ; période mesurée par les passages autour de 0 :

$$2T = 14{,}5 - 1{,}9 \simeq 12{,}6\,\mathrm{s} \Longrightarrow T = 6{,}3\,\mathrm{s} \tag{1.9}$$

Donc $\nu = \dfrac{1}{T} = 0{,}16\,\mathrm{Hz}$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \simeq 1\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Pour la phase à l'origine enfin, s s'annule <u>en décroissant</u> la première fois pour $t_1 \simeq 1{,}9\,\mathrm{s}$:

$$\cos(\omega t_1+\varphi) = 0 \Longleftrightarrow \omega t_1+\varphi = +\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega t_1 = -0{,}33\,\mathrm{rad} = -20° \tag{1.10}$$

II.3 Valeur moyenne, valeur efficace

Exercice

Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace pour le signal $s(t) = s_0\cos(\omega t+\varphi)$ (à savoir refaire) :

Valeur moyenne :

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s_0\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[\frac{\sin(\omega t+\varphi)}{\omega}\right]_0^T = \frac{1}{2\pi}\left(\sin(\omega T+\varphi)-\sin(\varphi)\right) = 0 \tag{1.11}$$

car $\omega T = 2\pi$.

Valeur efficace :

$$s_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T s_0^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t \tag{1.12}$$

soit en linéarisant, avec $\cos^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}\big(1+\cos(2\omega t+2\varphi)\big)$:

$$s_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2T}s_0^2\left(\underbrace{\int_0^T \mathrm{d}t}_{=T} + \underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t+2\varphi)\mathrm{d}t}_{=0}\right) = \frac{s_0^2}{2} \tag{1.13}$$

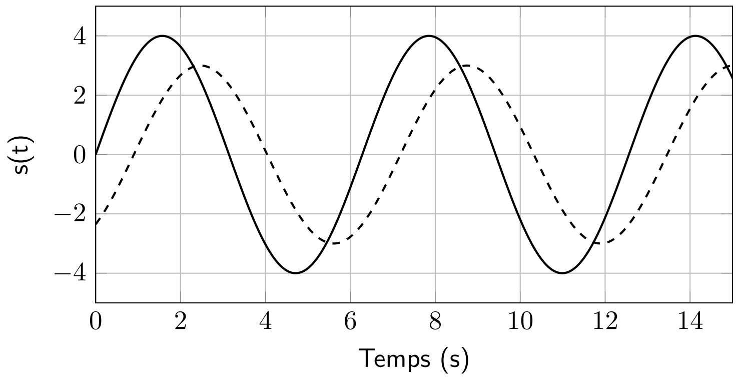
Valeur moyenne et efficace d'une fonction sinusoïdale

* Pour un signal sinusoïdal de la forme $s_0\cos(\omega t+\varphi)$:

- la valeur moyenne est nulle ;
- la valeur efficace vaut $s_{\text{eff}} = \dfrac{|s_0|}{\sqrt{2}}$ si s_0 est l'amplitude.

II.4 Déphasage de deux signaux sinusoïdaux synchrones

Lorsqu'on réalise certains circuits électriques, ou tout simplement que l'on regarde l'allure d'un signal temporel à des endroits différents lorsqu'il y a propagation dans l'espace (cf. chapitre SP5), il apparaît une notion importante en pratique que l'on appelle **déphasage**. Il s'agit d'une grandeur liée, pour deux signaux **synchrones** (c'est-à-dire de même fréquence), au décalage temporel qui apparaît lors de la représentation des deux signaux au cours du temps, comme l'illustre la figure ci-dessous.



Déphasage de deux signaux synchrones

Pour deux signaux sinusoïdaux synchrones, donc de même fréquence ou pulsation de la forme $s_1(t) = s_{10}\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = s_{20}\cos(\omega t + \varphi_2)$, on appelle déphasage du signal 2 par rapport au signal 1 la grandeur :

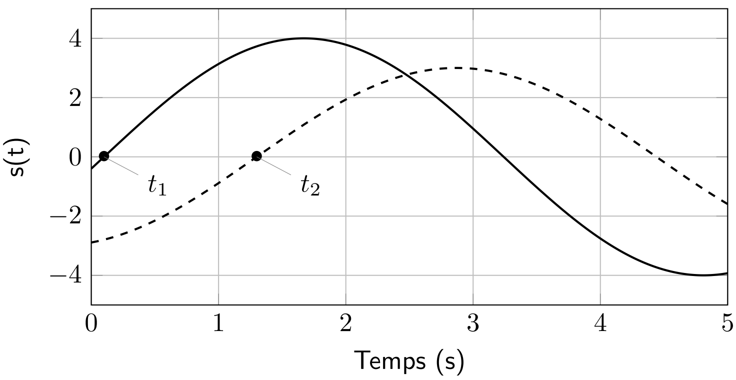
$$\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$$

il s'agit *a priori* d'une fonction dépendant du temps.

Manipulation

Animation : `http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Alternatif/Dephasage_F.php`

On parle souvent d'**avance** ou de **retard** pour signifier respectivement $\Delta\varphi_{2/1} > 0$ ou $\Delta\varphi_{2/1} < 0$, mais cette notion est généralement arbitraire, et provient d'un lien de causalité (une onde est à l'origine d'une deuxième).



Soit t_1 et t_2 deux instants correspondant à la même phase (soit encore le même endroit du motif sinusoïdal, par exemple au sommet ou lorsque la courbe coupe l'axe des abscisses) pour les deux signaux. L'égalité des phases à ces deux instants impose :

$$\omega t_1 + \varphi_1 = \omega t_2 + \varphi_2 \Longleftrightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = \omega(t_1 - t_2) = \frac{2\pi}{T}(t_1 - t_2) = \frac{2\pi\Delta t}{T} = \Delta\varphi_{2/1} \qquad (1.14)$$

Déphasage et décalage temporel

Pour deux signaux sinusoïdaux synchrones le déphasage $\Delta\varphi_{2/1}$ du signal 2 par rapport au signal 1 est défini par

$$\Delta\varphi_{2/1} = \frac{2\pi\Delta t}{T} \quad \text{en radian} \tag{1.15}$$

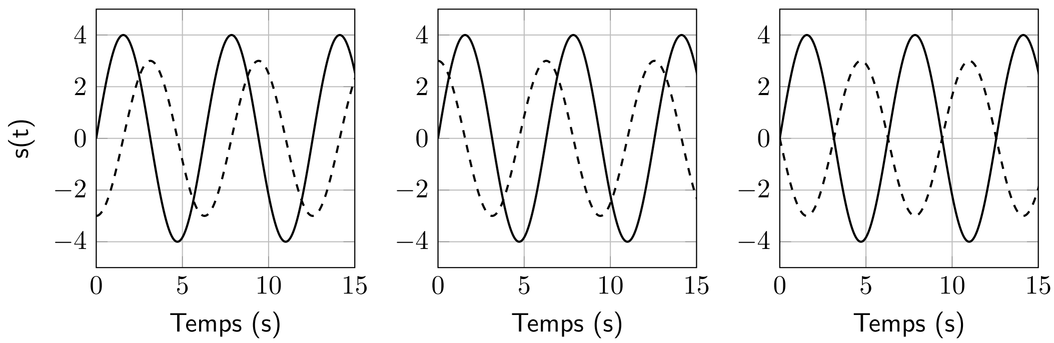
* où $\Delta t = t_1 - t_2$ est tel que $|t_1 - t_2|$ est le plus petit écart temporel algébrique entre deux points identiques du motif sinusoïdal. On l'exprime souvent entre $-\pi$ et π.

Exercice

Sur l'exemple précédent, exprimer le déphasage du signal 2 (pointillés) par rapport au signal 1 (traits pleins) en radian et en degré.

On mesure un décalage temporel entre le signal 2, en retard par rapport au signal 1, d'environ $\Delta t = -0{,}9$ s, avec une période temporelle vérifiant $2T = 12{,}5$ s donc $T = 6{,}25$ s. Ainsi $\Delta\varphi_{2/1} = -0{,}9$ rad $= -52°$.

Outre le cas $\Delta\varphi_{2/1} = 0[2\pi]$ où les signaux sont **en phase**, on distingue 3 cas particuliers qu'il convient de connaître lorsqu'on compare le signal 2 (pointillés) par rapport au signal 1 (traits pleins) :



Respectivement : quadrature retard $\Delta\varphi_{2/1} = -\dfrac{\pi}{2}$; quadrature avance $\Delta\varphi_{2/1} = +\dfrac{\pi}{2}$; opposition de phase $\Delta\varphi_{2/1} = \pm\pi$.

Exercice

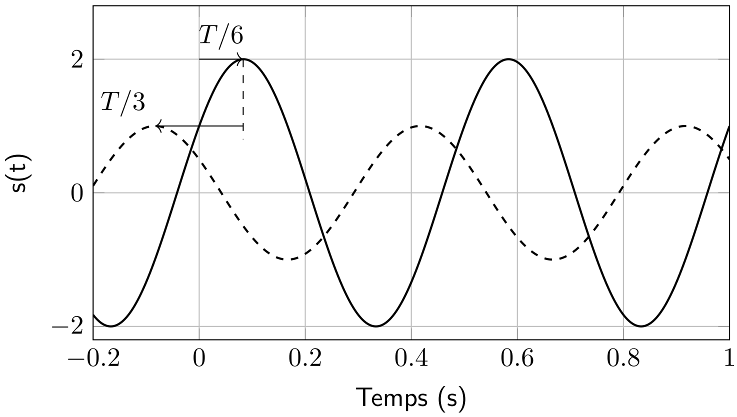
Représenter l'allure du signal $s(t) = 2\cos\left(4\pi t - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Sur le même graphique, représenter l'allure du signal $f(t)$, signal synchrone à s, d'amplitude divisée par deux, et de déphasage $\Delta\varphi_{f/s} = +\dfrac{2\pi}{3}$

$s(t)$ est représentée en traits pleins, $f(t)$ en pointillés. On trouve d'abord la période $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(4\pi) = 0{,}5$ s.

Ensuite, connaissant le tracé de la fonction $\cos$ on peut calculer le décalage temporel à réaliser par rapport à l'axe des ordonnées pour obtenir le signal déphasé :

$$\Delta\varphi_{s/\cos} = -\pi/3 = \frac{2\pi\Delta t}{T} \Longleftrightarrow \Delta t = T\frac{-\pi/3}{2\pi} = -\frac{T}{6}$$

Il faut donc décaler le signal vers la droite (déphasage négatif) de $T/6$. Ensuite pour le signal f, de la même façon on trouve qu'il faut décaler f vers la gauche (déphasage positif) de $T/3$ par un calcul similaire, par rapport à s.

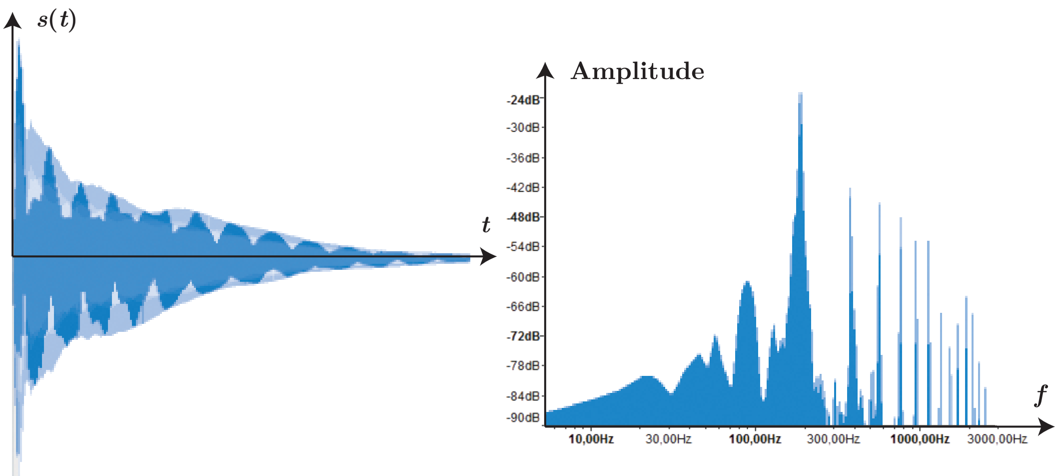


III. Représentation spectrale

La représentation temporelle d'un signal périodique n'a assez peu d'intérêt, car au bout d'une période, on connaît complètement le signal vu qu'il se répète dans le temps décalé d'un multiple de la période T. On va plutôt s'intéresser à l'aspect **spectral** du signal, à savoir quelles fréquences sont présentes dans le signal. Par exemple, on sait qu'un son émis par un instrument est souvent lié à plusieurs fréquences.

III.1 Notion de spectre

Pour un signal quelconque non forcément périodique, on peut tracer un **spectre** dit continu, où sont représentées l'importance de chaque fréquence dans le signal. L'enregistrement sonore d'une guitare et le spectre associé est représenté ci-dessous :

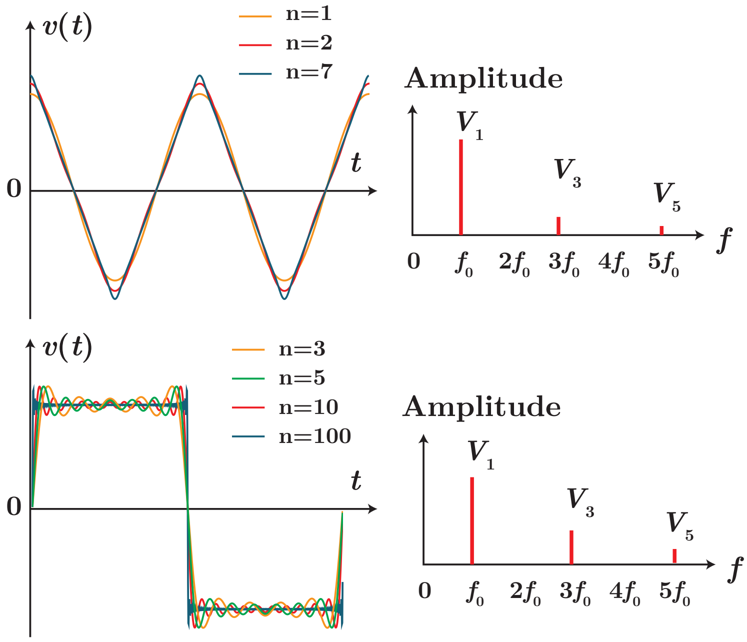


On constate que certaines fréquences semblent plus prononcées que d'autres, que l'on peut associer à des harmoniques particulières. D'un point de vue concret, les harmoniques jouent un rôle très important dans la perception d'un son, comme l'illustre l'exemple d'un son de piano à corde pincée ou corde frappée.

Manipulation

Simulation : `http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/general/synthese.html`

Plusieurs exemples sont représentés ci-dessous pour des signaux fréquemment rencontrés (triangle et créneau). Les spectres présentés sont discrets, car composés d'un nombre restreint de « pics ».



Selon le nombre d'harmoniques, on obtient un signal plus ou moins proche de la réalité. Plus le signal possède des variations brutales, plus il faudra d'harmoniques pour le décrire.

III.2 Décomposition de Fourier

Propriété : développement en série de Fourier (♥)

Tout signal périodique de fréquence f_s se décompose en une somme infinie de sinusoïdes de fréquences multiples de f_s appelé **développement / décomposition en série de Fourier**

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos\left(2\pi n f_s t + \varphi_n\right) \tag{1.16}$$

où

- S_0 est la composante continue du signal, cela correspond même à sa **valeur moyenne**
- $f_s = \dfrac{1}{T}$ et S_1 caractérisent la fréquence et l'amplitude de ce qu'on appelle le mode **fondamental** ;
- pour $n \geq 2$ on parle d'**harmoniques de rang n** : ils correspondent à des signaux de fréquence multiple du fondamental $f_n = n f_s$.
- φ_n sont les déphasages à $t = 0$ pour chaque harmonique de rang n.

On s'arrange souvent pour que $S_n > 0$, en utilisant le déphasage adapté ($-\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi + \pi)$).

Exercice

Tracer l'allure du spectre du signal $s(t) = 2 + \dfrac{1}{2}\cos(\pi t + 0{,}5) + 3\cos(3\pi t) + 2\sin(5\pi t)$.

Exercice

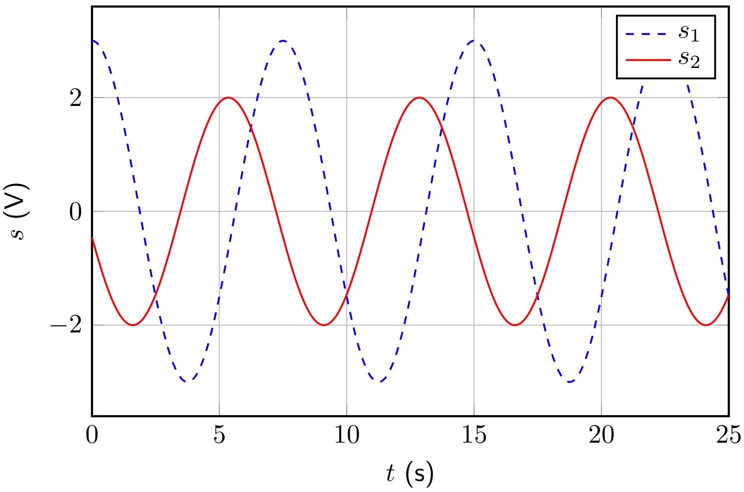
Tracer l'allure du spectre du signal $s(t) = \cos^2(\omega t)(1 + \cos(\omega t))$.

Le développement conduit à $s(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\cos(\omega t) + \dfrac{1}{2}\cos(2\omega t) + \dfrac{1}{4}\cos(3\omega t)$

Exercices

1.1 Deux signaux électriques

On considère deux signaux électriques dans un circuit, nommés s_1 et s_2. Le relevé de ces signaux à l'oscilloscope fournit l'oscillogramme suivant :



1. Déterminer avec précision les valeurs de la fréquence, la période, la pulsation et l'amplitude de ces deux signaux.
2. Calculer le déphasage de s_2 par rapport à s_1 (en degré).

1.2 Valeur moyenne et efficace

On considère un signal périodique (période T) dit "triangulaire", défini mathématiquement par une fonction continue $s(t)$ décrite sur $[0;T]$ de la manière suivante (avec t en secondes) :

$$\begin{cases} s(t) = -5 + 4t \quad \text{sur} \quad \left[0;\dfrac{T}{2}\right] & (1.17) \\ s(t) = 10 - 4t \quad \text{sur} \quad \left[\dfrac{T}{2};T\right] & (1.18) \end{cases}$$

1. Préciser la fréquence de ce signal. Le représenter temporellement.
2. Calculer la valeur moyenne de ce signal.

1.3 Signaux sinusoïdaux

1. On considère le signal $s(t) = A\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t + \varphi)$ où A et φ sont des constantes, et $\omega_1 \neq \omega_2$.
   (a) Déterminer les fréquences contenues dans $s(t)$. Représenter son spectre d'amplitude. Préciser sa valeur moyenne.
   (b) Examiner le cas où $\omega_1 = \omega_2$
2. On considère maintenant le signal $s(t) = 10\sin(80\pi t) + 5\sin(120\pi t + 0{,}6\pi)$ où le temps est exprimé en secondes. Représenter son spectre en amplitude. Préciser la période de ce signal.

1.4 Spectres

Relier chaque signal temporel à son spectre, en justifiant :