

Des oscillateurs électriques idéaux et amortis

Sommaire

7.1 Un oscillateur harmonique : le circuit LC	2
7.1.1 Expérience	2
7.1.2 Équation différentielle	2
7.1.3 Résolution	3
7.1.4 Commentaire : approche énergétique	4
7.2 Oscillateurs amortis	5
7.2.1 Observations expérimentales d'un circuit RLC	5
7.2.2 Mise en équation	6
7.2.3 Résolution	7
7.2.4 Différents régimes de fonctionnement	8

Questions de cours :

- Présenter l'oscillateur harmonique sur l'exemple du circuit LC : équation différentielle, pulsation propre, résolution dans le cas d'un condensateur initialement chargé sous une tension E_0 .
- Donner la forme canonique d'une équation différentielle d'un oscillateur amorti. En régime pseudo-périodique, établir l'expression de la pseudo-période T et justifier qu'on puisse la confondre avec la période propre de l'oscillateur non amorti en précisant dans quel cadre.
- Après avoir rappelé la solution d'une ED d'un oscillateur amorti en régime pseudo-périodique, la résoudre entièrement avec des conditions initiales au choix du khôlleur.
- Représenter graphiquement les différents régimes de fonctionnement d'un oscillateur amorti soumis à un échelon de tension : on attend la représentation temporelle et le portrait de phase associé.
- Démontrer que dans le cas d'un oscillateur amorti en régime pseudo-périodique, Q est l'ordre de grandeur du nombre de pseudo-périodes observables pendant le régime transitoire.

Capacités exigibles du BO :

- Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.
- Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
- Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.
- Prévoir l'évolution du système en utilisant un portrait de phase fourni.
- Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
- Connaître la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.
- Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.

Manipulations de cours :

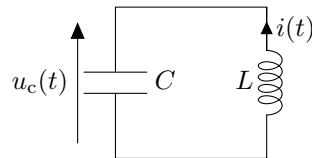
- Circuit RLC série ;

On a considéré dans les chapitres précédents des circuits électriques ne comportant que des condensateurs et/ou des bobines, mais jamais les deux composants au sein d'une seule maille. Des comportements nouveaux vont être observés lorsque les utilise conjointement. On étudiera deux cas limites : le cas idéal où l'absence de dissipation conduit à un oscillateur harmonique et le cas réel tenant compte de la dissipation, où différents comportements pourront être observés. Dans un deuxième temps, nous étudierons l'usage de signaux sinusoïdaux pour mettre en évidence le phénomène de résonance.

I. Un oscillateur harmonique : le circuit LC

I.1 Expérience

On étudie le circuit suivant constitué de l'association série d'un condensateur de capacité $C = 100 \text{ nF}$ et d'une bobine d'inductance $L = 150 \text{ mH}$. Par un dispositif non décrit ici, on a initialement chargé le condensateur sous une tension $E_0 = 1 \text{ V}$ et on mesure la tension aux bornes du condensateur, et l'intensité traversant les composants. À $t = 0$, on relie le condensateur à la bobine.



On observe alors les résultats suivants :

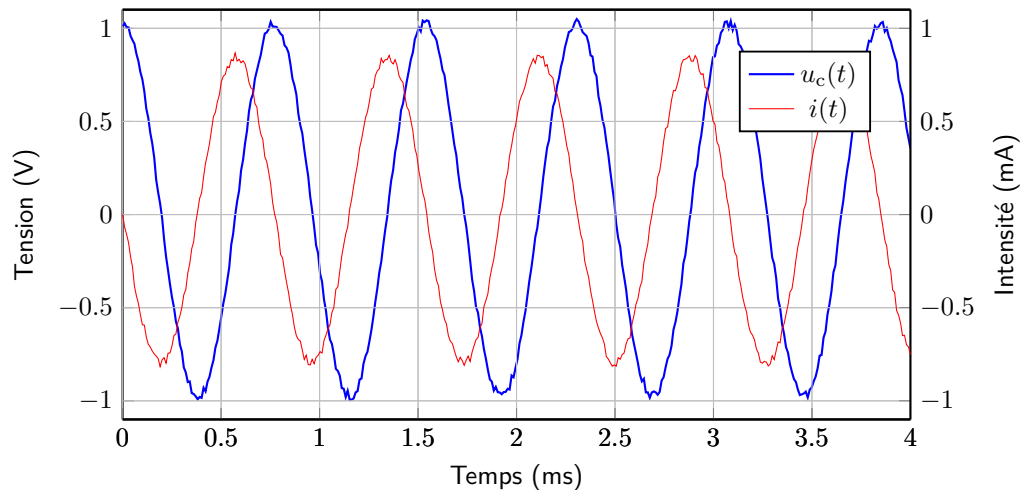


Figure 7.1 – Évolution au cours du temps de la tension aux bornes du condensateur et du courant dans le circuit

On constate que ces deux grandeurs mesurées sont sinusoïdales, de même fréquence, en quadrature de phase. L'amplitude de la tension correspond à la tension E_0 .

I.2 Équation différentielle

Pour comprendre un tel comportement, il nous faut dans un premier temps établir l'équation sur $u_c(t)$. On applique la loi des mailles :

$$u_c(t) + u_L(t) = 0 = u_c(t) + L \frac{di}{dt} \quad (7.1)$$

Or la relation courant-tension pour le condensateur en convention récepteur est $i(t) = C \frac{du_c}{dt}$, d'où :

$$* \quad LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c(t) = 0 \iff \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c(t) = 0 \quad (7.2)$$

D'un point de vue de l'homogénéité, on peut tout de suite constater que $\left[\frac{1}{LC} \right] = T^{-2}$, d'où l'on pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Définition

On appelle **oscillateur harmonique** un système dont la variable $f(t)$ le décrivant vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega_0^2 f = \text{cste} \quad (7.3)$$

où le membre de droite est une constante quelconque. ω_0 est alors appelé **pulsation propre** et a comme dimension l'inverse d'un temps.

Le circuit LC série constitue alors bien un oscillateur harmonique. La résolution de cette équation va permettre de comprendre cette appellation.

I.3 Résolution

Dans la suite, on présente la méthode la plus générale associée à l'équation du type

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \ell_0 \quad (7.4)$$

a) Première étape : équation sans second membre

Il s'agit ici de trouver la solution générale de l'équation sans second membre

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7.5)$$

On admet que la solution peut s'écrire sous 3 formes équivalentes :

$$\begin{cases} x_{\text{ssm}}(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) & (7.6) \\ x_{\text{ssm}}(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) & (7.7) \\ x_{\text{ssm}}(t) = D \sin(\omega_0 t + \psi) & (7.8) \end{cases}$$

Les constantes A , B , C , D , φ et ψ étant à déterminer par la suite. Toutes ces formes mènent au même résultat final mais, suivant les cas, les calculs peuvent être notablement simplifiés par un choix astucieux. Nous prendrons ici la première, et ainsi

$$x_{\text{ssm}}(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (7.9)$$

b) Deuxième étape : solution particulière

Nous cherchons une solution simple vérifiant (7.4). Lorsque le second membre est une constante, il convient de chercher une solution constante. Ici :

$$x_p(t) = \ell_0 \quad (7.10)$$

est bien *une* solution de l'équation de l'oscillateur harmonique

c) Troisième étape : conditions initiales (C.I.)

La solution générale de l'équation est alors la somme des deux solutions précédentes :

$$x(t) = x_{\text{ssm}}(t) + x_p(t) = \ell_0 + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (7.11)$$

Il est temps de déterminer les constantes en utilisant les **conditions initiales**. L'équation différentielle étant d'ordre 2, il est nécessaire de connaître deux conditions initiales, par exemple :

$$\begin{cases} x(t=0) = \ell_0 & (7.12) \\ \frac{dx}{dt}(t=0) = v_0 & (7.13) \end{cases}$$

Écrivons l'expression de $x(t) = x_{\text{ssm}}(t) + x_p(t)$ et de sa dérivée au temps initial :

$$\begin{cases} x(t=0) = A \cos(0) + B \sin(0) + \ell_0 = A + \ell_0 & (7.14) \\ \frac{dx}{dt}(t=0) = -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) = B\omega_0 & (7.15) \end{cases}$$

Ces deux systèmes d'équations mènent à $A = 0$ et $B = v_0/\omega_0$, ce qui termine la résolution de cette équation :

$$x(t) = \ell_0 + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (7.16)$$



Exercice

En reprenant l'exemple du circuit LC, exprimer la tension $u_c(t)$, puis en déduire l'expression de l'intensité du courant.

L'équation étant sans second membre, on peut écrire la forme des solutions : $u_c(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. On cherche A et B à l'aide des conditions initiales liées à la continuité de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité traversant la bobine :

$$u_c(t = 0^+) = u_c(t = 0^-) = E_0 = A \quad \text{et} \quad i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0 = -B\omega_0 \quad (7.17)$$

d'où

$$u_c(t) = E_0 \cos(\omega_0 t) \implies i(t) = C \frac{du_c}{dt} = -C\omega_0 E_0 \sin(\omega_0 t) \quad (7.18)$$

1.4 Commentaire : approche énergétique

La solution obtenue est bien conforme aux mesures expérimentales : les deux signaux sont sinusoïdaux, les amplitudes sont cohérentes, et le déphasage également. D'ailleurs la période du signal sinusoïdal vérifie :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} = 0,77 \text{ ms} \quad (7.19)$$

tandis que graphiquement, $5T_{\text{exp}} \simeq 3,8 \text{ ms}$ donc $T_{\text{exp}} = 0,76 \text{ ms}$.

D'autre part, on a vu dans le chapitre précédent que les deux dipôles pouvaient stocker de l'énergie. On peut les exprimer :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_c^2 = \frac{1}{2} C E_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \quad (7.20)$$

*

pour l'énergie stockée dans le condensateur, et d'autre part pour la bobine :

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L C^2 \omega_0^2 E_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} C E_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \quad (7.21)$$

Leur représentation graphique permet de traduire les échanges énergétiques entre les deux dipôles :

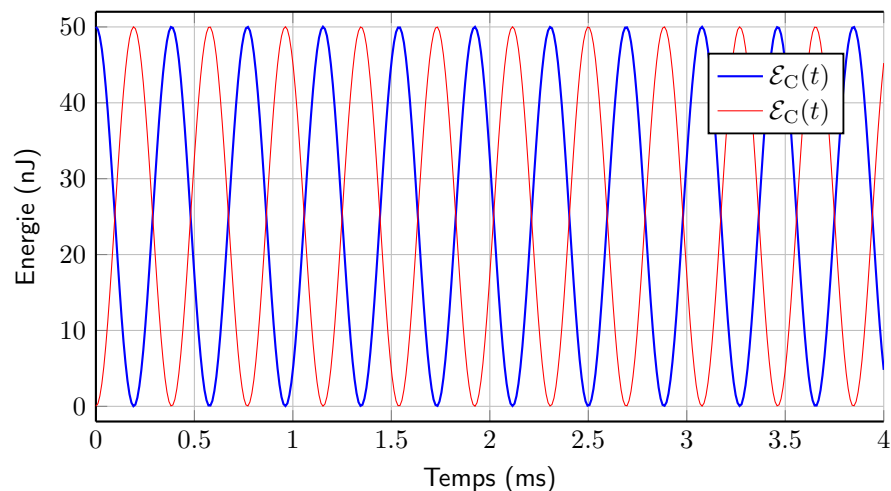


Figure 7.2 – Évolution au cours du temps de l'énergie stockée dans le condensateur et dans la bobine

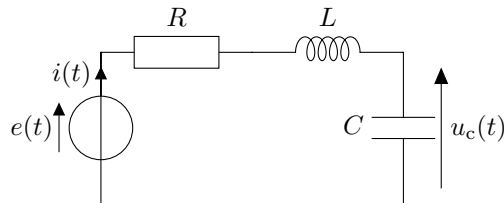
* On observe donc qu'il y a continuellement un transfert d'énergie du condensateur vers la bobine et inversement, sans atténuation. On note enfin que $\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2} C E_0^2 = \text{cste}$. L'énergie totale dans le circuit est donc constante.

Néanmoins, sur un temps plus long, il s'avère que la modélisation est imparfaite, et l'énergie totale dans le circuit diminue, liée à la résistance électrique de la bobine. Étudions plus précisément son influence.

II. Oscillateurs amortis

II.1 Observations expérimentales d'un circuit RLC

On étudie le circuit suivant constitué de l'association série d'une résistance variable R , d'un condensateur de capacité $C = 110 \text{ nF}$ et d'une bobine d'inductance $L = 150 \text{ mH}$ alimentée par un générateur idéal de tension $e(t)$.



Il est possible de mesurer la tension aux bornes du condensateur lorsqu'on le soumet à un échelon de tension, c'est à-dire que la tension aux bornes du générateur vérifie :

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ e(t) = E_0 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (7.22)$$

$$\begin{cases} e(t) = E_0 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (7.23)$$

À l'aide d'un oscilloscope, on obtient les résultats ci-dessous :

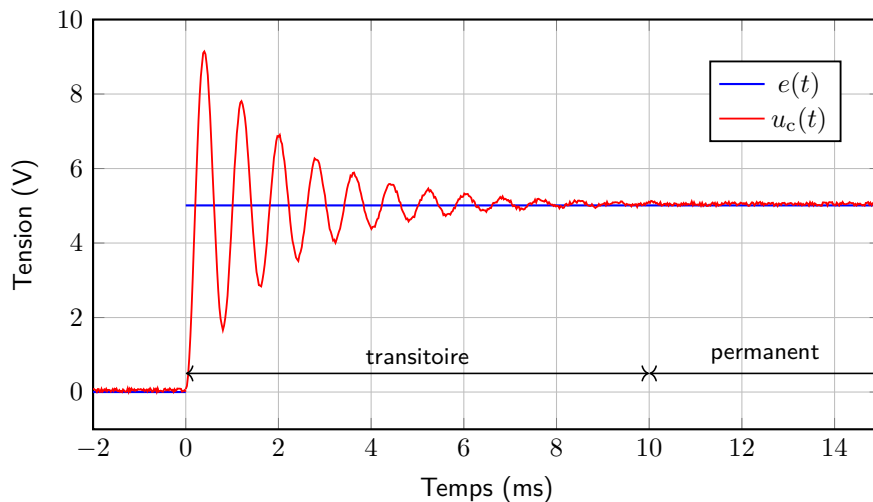


Figure 7.3 – Évolution au cours du temps de la tension aux bornes du générateur et du condensateur pour $R = 100 \Omega$

On distingue un régime transitoire constitué d'oscillations d'amplitude décroissante suivi d'un régime permanent où la tension aux bornes du condensateur est égale à la fém du générateur.

On constate aussi ci-après qu'à mesure que la résistance augmente, les oscillations se font moins nombreuses durant le régime transitoire, voire disparaissent pour des valeurs assez importantes de R .

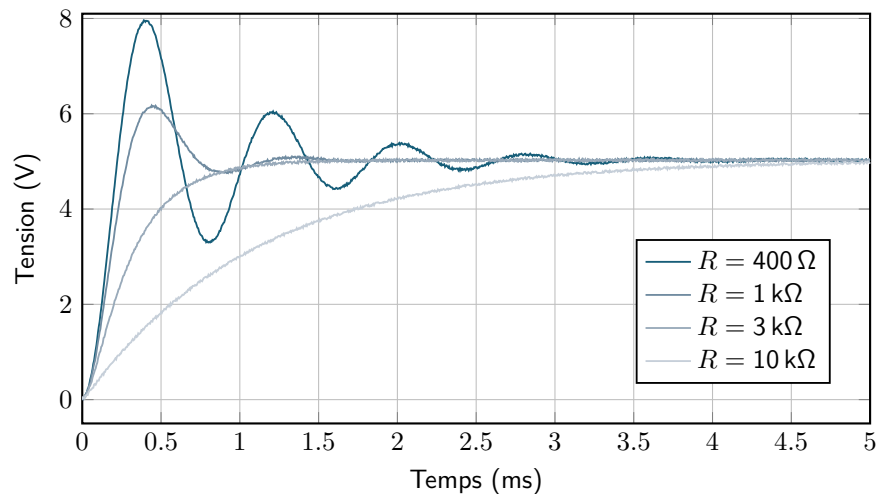


Figure 7.4 – Évolution au cours du temps de la tension aux bornes du condensateur pour différentes valeurs de résistances

II.2 Mise en équation



Exercice

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$. On l'exprimera avec un coefficient 1 devant la dérivée seconde.

Pour le circuit précédent, appliquons la loi des mailles :

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_c(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + u_c(t) \quad (7.24)$$

De plus, le condensateur impose $i(t) = C \frac{du_c}{dt}$ soit :

$$e(t) = RC \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c(t) \quad (7.25)$$

que l'on peut réécrire sous une forme dite canonique, en divisant l'équation par LC et en ordonnant les dérivées :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = \frac{e(t)}{LC} \quad (7.26)$$

À noter que cette équation est celle d'un oscillateur harmonique si $R = 0$, c'est-à-dire en l'absence de dissipation. Cela permet déjà de comprendre qu'une faible dissipation nous rapproche du modèle de l'oscillateur harmonique.

Équation d'un oscillateur amorti

Un oscillateur amorti décrit par le paramètre physique $f(t)$ est régi par une équation différentielle du second ordre de la forme :

*

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{df}{dt} + \omega_0^2 f = \text{cste} \quad (7.27)$$

où ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur et Q le **facteur de qualité**.

Exercice

En identifiant les deux équations, déterminer l'expression de ω_0 et Q en fonction de L , C et R .

La résolution de cette équation différentielle va permettre de mettre en évidence le rôle de ces deux paramètres qui caractérisent un oscillateur amorti.

II.3 Résolution

Cherchons donc à résoudre l'équation différentielle pour le circuit RLC à partir de $t \geq 0$:

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = \omega_0^2 E_0 \quad (7.28)$$

On reprend la même structure que pour la résolution de l'équation d'un oscillateur harmonique :

i) Recherche de la solution de l'équation sans second membre

On va résoudre l'équation

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = 0 \quad (7.29)$$

D'après le cours de mathématique, les solutions sont de la forme e^{rt} avec $r \in \mathbb{C}$ solution du polynôme du second degré appelé **polynôme caractéristique** :

$$* \quad \boxed{r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0} \quad (7.30)$$

de discriminant

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2) \quad (7.31)$$

Distinguons les différents cas de figure selon le signe de Δ :

- $\Delta > 0$, soit $1 - 4Q^2 > 0 \Leftrightarrow Q^2 < 1/4$ et $Q < 1/2$, alors le polynôme admet deux solutions réelles

$$r_{\pm} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} < 0 \quad (7.32)$$

* La solution de l'équation sans second membre s'écrit :

$$* \quad \boxed{u_{c,ssm}(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}} \quad (7.33)$$

avec A et B des constantes à déterminer.

- $\Delta = 0$, soit $Q = 1/2$, on a une racine double $r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ et la solution de l'équation sans second membre s'écrit :

$$* \quad \boxed{u_{c,ssm}(t) = (At + B)e^{rt}} \quad (7.34)$$

avec A et B des constantes à déterminer.

- $\Delta < 0$, soit $Q > 1/2$, on a deux racines complexes :

$$* \quad r_{\pm} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\mu \pm j\Omega \quad (7.35)$$

avec $\mu = \frac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

La solution de l'équation sans second membre s'écrit alors après transformations :

$$* \quad \boxed{u_{c,ssm}(t) = e^{-\mu t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) = Ce^{-\mu t} \cos(\Omega t + \varphi)} \quad (7.36)$$

où (A, B) , (C, φ) sont des couples de constantes déterminées à l'aide des conditions initiales.

On introduit j au lieu de i pour écrire des nombres complexes, ce afin de ne pas confondre avec l'intensité électrique i .

ii) Recherche de la solution particulière

La solution particulière, avec le second membre constant, est simplement une constante. En annulant les dérivées, on a donc $\omega_0^2 u_{c,p} = \omega_0^2 E_0$ et donc $u_{c,p} = E_0$.

iii) Utilisation des conditions initiales

La solution générale de l'équation de l'oscillateur amorti s'écrit alors

$$u_c(t) = u_{c,ssm}(t) + u_{c,p}(t) \quad (7.37)$$

Poursuivons sur un exemple concret, où $\Delta < 0$. Alors

$$u_c(t) = e^{-\mu t} (\alpha \cos(\Omega t) + \beta \sin(\Omega t)) + E_0 \quad (7.38)$$

puis les conditions initiales à $t = 0$ s'écrivent :

$$\begin{cases} u_c(t=0) = 0 \\ \frac{du_c}{dt}(t=0) = 0 \end{cases} \quad (7.39)$$

$$(7.40)$$



Exercice

Justifier ces conditions initiales, sachant que pour $t < 0$, les composants n'ont pas stocké d'énergie :
Du fait de la présence du condensateur et de la bobine imposant la continuité de $i(t)$ et de $u_c(t)$, il vient $i(t=0^-) = 0 = i(t=0^+) = C \frac{du_c}{dt}(t=0^+)$ et $u_c(t=0^-) = 0 = u_c(t=0^+)$



Exercice

Les appliquer pour trouver la solution :

$u_c(0) = \alpha + E_0 = 0$ soit $\alpha = -E_0$. On calcule ensuite la dérivée :

$$\frac{du_c(t)}{dt} = e^{-\mu t} (-\mu(\alpha \cos(\Omega t) + \beta \sin(\Omega t)) + \Omega(-\alpha \sin(\Omega t) + \beta \cos(\Omega t))) \quad (7.41)$$

soit à $t = 0$ $\frac{du_c}{dt}(t=0) = 0 = -\mu\alpha + \Omega\beta$ soit $\beta = -\frac{\mu E_0}{\Omega}$ et finalement :

$$u_c(t) = E_0 \left(1 - e^{-\mu t} \left(\cos(\Omega t) + \frac{\mu}{\Omega} \sin(\Omega t) \right) \right) \quad (7.42)$$

II.4 Différents régimes de fonctionnement

a) Régime apériodique $Q < 1/2$

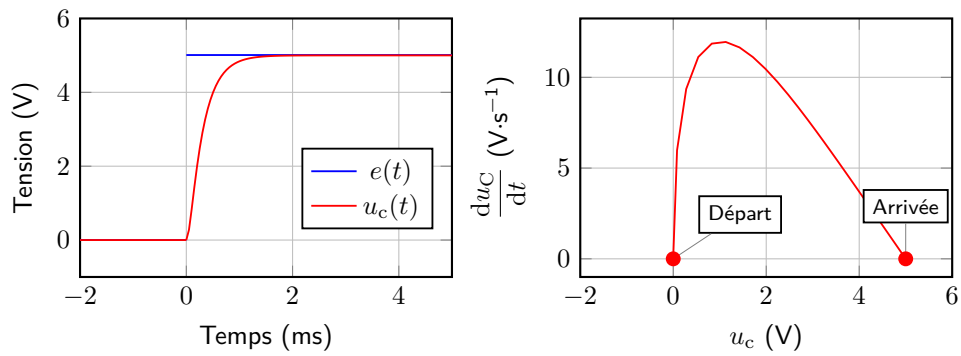
Revenons à l'exemple expérimental. Lorsque $Q < \frac{1}{2}$, cela se traduit sur la valeur de la résistance par :

$$\frac{L}{R\sqrt{LC}} < \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 1,17 \text{ k}\Omega \quad (7.43)$$

Cela signifie que lorsque **la dissipation est importante**, pour $Q < 1/2$, la solution générale s'écrit :

$$u_c(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t} + E_0 \quad (7.44)$$

c'est-à-dire une évolution similaire à la charge d'un condensateur, conforme aux observations expérimentales précédentes. On parle de **régime apériodique**. Le régime transitoire est gouverné par l'exponentielle décroissant le moins vite, c'est-à-dire e^{r_+t} (car $|r_+| < |r_-|$) et donc le temps du régime transitoire est de l'ordre de quelques $1/|r_+|$.



On a représenté ci-dessus l'allure de ce type de signal pour $R = 3 \text{ k}\Omega$, avec le portrait de phase associé. On observe bien que la trajectoire de phase est une courbe partant d'un point de départ associé aux conditions initiales (ici $u_C(0) = \frac{du_C}{dt}(0) = 0$), et se dirige vers le point correspondant au régime permanent ($u_C = E_0$ et $\frac{du_C}{dt} = 0$).

b) Régime critique : $\Delta = 0$ et $Q = 1/2$

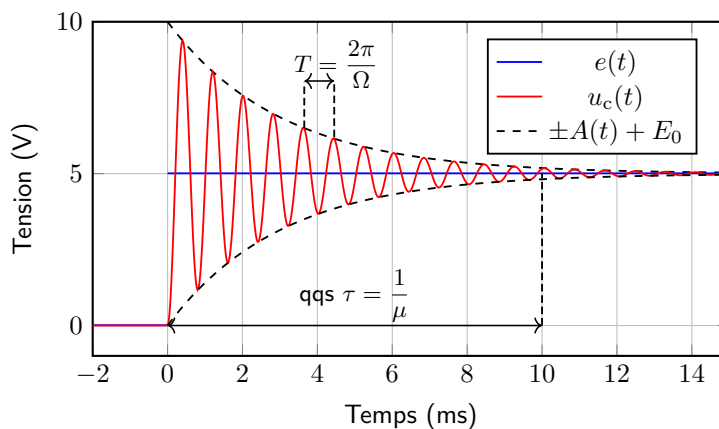
Le deuxième cas à traiter est tel que $Q = \frac{1}{2}$, et la solution a été vue précédemment. Aucun tracé graphique n'est ici représenté, étant donné que la différence avec le régime aperiodique est imperceptible. Le temps du régime transitoire sera de l'ordre de quelques $\frac{1}{|r|} = \frac{1}{\omega_0}$.

c) Régime pseudo-périodique : $Q > 1/2$

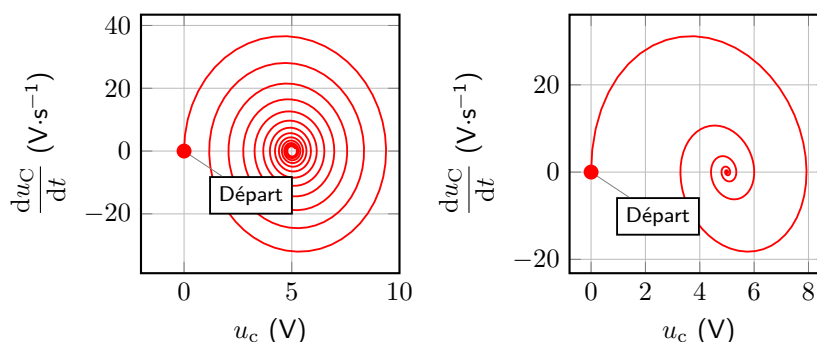
Dans le cas où $Q > \frac{1}{2}$, la solution s'écrit :

$$u_C(t) = \underbrace{C e^{-\mu t}}_{A(t)} \cos(\Omega t + \varphi) + E_0 \quad (7.45)$$

On observe des oscillations autour de la tension en régime permanent E_0 d'amplitude $A(t)$ dépendant du temps, ce qui implique que u_C n'est pas périodique. Pour autant, certains événements sont périodiques : les maxima, les minima ainsi que les instants où $u_C = E_0$. On parle ainsi de **régime pseudo-périodique** de **pseudo-période** $T = 2\pi/\Omega$ et **pseudo-pulsation** Ω différente de ω_0 . L'allure temporelle est caractérisée par une sinusoïde dont l'amplitude est comprise dans une enveloppe exponentiellement décroissante avec un temps caractéristique $\tau = 1/\mu$, comme l'illustre la figure ci-dessous. Le temps du régime transitoire sera donc de l'ordre de quelques $1/\mu$.



On peut également représenter le portrait de phase pour $R = 100 \Omega$ (gauche) ou $R = 400 \Omega$ (droite). On constate d'une part que la trajectoire de phase suit une spirale à partir de l'état initial, avec d'autant plus de tours que la dissipation est faible. De plus, ces trajectoires tendent toujours vers le point correspondant au régime permanent.



Notons que le sens de rotation de la courbe du portrait de phase d'un oscillateur est identique : c'est le sens horaire. En effet, partant de la position de départ, si $\frac{du_c}{dt} > 0$, cela signifie que u_c est croissante au cours du temps : on a donc déplacement vers le haut et vers la droite dans le plan de phase.

d) Oscillations dans le cas où $Q \gg 1$

* On peut enfin calculer le nombre d'oscillations durant le régime transitoire pour $Q \gg 1$, en comparant la période $T = \frac{2\pi}{\Omega} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0}$ (car $1 - 1/(4Q^2) \simeq 1$) et le temps du régime transitoire donné à partir de l'enveloppe exponentielle $T_{\text{trans}} \simeq 3\tau \simeq 3 \times 1/\mu$:

$$N_{\text{osc}} = \frac{T_{\text{trans}}}{T} = \frac{3 \cdot 2Q}{\omega_0} \times \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq Q \quad (7.46)$$

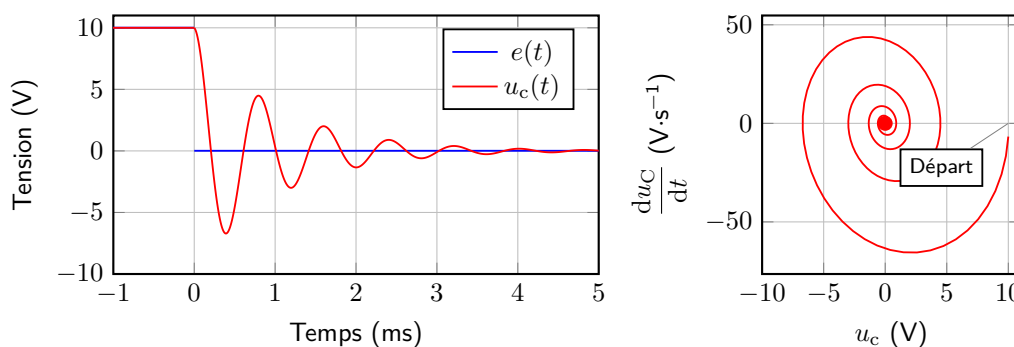
Oscillations pour un régime pseudo-périodique

* Dans le cas où le facteur de qualité Q est grand devant 1, l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations durant la totalité du régime transitoire pseudo-périodique est Q , et la pulsation associée est $\Omega \simeq \omega_0$.



Exercice

Représenter l'évolution de $u_c(t)$ au cours du temps et le portrait de phase associé si $Q \simeq 5$, pour un régime libre, c'est-à-dire lorsque le condensateur est initialement chargé (par exemple sous une tension de 10V) puis à $t = 0$ on éteint le générateur.



e) Bilan énergétique

On peut effectuer un bilan énergétique en partant de la loi des mailles et en la multipliant par l'intensité $i(t)$:

$$e(t)i(t) = Ri^2(t) + L\frac{di}{dt}i(t) + u_c(t)i(t) \quad (7.47)$$

soit avec $i(t) = C\frac{du_c}{dt}$ il vient

$$e(t)i(t) = Ri^2(t) + \frac{d}{dt} (Li^2/2 + Cu_c^2/2) \quad (7.48)$$

*

soit en introduisant $P_g = e(t)i(t)$ la puissance fournie par le générateur, $\mathcal{E}_C = Cu_c^2/2$ l'énergie stockée dans un condensateur, $\mathcal{E}_L = Li^2/2$ l'énergie stockée dans la bobine et enfin $P_J = Ri^2$ la puissance dissipée par effet Joule :

$$P_g = \frac{d}{dt} (\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L) + P_J \quad (7.49)$$

Cela traduit les échanges énergétiques : l'énergie fournie par le générateur est stockée dans le condensateur et dans la bobine, mais est également dissipée par effet Joule.

In fine, la bobine ne stockera pas d'énergie car en régime permanent le condensateur va bloquer le passage du courant. Ici seul le condensateur stocke de l'énergie de façon permanente.

Exercices

7.1 Oscillateur harmonique électrique

On s'intéresse à un circuit composé d'une bobine d'inductance $L = 400 \text{ mH}$ et d'un condensateur de capacité $C = 100 \text{ nF}$. Le générateur impose $e(t) = 0$ pour $t < 0$ (et on suppose que les composants n'ont pas d'énergie stockée) et $e(t) = E_0 = 5 \text{ V}$ pour $t > 0$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ et la résoudre.
2. En réalité on observe un régime transitoire pseudo-périodique qui s'amortit. Seule une trentaine d'oscillations est observée avant d'atteindre un régime permanent. Expliquer et quantifier cette observation.

-
1. Loi des mailles dans le circuit : $e(t) = L \frac{di}{dt} + u_c = LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c$ conduisant à l'équation d'un oscillateur harmonique (mise sous forme canonique) :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{LC} e(t) \quad (7.50)$$

On identifie la pulsation propre : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Pour $t < 0$, il n'y a pas de générateur, et l'on suppose que les composants n'ont pas stocké d'énergie. Par conséquent, $u_c(t = 0^-) = 0 = u_c(t = 0^+)$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur) et $i(t = 0^-) = 0 = i(t = 0^+)$ (continuité du courant traversant la bobine). Soit, comme $i = C \frac{du_c}{dt}$, $\frac{du_c}{dt}(t = 0^+) = 0$. On écrit la solution de l'équation précédente :

- solution sans second membre $u_{c,ssm}(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$;
- solution particulière constante car le second membre est constant : $u_{c,p}(t) = E_0 = 5,0 \text{ V}$;
- solution générale $u_c(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + E_0$.

Les conditions initiales conduisent à $A + E_0 = 0$ et $B\omega_0 = 0$ (dérivée) donc $A = -E_0$ et $B = 0$. Donc la solution à notre problème s'écrit :

$$u_c(t) = E_0 (1 - \cos \omega_0 t) \quad (7.51)$$

2. En réalité, on observe un régime pseudo-périodique, ce qui signifie qu'il y a de la dissipation dans le circuit : c'est logique, une bobine possède toujours un petit aspect résistif ! Le système est donc un oscillateur amorti par une résistance. En réécrivant la loi des mailles, en incluant la résistance, on aboutit à :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 e(t) \quad (7.52)$$

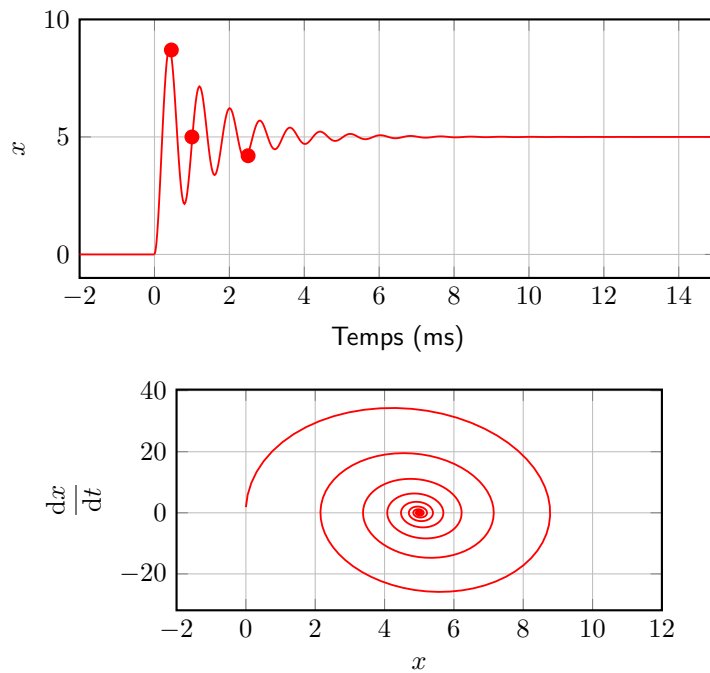
donc le facteur de qualité vérifie $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ donc $R = \frac{L\omega_0}{Q} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}}$. Enfin, comme il y a une trentaine d'oscillations observées, cela signifie que le facteur de qualité est grand, donc le nombre d'oscillations correspond au facteur de qualité $Q \simeq 30$. Ainsi la résistance vaut :

$$R = 67 \Omega \quad (7.53)$$

7.2 Détermination expérimentale des paramètres d'un oscillateur amorti

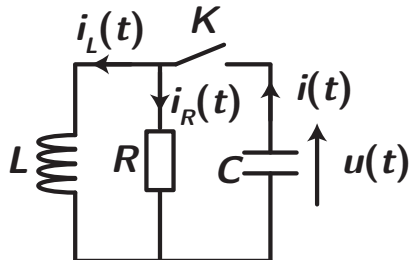
Est représentée ci-dessous l'évolution au cours du temps du paramètre régissant l'oscillateur amorti au cours du temps x , ainsi que le portrait de phase associé (représentation de $\frac{dx}{dt}$ en fonction de x) que l'on cherche à étudier.

1. Placer sur le portrait de phase les trois points indiqués, en justifiant.
2. Déterminer expérimentalement la pseudo-période de l'oscillateur harmonique et le facteur de qualité. En déduire la **pulsation propre** de l'oscillateur amorti, en justifiant.



7.3 Circuit RLC parallèle

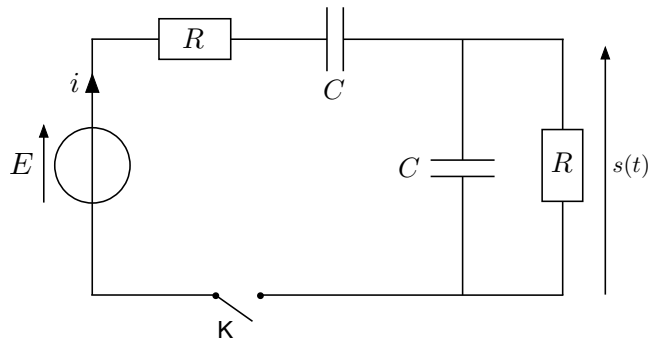
On considère le circuit ci-dessous, avec $C = 1,0 \mu\text{F}$, $L = 0,1 \text{ mH}$ et $R = 1 \text{ k}\Omega$. L'armature supérieure porte la charge $Q(t = 0) = 20 \mu\text{C}$. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.



1. Quelles sont les valeurs $u(0^+)$, $i(0^+)$ et $i_R(0^+)$ des grandeurs juste après la fermeture de l'interrupteur ?
2. Quelles sont les valeurs de ces grandeurs en régime permanent ?
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur. La mettre sous forme canonique pour identifier pulsation propre et facteur de qualité. En déduire la nature du régime. Au bout de combien de temps le régime transitoire peut-il être considéré terminé ?
4. Que se passe-t-il pour le système si on augmente ou diminue la valeur de la résistance ? Commenter qualitativement.
5. Résoudre l'équation différentielle pour en déduire l'expression de $u(t)$. Tracer son allure. Comment obtenir l'expression de l'intensité du courant $i(t)$

7.4 Circuit à deux condensateurs

On s'intéresse au montage ci-dessous. Les condensateurs sont initialement déchargés et on ferme K à $t=0$.



1. Déterminer sans calcul la valeur de $s(t)$ et de $\frac{ds}{dt}$ à $t = 0^+$. Déterminer la valeur de $s(t)$ à $t \rightarrow +\infty$.
2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \frac{ds}{dt} + \frac{s(t)}{\tau^2} = 0.$$

Donner l'expression de τ .

3. Trouver l'expression de $s(t)$ en déterminant bien les constantes d'intégration.
4. Tracer $s(t)$.

1. Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, donc $s(t = 0^+) = 0 = s(t = 0^-)$ (propriété vérifiée pour l'autre condensateur également). Pour la dérivée, on écrit une loi des mailles à $t = 0^+$: $E = Ri(t = 0^+) + 0 + 0$ toujours à l'aide de la continuité de la tension aux bornes du condensateur. Par conséquent $i(t = 0^+) = \frac{E}{R}$ et la loi des nœuds s'écrit enfin $i(t = 0^+) = C \frac{ds}{dt}(t = 0^+) + \frac{s(t = 0^+)}{R}$ d'où $\frac{ds}{dt}(t = 0^+) = \frac{E}{RC}$.
Pour $t \rightarrow +\infty$, on remplace les condensateurs par des interrupteurs ouverts. Le courant est donc nul dans le circuit, et nécessairement $s(t \rightarrow +\infty) = 0$.
2. Lois des mailles : $E = Ri + u_{c,1} + s(t)$, $s(t) = u_{c,2}$. Loi des nœuds $i = C \frac{ds}{dt} + \frac{s}{R}$. Et comme $i = C \frac{du_{c,1}}{dt}$, il faut dériver la première loi des mailles :

$$0 = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + \frac{ds}{dt} \iff 0 = \left(RC \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} \right) + \left(\frac{ds}{dt} + \frac{s}{RC} \right) + \frac{ds}{dt} \quad (7.54)$$

conduisant à l'équation :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} s(t) = 0 \quad (7.55)$$

On pose donc $\tau = RC$.

3. On a l'équation d'un oscillateur amorti, vérifiant $\omega_0^2 = \frac{1}{\tau^2}$ donc $\omega_0 = 1/\tau$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{\tau}$ donc $Q = \frac{1}{3}$. On est donc dans un régime apériodique car $Q < 1/2$:

$$s(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t} \quad (7.56)$$

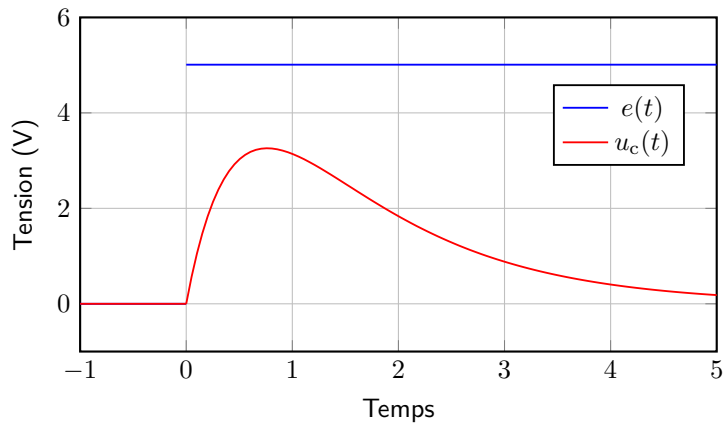
avec $r_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2} = -\frac{3}{2RC} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} \right) = -\frac{3}{2\tau} \left(1 \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \right)$. Avec les conditions initiales, il vient après calculs (à faire) :

$$A + B = 0 \quad \text{et} \quad r_+A + Br_- = \frac{E}{RC} \iff B = -A \quad \text{et} \quad A = \frac{E}{RC(r_+ - r_-)} = -\frac{E}{\sqrt{5}} \quad (7.57)$$

d'où

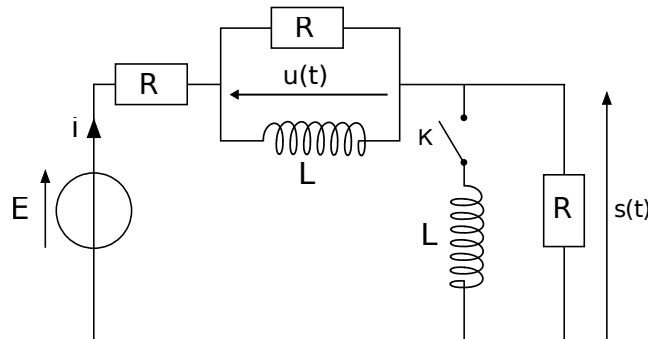
$$s(t) = \frac{E}{\sqrt{5}} (e^{r_-t} - e^{r_+t}) \quad (7.58)$$

4. Allure différente de la réponse "classique" à un échelon, car on part de $s = 0$ à $t = 0$ et on tend également vers $s = 0$ pour $t \rightarrow +\infty$.



7.5 Réponse d'un circuit à deux bobines

On considère le montage suivant où le générateur est un générateur supposé idéal de tension continue de force électromotrice E . L'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.



- Déterminer la valeur de s et des courants dans chaque branche à $t = 0$, puis pour $t \rightarrow +\infty$.
- Établir une relation liant u , $\frac{du}{dt}$ et $\frac{di}{dt}$.
- Établir une relation liant s , $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{di}{dt}$.
- Établir une relation liant E , s , u et i .
- Déduire des trois relations précédentes que $3\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{4}{\tau}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\tau^2}s = 0$, où τ est une constante à déterminer en fonction des données du problème.
- Déterminer la forme générale de $s(t)$ (on ne demande pas de calculer les constantes d'intégration).
- Tracer l'allure de $s(t)$.

Quelques éléments de réponse, en cas d'hésitation, venez me voir !

- Si l'interrupteur est ouvert depuis très longtemps, la bobine verticale ne contient pas d'énergie. Après calculs, on obtient d'abord à $t = 0^-$, en remplaçant les bobines par des fils :

$$i(0^-) = \frac{E}{2R} = i_L(0^-) = i_{R,2}(0^-) \quad i_R(0^-) = 0 = i_{L,2}(0^-), \quad \text{et} \quad s(0^-) = \frac{E}{2} \quad (7.59)$$

À $t = 0^+$, en utilisant la continuité du courant dans les deux bobines : $i_L(0^+) = \frac{E}{2R}$ et $i_{L,2}(0^+) = 0$. En écrivant une loi des mailles, on détermine $i(0^+)$ sachant que les lois des nœuds conduisent à $i_R = i - i_L$ et $i_{R,2} = i - i_{L,2}$:

$$E = Ri(0^+) + R\left(i(0^+) - \frac{E}{2R}\right) + Ri(0^+) = 3Ri(0^+) - \frac{E}{2} \iff i(0^+) = \frac{E}{2R} \quad (7.60)$$

Donc l'intégralité des courants sont continus, et $s(0^+) = \frac{E}{2}$.

Pour $t \rightarrow +\infty$, les bobines sont remplacées par des fils, on a donc $s = 0 = u$, et $i = \frac{E}{R}$. Les courants dans les deux résistances en parallèle des bobines sont nuls.

2. Loi des mailles dans la maille du haut (L et R) : $u = R(i - i_L) = L \frac{di_L}{dt}$. On dérive u :

$$\frac{du}{dt} = R \frac{di}{dt} - R \frac{di_L}{dt} = R \frac{di}{dt} - \frac{R}{L} u \quad (7.61)$$

3. De la même façon dans la maille de droite avec la résistance et la bobine :

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{di}{dt} - \frac{R}{L} s \quad (7.62)$$

4. On écrit une loi des mailles dans la maille globale :

$$E = Ri + u + s \quad (7.63)$$

5. Il reste maintenant à les combiner. On dérive la dernière loi des mailles écrite :

$$0 = R \frac{di}{dt} + \frac{du}{dt} + \frac{ds}{dt} = \quad (7.64)$$

Le souci est que $\frac{du}{dt}$ dépend de u . On injecte la relation de la question 2., puis celle de la question 4. pour éliminer u :

$$2R \frac{di}{dt} - \frac{R}{L} u + \frac{ds}{dt} = 0 = 2R \frac{di}{dt} - \frac{R}{L} E + \frac{R^2}{L} i + \frac{R}{L} s + \frac{ds}{dt} \quad (7.65)$$

que l'on dérive à nouveau pour faire apparaître $R \frac{di}{dt} = \frac{ds}{dt} + \frac{R}{L} s$:

$$2 \frac{d}{dt} \left(R \frac{di}{dt} \right) + \frac{R}{L} \times R \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \frac{ds}{dt} + \frac{d^2 s}{dt^2} = 0 \quad (7.66)$$

On injecte la relation, on développe et on réorganise, et l'on aboutit à

$$3 \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{4R}{L} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 s = 0 \quad (7.67)$$

correspondant à l'équation de l'énoncé en posant $\tau = \frac{L}{R}$.

6. On reconnaît l'ED d'un oscillateur amorti de pulsation propre $\omega_0^2 = \frac{1}{3\tau^2}$ et de facteur de qualité vérifiant :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{4}{3\tau} \iff Q = \frac{3\omega_0\tau}{4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}\tau} \times 3\tau}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2} \quad (7.68)$$

On a donc un régime apériodique, de la forme $s(t) = Ae^{r-t} + Be^{r+t}$.

7. Pour le tracé, on se sert du fait que $s(0) = \frac{E}{2}$ et que $s(t \rightarrow +\infty) = 0$. Enfin, on peut montrer grâce à la question 1 et 3 que $\frac{ds}{dt}(t=0^+) = -\frac{E}{2\tau} < 0$, donc $s(t)$ décroît de $E/2$ vers 0.