—M5—

# Loi du moment cinétique

## Sommaire


**5.1 Étude d'un point matériel en rotation . . . 2**
- 5.1.1 Moment cinétique d'un point matériel . . . 2
- 5.1.2 Moment d'une force . . . 3
- 5.1.3 Loi du moment cinétique . . . 4
- 5.1.4 Application au pendule simple . . . 5

**5.2 Étude d'un solide en rotation autour d'un axe fixe . . . 6**
- 5.2.1 Moment cinétique scalaire pour un solide . . . 6
- 5.2.2 Moment d'une force pour un solide . . . 7
- 5.2.3 Notion de couple . . . 7
- 5.2.4 Liaison pivot et moteurs . . . 8
- 5.2.5 Loi du moment cinétique . . . 8
- 5.2.6 Application au pendule pesant . . . 8

**5.3 Approche énergétique . . . 9**
- 5.3.1 Énergie cinétique et puissance d'une force pour un élément en rotation . . . 9
- 5.3.2 Théorème de la puissance cinétique pour un solide . . . 9


## Questions de cours :

- Moment cinétique d'un point matériel : définition mathématique, sens physique, conséquences. Calcul dans le cas d'un mouvement circulaire.
- Moment de force : définition mathématique, sens physique, notion de bras de levier et moment scalaire.
- Loi du moment cinétique pour un point matériel : énoncé, cas de conservation du moment cinétique et application au pendule simple.
- Loi du moment cinétique pour un solide : énoncé, notion de moment d'inertie et interprétation physique, cas du pendule pesant.
- Énergie cinétique et puissance d'une force pour un solide en rotation. Démontrer le théorème de la puissance cinétique.

## Capacités exigibles du BO :

- Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
- Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
- Exploiter la relation pour le solide entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
- Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
- Définir un couple.
- Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
- Savoir qu'un moteur ou un frein contient nécessairement un stator pour qu'un couple puisse s'exercer sur le rotor.
- Reconnaître les cas de conservation du moment cinétique.
- Établir l'équation du mouvement du pendule pesant.
- Expliquer l'analogie avec l'équation de l'oscillateur harmonique.
- Établir une intégrale première du mouvement.
- Lire et interpréter le portrait de phase : bifurcation entre un mouvement pendulaire et un mouvement révolutif.
- Approche numérique : Utiliser les résultats fournis par un logiciel de résolution numérique ou des simulations pour mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.

## Expériences :

- Vidéo de conservation du moment cinétique sur une chaise tournantes avec haltères https ://www.youtube.com/watch ?v=G6XSK72zZJc ;
- Expérience avec un stylo et une porte
- Chute d'un homme avec une poulie et une petite masse http ://www.scilogs.fr/idees-de-physique/la-vie-sauve-grace-a-3-principes-physiques/

Pour un point matériel, l'approche étudiée au chapitre M2 suffit à décrire complètement le système, via une équation vectorielle (et donc trois équations scalaires) permettant de décrire complètement les trois degrés de liberté de ce point. Il n'en est plus de même pour un solide, possédant 6 degrés de liberté (trois de translation et trois de rotation sur lui-même). Il est ainsi nécessaire de s'intéresser à ces mouvements de rotation (cela va faire intervenir une nouvelle équation vectorielle), et l'on se restreindra aux mouvements de rotation autour d'un axe fixe, principalement rencontrés dans les machines tournantes telles que les moteurs.

# I. Étude d'un point matériel en rotation

## I.1 Moment cinétique d'un point matériel

### a) Définition

**Définition**

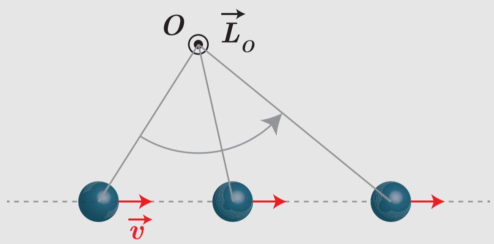
* Le moment cinétique d'un point matériel $M$ animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen est défini par le produit vectoriel

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \tag{5.1}$$

exprimé en kg·m²·s⁻¹ ou J·s. Il s'agit de l'analogue de la quantité de mouvement d'un point matériel, lors de l'étude des rotations autour de points ou d'axes fixes.

Ce vecteur **caractérise la rotation apparente du point matériel autour d'un point $O$ que l'on se fixe**.

Le moment cinétique n'est pas uniquement lié à des trajectoires circulaires. Par exemple, pour un mouvement de translation :




Le moment cinétique donne bien l'information de "rotation" autour du point $O$, avec son sens de rotation.

À noter que le **sens du moment cinétique donne le sens de la "rotation" autour du point auquel on le calcule** (en utilisant la règle de la main droite, où le pouce est dans la direction de $\vec{L}$ et les doigts donnent le sens de rotation).

Le moment cinétique dépend du point où on le calcule :

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \wedge \vec{p} = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{AB} \wedge p = \vec{L}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p} \tag{5.2}$$

### b) Moment cinétique scalaire

On peut des fois restreindre le calcul du moment cinétique par rapport à un axe orienté, noté par la suite $(\Delta) = (O, \vec{e}_\Delta)$ :

**Définition**

* On appelle **moment cinétique scalaire** la projection sur $(\Delta)$ du moment cinétique calculé en un point $A$ de l'axe

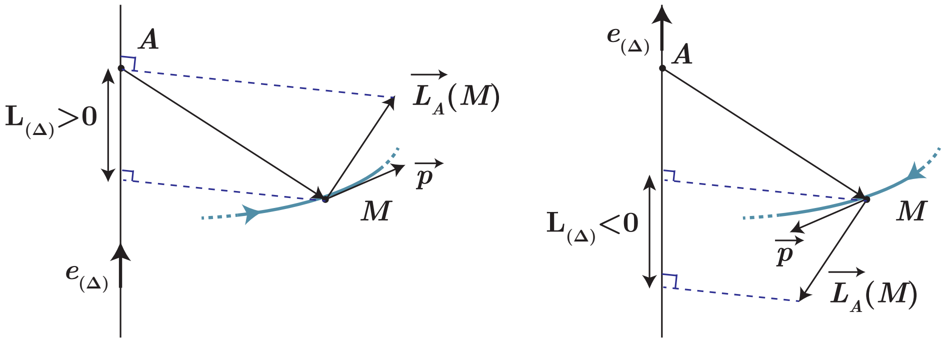
$$L_{(\Delta)} = \vec{L}_A \cdot \vec{e}_{(\Delta)} \tag{5.3}$$

Le moment cinétique scalaire est **indépendant du point de l'axe où l'on calcule le moment cinétique**.

### Démonstration

Démontrons cette dernière affirmation, en considérant deux points $A$ et $B$ appartenant à $(\Delta)$. Avec $\vec{L}_A = \vec{L}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p}$, $\vec{L}_A \cdot \vec{e}_{(\Delta)} = \vec{L}_B \cdot \vec{e}_{(\Delta)} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p} \cdot \vec{e}_{(\Delta)} = \vec{L}_B \cdot \vec{e}_{(\Delta)}$ car $\overrightarrow{AB}$ est parallèle à $\vec{e}_{(\Delta)}$.

Selon le signe du moment cinétique scalaire, on pourra connaître l'orientation de la "rotation" autour de l'axe considéré : si $L_{(\Delta)} > 0$, on a une rotation dans le sens trigonométrique autour de $\vec{e}_{(\Delta)}$, sinon dans le sens horaire, comme l'illustre la figure ci-dessous :




#### c) Cas d'un mouvement circulaire

Dans le cas d'un mouvement de rotation circulaire, sur un cercle de centre $A$ et rayon $r$, on se repère en coordonnées cylindriques de centre $A$, d'axe $(Oz)$ perpendiculaire au plan du cercle. Alors $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ et

*

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v} = m(r\vec{e_r}) \wedge (r\dot{\theta}\vec{e_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z} \quad (5.4)$$

et donc

$$L_{(Oz)} = mr^2\dot{\theta} = J_{(Oz)}\dot{\theta} \quad (5.5)$$

où

$$J_{(Oz)} = mr^2 \quad (5.6)$$

est appelé **moment d'inertie** par rapport à l'axe $(Oz)$ d'un point matériel de masse $m$ distant de $r$ de l'axe.

On constate ainsi déjà un élément important : plus la masse est importante, plus le moment cinétique sera important, mais c'est également vrai pour la distance à l'axe ou la vitesse. Retenez par exemple l'analogie avec une fronde : il va être davantage compliqué de stopper son mouvement de rotation circulaire si sa vitesse est importante, ou sa masse, ou encore le rayon de la trajectoire (et c'est le rayon qui va avoir un effet prépondérant) !

## I.2 Moment d'une force

Le moment cinétique correspond à l'aspect cinématique : on constate un mouvement, mais on n'en connaît pas l'origine. On va introduire l'équivalent dynamique des forces : le **moment de force**.

#### a) Moment d'une force par rapport à un point

**Définition**

*

On appelle moment en $O$ d'une force $\vec{F}$ appliquée au point matériel $M$ la quantité

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \quad (5.7)$$

- Sa dimension est une énergie, s'exprimant en joule ou plus couramment en N·m ;
- il s'agit d'une grandeur additive, le moment d'une somme de forces est la somme des moments de chacune des forces.

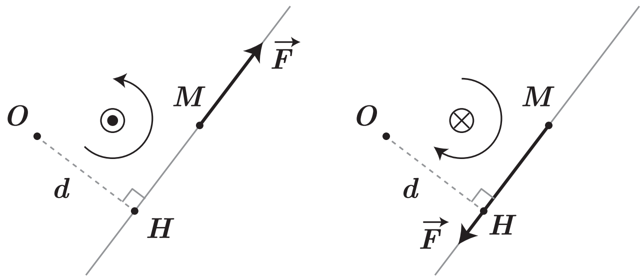
On introduit la notion de **droite d'action** pour la force comme étant la droite $(M, \vec{F})$ (il est souvent nécessaire de prolonger cette droite). Deux conséquences :

- si le point $O$ appartient à la droite d'action, le moment est nul : vu depuis le point $O$ la force ne fait pas tourner $M$ ;
- si ce n'est pas le cas, cela va traduire la modification du mouvement de rotation du point $M$ autour du point $O$ du fait de la force.

* On peut d'ailleurs très facilement calculer le moment à l'aide du **bras de levier** correspondant à la distance du point $O$ à la droite d'action :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{HM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F} \tag{5.8}$$

et dont la norme est simplement $\left\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})\right\| = dF$ avec $d = \left\|\overrightarrow{OH}\right\|$ le bras de levier. La direction est perpendiculaire au plan $(O, M, \vec{F})$ et le sens est déterminé avec la règle de la main droite.




Exemple de l'ouverture de la porte : la poignée est placée de manière à être la plus éloignée de l'axe de rotation, afin que le bras de levier soit le plus important, et donc le moment est plus important, à force d'intensité égale.

### b) Moment d'une force par rapport à un axe orienté

À l'instar du moment cinétique, on peut également se restreindre au calcul du moment d'une force par rapport à un axe orienté $(\Delta) = (O, \vec{e}_{(\Delta)})$ :

$$\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_{(O)}(\vec{F}) \cdot \vec{e}_{(\Delta)} \tag{5.9}$$

grandeur algébrique dont le signe renseigne sur le sens de la rotation. Il est calculable lui-aussi à l'aide du bras de levier $d$ (qui est alors la distance entre la droite d'action et $(\Delta)$) et vaut donc

$$\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}) = \pm dF \tag{5.10}$$

où le signe se détermine à l'aide de la règle de la main droite.

**Exercice**

Résoudre l'exercice 5.1.

## I.3 Loi du moment cinétique

### a) Énoncé

À l'instar de la quantité de mouvement qui est reliée dans la LQM à la somme des forces, on peut relier le moment cinétique au moment des forces s'exerçant sur un point matériel :

**Loi du moment cinétique pour un point matériel**

* Pour un point matériel $M$ de masse $m$, dont l'étude est réalisée dans un référentiel galiléen et soumis à un ensemble de forces $\{\vec{F}_i\}$, le moment cinétique par rapport au point $O$ vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) \tag{5.11}$$

### Démonstration

Démontrons-le à partir de la loi de la quantité de mouvement appliquée à ce même système :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_i \tag{5.12}$$

soit, avec $\dfrac{\mathrm{d}OM}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{p} = \vec{0}$, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ et donc

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) \tag{5.13}$$

*

### b) Conservation du moment cinétique

Lorsque le moment cinétique est constant, la loi du moment cinétique permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_O(\sum_i \vec{F}_i) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\sum_i \vec{F}_i} = \vec{0}$$

En considérant que $M \neq O$, le moment cinétique se conserve dans plusieurs cas de figure :

- soit $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ auquel cas on a absence de mouvement ($\vec{L}_O = \vec{0}$) ou un mouvement rectiligne uniforme ($\vec{L}_0 = \overrightarrow{\text{cste}}$) ou encore un mouvement circulaire uniforme (mais dans le cadre d'un solide, cf. plus loin) ;
- soit la résultante est non nulle, mais passe constamment par le point $O$ : on dit alors que $M$ est soumis à une **force centrale** de centre $O$, cas étudié dans le chapitre M6.

### c) Loi du moment cinétique par rapport à un axe fixe

Dans certains cas où le point matériel tourne autour d'un axe fixe, il peut être judicieux de ne calculer que le moment cinétique scalaire et les moments scalaires des forces, reliés simplement par :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_{(\Delta)}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_i)} \tag{5.14}$$

venant de la projection selon $\vec{e}_{(\Delta)}$ (vecteur constant) de la loi du moment cinétique.

## I.4 Application au pendule simple

Prenons le cas du pendule simple, constitué d'un fil souple de masse nulle et de longueur $\ell$, accroché à un point fixe $O$. On accroche à l'autre extrémité une masse $m$, considérée comme un point matériel $M$ et l'on cherche à déterminer l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation sur l'angle $\theta$. On se place en coordonnées polaires, l'axe $(Oz)$ correspondant par exemple à l'axe de rotation.

### Exercice

Calculer le moment cinétique au point $O$ pour la masse.

Moment cinétique : $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{e_r} \wedge m\ell^2\dot{\theta}\vec{e_\theta} = m\ell^2\dot{\theta}\vec{e_z}$.

### Exercice

Calculer le moment de chaque force s'exerçant sur la masse.

Deux forces s'exercent sur la masse :

- la tension du fil, $\vec{T} = -T\vec{e_r}$, d'où $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = r\vec{e_r} \wedge -T\vec{e_r} = \vec{0}$ ; le moment de cette force est donc nul ;
- le poids, $\vec{P} = -mg\vec{e_y} = mg(\cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta})$, donc

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = r\vec{e_r} \wedge mg(\cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}) = -mg\ell\sin\theta\vec{e_z} \tag{5.15}$$

Si $\theta > 0$, la force va induire une rotation dans le sens horaire, donc le signe négatif est cohérent.

L'application de la loi du moment cinétique permet donc d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}m\ell^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}}{\mathrm{d}t} = -mg\ell\sin\theta\overrightarrow{e_z} \tag{5.16}$$

soit en projection selon $\overrightarrow{e_z}$ :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \tag{5.17}$$

correspondant à l'équation du mouvement du pendule simple. S'en suivent alors les mêmes raisonnements que d'habitude.

L'application de la loi du moment cinétique scalaire permet d'écrire la même chose, sans avoir à projeter selon $\overrightarrow{e_z}$ :

**Exercice**

À l'aide de la notion de bras de levier, calculer le moment scalaire associé au poids par rapport à l'axe $(Oz)$.

Le bras de levier vaut $\ell\sin\theta$, soit $\mathcal{M}_{(Oz)}(\overrightarrow{P}) = \pm mg\ell\sin\theta$ et le raisonnement sur $\theta > 0$ conduit à une rotation dans le sens horaire autour de $\overrightarrow{e_z}$ donc $\mathcal{M}_{(Oz)}(\overrightarrow{P}) = -mg\ell\sin\theta$

Ainsi, avec $L_{(Oz)} = mr^2\dot{\theta}$

$$\frac{\mathrm{d}m\ell^2\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = -mg\ell\sin\theta \Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \tag{5.18}$$

# II. Étude d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

On va tenter d'avoir la même approche pour un solide en rotation autour d'un axe fixe. On se restreint à cette situation physique car elle est très fréquemment rencontrée dans des systèmes réels, industriels ou non.

## II.1 Moment cinétique scalaire pour un solide

Le moment cinétique pour un solide indéformable est particulièrement compliqué à calculer. On peut se restreindre au cas de la rotation autour d'un axe fixe, où l'on a vu que tous les points tournaient à la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

**Moment cinétique et moment d'inertie d'un solide**

Dans le cas d'un mouvement de rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe $(\Delta)$, le moment cinétique est proportionnel à la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ :

$$L_{(\Delta)} = J_{(\Delta)}\dot{\theta} \tag{5.19}$$

où $J_{(\Delta)}$ est appelé **moment d'inertie du solide** par rapport à l'axe $(\Delta)$, caractérisant la distribution de masse du solide autour de l'axe $(\Delta)$. À partir du moment où le solide est indéformable, $J_{(\Delta)}$ est une constante.

On peut intuiter l'expression précédente en considérant que le solide indéformable est constitué d'un grand nombre de points $M_i$ entâchés d'une masse infinitésimal $\mathrm{d}m_i$ Alors $L_{(\Delta)} = \sum_i(\mathrm{d}m_i r_i^2\dot{\theta}) = \left(\sum_i \mathrm{d}m_i r_i^2\right)\dot{\theta}$ où $r_i$ est la distance du point $M_i$ à l'axe. Ainsi le moment d'inertie se retrouve être simplement une somme (ou une intégrale) $J_{(\Delta)} = \displaystyle\sum_i \mathrm{d}m_i r_i^2 = \iiint r^2\mathrm{d}m$. Le calcul ne sera jamais exigible.

Une remarque importante : plus la masse est concentrée autour de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie est petit (et inversement). Ainsi, par exemple, un cerceau de masse $m$ aura un moment d'inertie beaucoup plus important qu'un disque homogène de même masse et même rayon.

**Exercice**

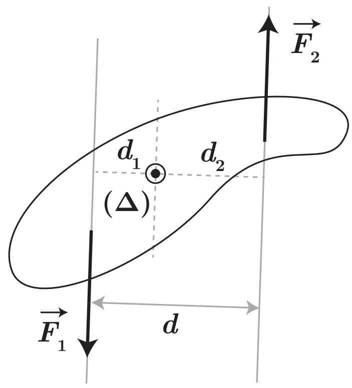
Que peut-on dire pour l'exemple de la Terre, où $J_{\text{Terre}} \simeq 0{,}33 M_T R_T^2 < \dfrac{2}{5} M_T R_T^2$ (sphère homogène) ?

## II.2 Moment d'une force pour un solide

Pour un solide, le calcul du moment d'une force reste identique à celui d'un point matériel. La difficulté majeure réside dans le lieu d'application de cette force pour un solide, qui n'est plus un point matériel. Retenons que pour le poids, on considèrera toujours que la **force s'applique en son centre de gravité (ou centre d'inertie)** $G$. Tout autre cas sera nécessairement précisé lorsque c'est nécessaire.

## II.3 Notion de couple

Pour un solide on rencontre un cas fréquent de moment de force, c'est celui associé à un couple de forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ vérifiant $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ : il s'agit de forces de même norme $F$, de sens opposé et de résultante nulle. C'est ce qu'il se passe quand on tient un volant de voiture que l'on fait tourner, par exemple.




On peut calculer le moment scalaire de l'ensemble de ces deux forces à l'aide des bras de levier :

$$\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = F d_1 + F d_2 = F d \tag{5.20}$$

avec $d$ la distance entre les deux droites d'actions. On a ainsi un moment non nul si les deux droites d'action ne sont pas confondues.

**Moment d'un couple**

Le moment associé à un couple de forces, appelé (abusivement) **couple**, et noté $\Gamma$, vaut

$$\Gamma = \pm F d \tag{5.21}$$

avec $F$ la norme de chacune des forces et $d$ la distance entre les droites d'actions des forces. Le signe est lié au sens de rotation qu'induit le couple par rapport à l'axe orienté choisi. La norme de ce couple est par contre **indépendante du choix de l'axe de rotation** choisi pour le calculer.

Cette notion de couple peut être étendue à tout cas où la somme des forces est nulle, et le moment des forces par rapport à un axe $(\Delta)$ orienté n'est pas nul. Citons le cas du couple exercé par la main sur le bouchon d'une bouteille d'eau.

Quelques exemples dont les expressions seront rappelées :

- un couple de torsion lié à l'équivalent en rotation d'un ressort de raideur $k$ : $\Gamma = -\alpha\theta$ par exemple ;
- un couple de frottements fluides $\Gamma = -h\dot{\theta}$ ;
- un couple de frottements solides $\Gamma = -\gamma \dfrac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}$.

## II.4 Liaison pivot et moteurs

Attardons-nous un instant sur la **liaison pivot** étudiée en SII. Une liaison pivot d'axe $(Oz)$ **restreint les possibilités de mouvement d'une pièce mobile appelée rotor à une rotation d'axe $(Oz)$ par rapport à une partie fixe appelée stator**. Il s'agit de la liaison la plus communément rencontrée dans des systèmes mécaniques. On supposera très souvent que la liaison est géométriquement idéale, c'est-à-dire qu'elle bloque toute translation le long de l'axe $(Oz)$ et assure un guidage parfait autour de l'axe $(Oz)$.

**Définition**

On parle de **liaison pivot idéale** si le stator n'exerce aucun moment scalaire d'axe $(Oz)$ sur le rotor, soit $\boxed{\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{liaison}) = 0}$.

La liaison pivot peut par contre exercer un effort ou un moment selon d'autres axes pour compenser l'action du rotor sur le stator afin d'imposer le guidage.

Dans le cas d'un moteur, la liaison pivot entre le rotor et le stator possède un autre intérêt que le guidage car **le stator exerce un couple moteur** $\Gamma$ afin de mettre en rotation une pièce accrochée au rotor. Cette dernière va donc, par le principe des actions réciproques, exercer un couple de freinage sur le rotor. En régime permanent, les deux couples vont se compenser, comme on va le montrer à l'aide de la loi du moment cinétique pour un solide.

## II.5 Loi du moment cinétique

**Loi du moment cinétique pour un un solide**

Pour un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe orienté $(\Delta)$ dans un référentiel galiléen, soumis à des forces extérieures $\{\vec{F}_i\}$, le moment cinétique scalaire vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}L_{(\Delta)}}{\mathrm{d}t} = J_{(\Delta)}\ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_i) \tag{5.22}$$

Cela permet d'ailleurs de souligner le sens physique du moment d'inertie par rapport à un axe fixe : il caractérise son aptitude à s'opposer aux variations de vitesse de rotation autour de cet axe.

Petite application simple justifiant les propos précédents sur le cas du moteur : en notant $J$ le moment d'inertie du rotor, l'application de la loi du moment cinétique à ce dernier conduit à

$$J\ddot{\theta} = \Gamma_{\text{mot}} - \Gamma_{\text{frotts}} \tag{5.23}$$

pouvant conduire à un régime permanent où le couple moteur et le couple résistant se compensent, si le couple résistant n'est pas constant (sinon accélération ou décélération).

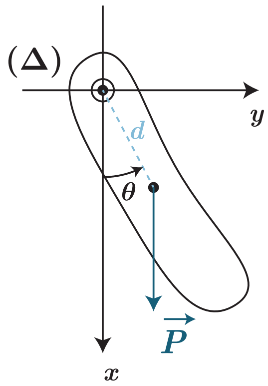
**Exercice**

Expliquer qualitativement les observations de la vidéo où la vitesse de rotation augmente si la personne approche les haltères vers lui.

Évoquer également l'énergie cinétique qui augmente, et qui vient du fait que pour un objet déformable, il y a des forces "intérieures" au système que l'on ne prend pas en compte dans la modélisation.

## II.6 Application au pendule pesant

* Considérons un solide indéformable en liaison pivot autour d'un axe $(\Delta)$. Cet axe ne passe pas par le centre d'inertie du solide, de sorte que le poids va induire un mouvement de rotation si le solide n'est pas strictement à la verticale. On suppose la liaison idéale, et on note $J_{(\Delta)}$ le moment d'inertie. On appelle enfin $d$ la distance entre le centre d'inertie et l'axe $(\Delta)$.




* Ainsi le moment scalaire exercé par le poids est simplement $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{P}) = -mgd\sin\theta$.
L'application de la loi du moment cinétique conduit alors à

$$J_{(\Delta)}\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{(\Delta)}}\sin\theta = 0 \tag{5.24}$$

soit le même type d'équation que le pendule simple, en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_{(\Delta)}}}$ la pulsation propre associée.

# III. Approche énergétique

On va compléter l'approche énergétique en donnant certaines expressions (énergie cinétique, puissance d'une force) afin de pouvoir étendre le théorème de l'énergie cinétique pour un solide

## III.1 Énergie cinétique et puissance d'une force pour un élément en rotation

* Lorsqu'un solide indéformable est en rotation autour d'un axe fixe $(\Delta)$, il acquiert une énergie cinétique

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_{(\Delta)}\dot{\theta}^2} \tag{5.25}$$

De la même façon, on peut exprimer la puissance d'une force lorsque le solide est en rotation :

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F})\dot{\theta}} \tag{5.26}$$

## III.2 Théorème de la puissance cinétique pour un solide

Dans ce même cadre, on peut alors exprimer ce que vaut la variation d'énergie cinétique

**Théorème de la puissance cinétique**

Pour un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe $(\Delta)$ dans un référentiel galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i) = \sum_i \mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_i)\dot{\theta} \tag{5.27}$$

En réalité cette expression est équivalente à celle de la loi du moment cinétique scalaire :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = J_{(\Delta)}\dot{\theta}\ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_i)\dot{\theta} \tag{5.28}$$

qui conduit alors à

$$J_{(\Delta)}\ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_i) \tag{5.29}$$

Les équations sont donc identiques.

Par ailleurs, la notion de couple moteur ou de freinage est bien cohérente : si $\mathcal{P}(\vec{F}_i) > 0$, $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_i)$ est du même signe que $\dot{\theta}$, et l'énergie cinétique croît (donc $\dot{\theta}$ aussi), on a bien affaire à un couple moteur.

**Exercice**

Situation bilan : chute d'un homme et d'une masse (vidéo). Quels concepts physiques semblent nécessaires pour expliquer les observations ?

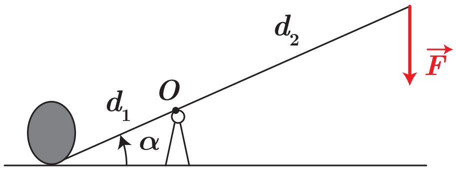
Plusieurs aspects à prendre en compte :

- conservation du moment cinétique (à peu de choses près) pour la masse, qui accélère du fait du raccourcissement de la longueur ;
- d'un point de vue énergétique, on voit la masse remonter (or on a donné une certaine énergie potentielle et énergie cinétique nulle ? ?) : force de traction fournit un travail qui est transmise au système ;
- Arrêt ? frottements solides entre le mât et la corde.
- Oscillations en fin ? corde élastique qui se déforme, équivalent à un oscillateur amorti !

# Exercices

## 5.1 Levier

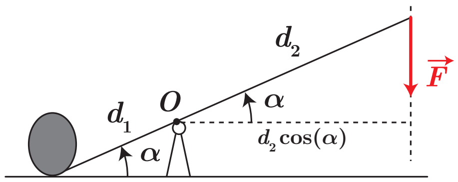
Un manutentionnaire utilise un levier afin de soulever un rocher de masse $M = 200\,\text{kg}$. Les longueurs valent $d_1 = 40\,\text{cm}$ et $d_2 = 1{,}6\,\text{m}$ et $\alpha = 60°$.




1. À quelle condition le rocher va commencer à se soulever ?
2. En déduire la norme minimale de la force verticale nécessaire pour que le rocher se soulève.
3. En faisant varier la direction de la force qu'il exerce par rapport au levier, le manutentionnaire peut être plus efficace. Expliquer comment il peut procéder et quelle force il doit exercer. Quel est le gain par rapport au cas précédent ?

---

1. Si on effectue un bilan de forces sur le levier, on a deux forces qui sont dirigées selon la verticale : le poids du rocher $\vec{P}$, et la force exercée par l'utilisateur $\vec{F}$. On cherche à savoir quand il est possible d'obtenir un mouvement de rotation, sachant que ces deux forces induisent un moment dans le sens oppposé. Il faut donc que $\left\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})\right\| > \left\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P})\right\|$ (car alors on pourra faire varier le moment cinétique du système de sorte qu'il y ait une rotation dans la direction du manutentionnaire).
2. En s'aidant de la notion de bras de levier, l'équation précédente se traduit par $d_2 \cos\alpha \left\|\vec{F}\right\| > d_1 \cos\alpha \left\|\vec{P}\right\|$

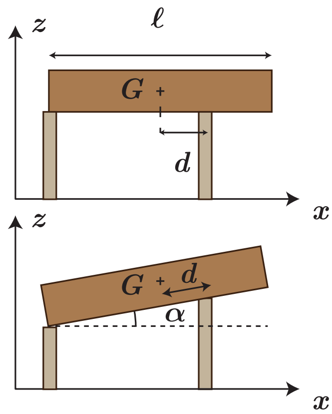



soit encore $Fd_2 > Mgd_1$ et donc $\boxed{F > \dfrac{Mgd_1}{d_2} = 500\,\text{N}}$ soit l'équivalent d'une masse à soulever de "seulement" 80 kg.

3. On peut faire en sorte d'augmenter le bras de levier en appliquant une force perpendiculaire au levier, ainsi la condition précédente devient $d_2F > Mgd_1\cos\alpha$ soit $F > 250\,\text{N}$ !

## 5.2 Déménagement

Deux déménageurs portent une armoire, de hauteur $\ell = 3\,\text{m}$ et de masse $m = 50\,\text{kg}$. L'un est à une extrémité $M$ de la poutre, l'autre au point $L$ à une distance $d = 0{,}7\,\text{m}$ du milieu de l'armoire. On suppose le solide homogène, pour simplifier.




1. À quelle condition un objet initialement à l'équilibre n'effectue aucun mouvement de rotation ?
2. On suppose que les déménageurs ont même taille, l'armoire est donc maintenue horizontalement. Déterminer les normes des forces $\vec{F}_M$ et $\vec{F}_L$ exercées pour la maintenir.
3. Même question si on imagine maintenant que l'un des déménageurs est plus petit, et donc l'armoire est inclinée d'un angle $\alpha = 20°$.

---

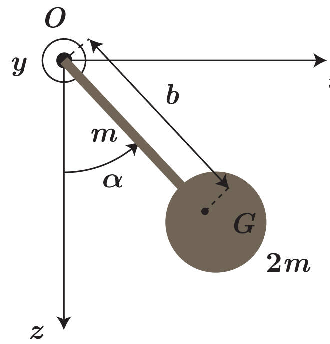
1. On souhaite un déplacement de l'armoire sans aucun mouvement de rotation du solide (qui en général se traduirait par des dommages collatéraux). Par conséquent, il suffit que $\dfrac{\mathrm{d}L_{(\Delta)}}{\mathrm{d}t} = 0$ si on considère une rotation possible autour

de l'axe $(\Delta)$ perpendiculaire au plan de la feuille passant par $G$ (de vecteur directeur en direction de nos yeux). On calcule donc le moment des deux forces par rapport à cet axe (donc un moment scalaire) et on veut que la somme s'annule, d'après la loi du moment cinétique scalaire. Avec $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_M) = -\frac{\ell}{2}F_M$, et $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_L) = +dF_L$ (induit une rotation dans le sens trigonométrique), soit finalement $dF_L = \frac{\ell}{2}F_M$. D'autre part, on peut supposer que l'on est soit à l'équilibre, soit en mouvement rectiligne uniforme, et donc $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_L + \vec{F}_M$ soit après projection selon l'axe vertical $P = mg = F_L + F_M$ et donc après combinaison des deux équations : $\boxed{F_M = \dfrac{mg}{1+\dfrac{\ell}{2d}} = 1{,}6{\cdot}10^2\text{ N}}$ et $F_L = 3{,}4{\cdot}10^2$ N (réfléchissez-y à deux fois la prochaine fois que vous faites un déménagement !).

2. En reprenant les mêmes calculs, mais en calculant les nouveaux bras de levier, il vient $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_M) = -\frac{\ell}{2}\cos\alpha F_M$, et $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_L) = +d\cos\alpha F_L$ et donc la condition de non-rotation reste $dF_L = \frac{\ell}{2}F_M$ : la situation est inchangée !

## 5.3 Pendule pesant

On considère le pendule ci-contre, capable d'osciller librement autour de l'axe (Oy) horizontal grâce à une liaison pivot parfaite. Il est constitué d'une barre homogène de section constante et masse $m$, à l'extrémité de laquelle on a soudé un disque homogène de masse $2m$ et de centre $C$. L'ensemble obtenu constitue un solide rigide. On note $b$ la distance du centre de gravité à l'axe. Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Oy) est $J_{(Oy)} = kmb^2$, $k$ étant un réel positif que l'on cherche à déterminer expérimentalement.




On écarte le pendule d'un angle $\alpha_0$ par rapport à sa position d'équilibre, et on le lâche sans vitesse initiale à la date $t = 0$. On étudie son mouvement ultérieur en observant l'angle $\alpha$ que forme la direction de la barre avec l'axe vertical descendant $(Ox)$.

1. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit $\alpha$.
2. En déduire un moyen d'obtenir expérimentalement $k$, en explicitant la formule à utiliser.

---

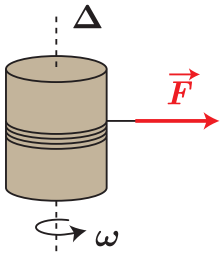
1. Appliquons la loi du moment cinétique scalaire au pendule de masse totale $3m$ dans le référentiel galiléen du laboratoire. Faisons un bilan des différents moments :
   - liaison pivot parfaite, donc pas de moment associé $\mathcal{M}_{(Oy)}(\text{liaison}) = 0$ ;
   - poids dont la résultante s'applique au centre de gravité distant de $b$ de l'axe, par conséquent le bras de levier par rapport à l'axe $Oy$ vaut $b\sin\alpha$, et le poids dans cette configuration va faire tourner le système dans le sens horaire, donc $\mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{P}) = -3mgb\sin\alpha$.

   Ainsi on a donc $\frac{\mathrm{d}L_{(Oy)}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{(Oy)}(\text{liaison})$ soit à l'aide du moment d'inertie $J_{(Oy)}\ddot{\alpha} = -3mgb\sin\alpha$. Puis en injectant l'expression du moment d'inertie, il vient finalement :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{kb}\sin\theta = 0 \qquad (5.30)$$

2. En se plaçant dans des conditions telles que le système oscille faiblement autour de sa positiion d'équilibre, on peut considérer $\alpha \ll 1$ et donc $\sin\alpha \simeq \alpha$. On reconnaît alors l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0$ telle que $\omega_0^2 = \frac{3g}{kb}$, et donc $k = \frac{3g}{b\omega_0^2} = \frac{3gT^2}{4\pi^2 b}$ avec $T$ la période du pendule que l'on peut mesurer facilement. À noter qu'il faut obtenir la distance $b$, même si dans l'exercice cela semble être une donnée, dans les faits il faut pouvoir l'obtenir :
   - soit on l'obtient en pouvant maintenir le pendule autour de n'importe quel point, celui qui permettra de rendre le pendule stable quel que soit l'angle initial sera ainsi le point G (en effet, le moment du poids sera nul quel que soit l'angle initial) ;
   - soit on l'attache à deux points différents du solide et on regarde son état d'équilibre : dans tous les cas, le point $G$ sera situé sur la verticale passant par le point d'attache, et les deux verticales obtenues donneront via leur intersection le point $G$.

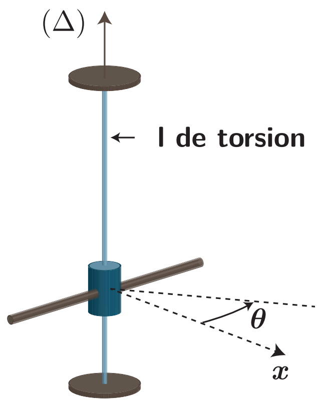
## 5.4 Toupie or not toupie




Considérons une toupie, que l'on va modéliser comme un cylindre tournant de masse $m$ et de rayon $R$, de moment d'inertie par rapport à son axe de symétrie $J_{(\Delta)} = \frac{mR^2}{2}$. On enroule un fil autour du cylindre (4 tours), et on tire dessus avec une force de norme $F$ supposée constante, à partir de $t = 0$, la toupie étant initialement immobile.

1. Exprimer la puissance instantanée de la force $\vec{F}$.
2. En déduire l'accélération angulaire de la toupie.
3. À l'aide d'un bilan d'énergie cinétique, déterminer la vitesse angulaire de la toupie quand tout le fil a été déroulé.

## 5.5 Pendule de torsion




Un pendule de torsion est constitué d'un fil dont la masse est négligeable devant celle de l'objet du balancier fixé à son extrémité. Le moment d'inertie du balancier par rapport à l'axe vertical (Δ) du fil est noté $J_{(\Delta)}$. L'air environnant exerce un couple de frottement fluide linéaire de constante $\alpha$, soit $\Gamma_{(\Delta),f} = -\alpha\dot{\theta}$ et le fil exerce un couple de rappel linéaire de constante $k$, soit $\Gamma_{(\Delta),r} = -k\theta$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta$ repérant l'orientation du pendule par rapport à sa position d'équilibre $\theta_{\text{eq}} = 0$. Caractériser cette équation et en donner une écriture canonique.
2. À partir de la position d'équilibre, on fait effectuer au pendule un tour complet sur lui-même, puis on le lâche sans vitesse angulaire initiale. Déterminer l'évolution temporelle de $\theta$. On donne $\alpha = 2{\cdot}10^{-6}$ N·m·s·rad$^{-1}$, $k = 1{,}00{\cdot}10^{-4}$ N·m·rad$^{-1}$ et $J_{(\Delta)} = 2{,}00{\cdot}10^{-4}$ kg·m$^2$.

## 5.6 Temps de chute ⋆

Un cylindre de masse $m_0$ et de rayon $r$ peut tourner librement autour de son axe horizontal (Δ) fixe dans le référentiel du laboratoire. Son moment d'inertie par rapport à l'axe est noté $J$. Un fil inextensible et de masse négligeable est enroulé autour du cylindre. Un corps M de masse $m$ est attaché à l'extrémité de ce fil. Il est abandonné sans vitesse initiale à une altitude $h$.

1. Exprimer la norme de la tension du fil qu'exerce le point M en mouvement accéléré.
2. Calculer l'accélération de $M$.
3. Au bout de combien de temps touchera-t-il le sol ?

## 5.7 Fluctuations du couple d'une machine tournante

Un moteur entraîne une machine tournante modélisée par le moment d'inertie total $J_{(\Delta)}$ autour de l'axe des parties mobiles et un moment résistant linéaire de coefficient de frottement $h$. Le couple moteur est la somme d'un terme constant $M_0$ et d'un terme sinusoïdal d'amplitude $\Delta M$ et de pulsation $\omega$ modélisant les fluctuations de ce couple dans le temps :

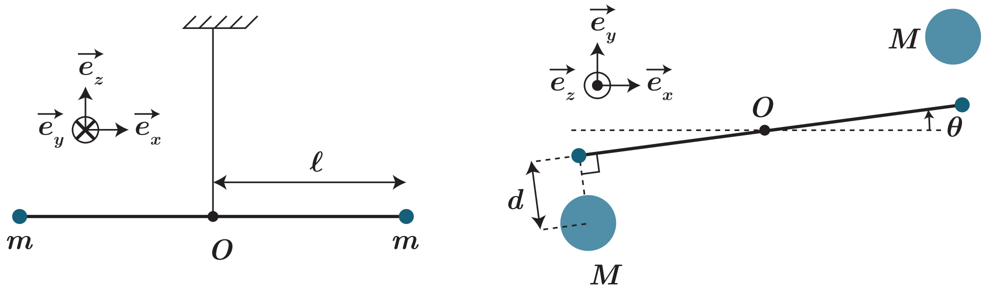
$$M^{\text{mot}}_{(\Delta)} = M_0 + \Delta M \cos \omega t \qquad (5.31)$$

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\Omega$ de rotation du moteur, puis en donner une écriture canonique.
2. Décrire les solutions de cette équation et déterminer la composante permanente de cette solution.
3. Montrer que ce système présente un comportement de filtre dont on précisera la nature et dont on tracera la représentation de Bode. Comment peut-on réduire les fluctuations de la vitesse angulaire du rotor, en supposant qu'il n'est pas possible d'agir sur celles du moteur ?

## 5.8 Problème : Expérience de Cavendish

La faible intensité de la force de gravitation par rapport aux autres forces rend sa mesure difficile. En 1798, Cavendish réalise une expérience utilisant un pendule de torsion dont les résultats seront réinterprétés un siècle plus tard comme la première détermination de $G$.

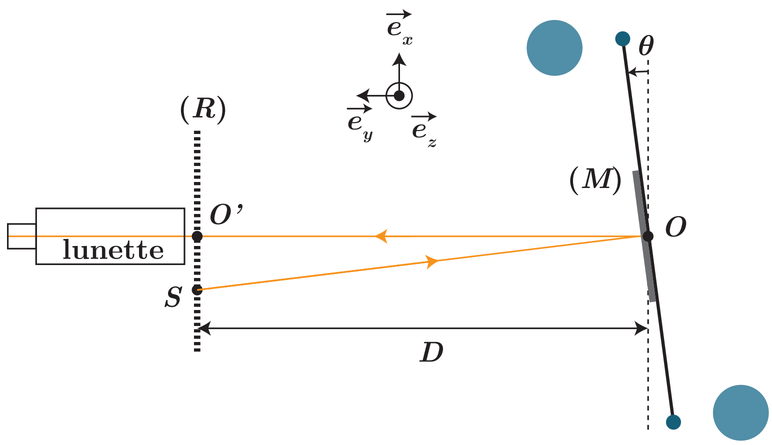
La figure ci-dessous illustre le principe de l'expérience de Cavendish. Deux particules de masse $m$ sont fixées aux extrémités d'une tige de longueur $2\ell$, un fil de torsion correspondant à la verticale relie le centre de la tige à un point fixe du laboratoire, réalisant ainsi un pendule de torsion. En approchant deux sphères de masse $M$ à une distance $d$ de chacune des extrémités du pendule, on observe une déviation angulaire dont la mesure permet de déterminer $G$.




Dans la suite, on note $\theta$ la déviation angulaire du pendule par rapport à sa position d'équilibre. On note $k$ la raideur angulaire du fil de torsion : le moment du couple de rappel est $-k\theta\vec{e_z}$. Les sphères de masse $M$ et les particules de masse $m$ sont considérées comme des particules ponctuelles. Le moment d'inertie de la tige et des deux masses $m$ par rapport à l'axe du fil de torsion s'exprime de manière approchée par $J = 2m\ell^2$.

1. Calculer la déviation angulaire $\theta$ due à l'attraction des sphères.
2. Lors de son expérience, Cavendish utilisa les paramètres suivants : $m = 0{,}80\,\text{kg}$, $M = 158\,\text{kg}$, $\ell = 1{,}0\,\text{m}$, $d = 20\,\text{cm}$ et $k = 3{,}6{\cdot}10^{-4}\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^2{\cdot}\text{s}^{-2}$. Sachant que $G = 6{,}67{\cdot}10^{-11}\,\text{m}^3{\cdot}\text{kg}^{-1}{\cdot}\text{s}^{-2}$, prévoir la valeur de $\theta$ attendue.
3. Parmi les différentes grandeurs qui interviennent dans la détermination de $G$ à partir d'une mesure de $\theta$, laquelle vous semble la plus difficile à déterminer directement ? Proposer une expérience complémentaire pour mesurer cette grandeur. Exprimer $G$ en fonction de $M$, $\ell$, $d$, $\theta$ et du résultat de la mesure que vous avez proposée.

Afin de mesurer l'angle avec précision, la méthode de Poggendorff a été employée postérieurement à Cavendish. On accroche alors un petit miroir plan $(M)$ solidaire de la tige en rotation. Une lunette de visée permet d'observer sans accomodation l'image que le miroir $(M)$ donne d'une règle graduée $(R)$. On voit alors défiler devant le fil vertical du réticule les images des divisions de la règle à mesure que le miroir tourne. On suppose que le viseur est situé à une distance $D = 0{,}5\,\text{m}$ du miroir.




4. La lunette de visée comporte deux lentilles convergentes, l'objectif étant positionné approximativement en $O'$ et ayant une distance focale image de $f'_1 = 30\,\text{cm}$. On définit la puissance de la lunette comme $P = \dfrac{\alpha'}{AB}$ où $\alpha'$ est l'angle sous lequel on voit un objet $AB$ au travers de la lunette de visée. Déterminer la distance focale de l'oculaire et l'encombrement de la lunette si on veut que $P = 10\,\delta$.
5. Préciser enfin le lien entre $\theta$, la distance parcourue par le point $S$ au niveau de la règle $\delta x$ entre les positions $\theta = 0$ et $\theta$ du miroir, et $D$. Calculer alors numériquement $\delta x$ et conclure.