

Bases de l'optique géométrique

Sommaire

3.1 Propagation de la lumière	2
3.1.1 Source lumineuse	2
3.1.2 Milieux optiques	4
3.1.3 Lien entre la couleur et la longueur d'onde	4
3.1.4 Optique géométrique	4
3.2 Dioptries	5
3.2.1 Lois de Snell-Descartes	5
3.2.2 Principe de retour inverse de la lumière	5
3.2.3 Réflexion totale	6
3.2.4 Quelques conséquences des lois de Descartes	7
3.2.5 Fibres à saut d'indice	7

Questions de cours :

- Présenter les différents types de sources lumineuses, donner des exemples et leur spectre correspondant.
- Énoncer avec précision les lois de la réflexion et de la réfraction, à l'aide d'un schéma précis.
- Établir la condition de réflexion totale et expliquer un exemple de conséquence.
- Présenter le principe d'une fibre optique à saut d'indice, expliquer qualitativement la notion de cône d'acceptance et de dispersion intermodale.

Capacités exigibles du BO :

- Caractériser une source lumineuse par son spectre.
- Relier la longueur d'onde dans le vide et la couleur.
- Définir le modèle de l'optique géométrique et indiquer ses limites.
- Établir la condition de réflexion totale.
- Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.

Manipulations de cours :

- Spectrophotomètre et présentation des sources lumineuses ;
- Réflexion et réfraction au niveau d'un dioptre.
- Simulation pour une fibre optique.

Introduction

L'optique géométrique est une branche de l'optique qui s'appuie sur la notion fondamentale de **rayon lumineux**. Elle est l'outil de choix pour étudier la formation d'images par des systèmes optiques « classiques » tels que la loupe, le microscope ou encore la lunette astronomique. La recherche actuelle en optique se concentre sur un domaine en plein essor : l'**optique quantique**, qui regroupe les phénomènes lumineux pour lesquels la lumière est considérée comme constituée de photons et possède donc les caractéristiques d'un comportement corpusculaire.

I. Propagation de la lumière

I.1 Source lumineuse

Avant de s'intéresser à la propagation de la lumière, intéressons-nous à sa formation au sein de ce que l'on appelle les **sources lumineuses**. On distingue deux grandes familles de sources lumineuses : les sources à incandescence et les sources à luminescence.

a) Les sources à incandescence

Ces sources reposent sur un principe simple : tout corps chauffé émet un rayonnement électromagnétique. Quand ce rayonnement appartient au domaine visible (il s'agit donc de lumière) on parle d'**incandescence**.

Source incandescente

* | Le spectre d'une source à incandescence est **continu** et donc **polychromatique**.

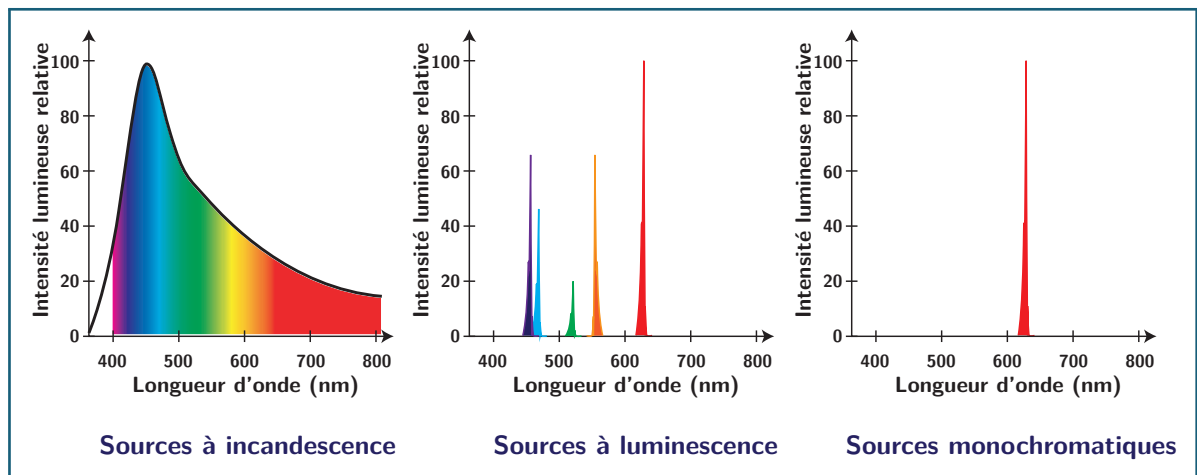


Figure 3.1 – Spectres pour les trois différents types de sources lumineuses couramment rencontrées

Si l'on souhaite donner plus d'informations sur ces sources, il nous faut adopter un modèle théorique dit du corps noir. Ce modèle ainsi que les hypothèses sur lesquelles il repose étant hors programme, nous nous contentons ici d'en donner la principale conclusion : le spectre est piqué autour d'une longueur d'onde $\lambda_{\max}$. Cette longueur d'onde suit la **loi de Wien** :

$$\lambda_{\max} T = \text{cste} = 2898 \mu\text{m}\cdot\text{K} \quad (3.1)$$

Ainsi, le produit $\lambda_{\max} T$ est constant et plus un corps est chaud, plus il émet de courtes longueurs d'ondes.

On peut citer comme exemple de source à incandescence :

- la lave (roche en fusion) : $T = 1500 \text{ K}$ et $\lambda_{\max} = 1,93 \mu\text{m}$ (infrarouge)
- les ampoules à filament (chauffage par effet Joule d'un fil de tungstène) : $T = 2800 \text{ K}$ et $\lambda_{\max} = 1,04 \mu\text{m}$ (infrarouge)

- la surface du soleil : $T = 5800 \text{ K}$ et $\lambda_{\text{max}} = 504 \text{ nm}$ (vert)

On parle en général de lumière blanche car ces sources émettent dans quasiment tout le domaine visible et l'aspect résultant est sensiblement blanc.

b) Les sources à luminescence

Le deuxième mécanisme d'émission de lumière est issu de la désexcitation d'atomes. Un atome peut en effet passer d'un niveau excité d'énergie E_j à un niveau d'énergie E_i plus faible en émettant un photon d'énergie :

$$\Delta E = E_j - E_i = h\nu_{ij} \quad (3.2)$$

où $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ est la constante de Planck et ν_{ij} la fréquence du rayonnement lumineux émis.

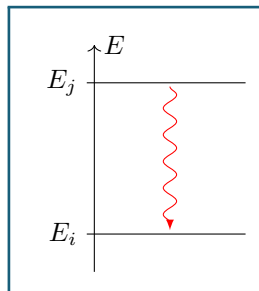


Figure 3.2 – Désexcitation d'un atome avec émission d'un photon

La longueur d'onde λ et la fréquence ν d'une onde sont liées par la relation $\lambda = \frac{c}{\nu}$. On peut donc exprimer la longueur d'onde du rayonnement émis :

$$\lambda_{ij} = \frac{hc}{\Delta E} \quad (3.3)$$

Chaque atome peut ainsi émettre plusieurs longueurs d'ondes, selon le nombre de niveaux d'énergie qu'il peut atteindre.

Source spectrale

- * Le spectre d'émission d'une source spectrale est donc **discontinu**, et en général **polychromatique**. De plus, le spectre de chaque atome est unique et **permet de l'identifier**.

On peut citer comme exemple de source spectrale les lampes à vapeur de mercure, d'hydrogène ou de sodium. Dans ces lampes un gaz est excité par des décharges électriques. Les atomes se désexcitent en émettant des photons.

c) Sources monochromatiques

Source monochromatique

- * Une source **monochromatique** est une source dont le spectre ne contient qu'une seule longueur d'onde.

On peut y parvenir à partir d'autres sources en utilisant des filtres lumineux. Cependant la source monochromatique par excellence est le **LASER**. En effet il émet dans une gamme de longueur d'onde très restreinte. Par exemple, certains modèles de LASER hélium-néon émettent un rayonnement de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ avec une précision de l'ordre de 10^{-12} nm .

Enfin, les LASER présentent également d'autres avantages comme une grande puissance et une forte directivité, ce qui en fait des sources de choix.

d) Modélisation d'une source lumineuse idéale

Par la suite, on va se simplifier la tâche en imaginant que l'on a à notre disposition une **source ponctuelle** (typiquement une étoile lointaine) et **monochromatique**. Par opposition une lampe à décharge au laboratoire est étendue spatialement et polychromatique.

I.2 Milieux optiques

Dans le vide, la lumière se propage à la célérité $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La fréquence ν et la **longueur**

d'onde dans le vide λ_0 du rayonnement sont reliés par la relation :

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$$

Dans un milieu optique différent du vide la **fréquence ν est conservée**, mais la longueur d'onde est modifiée et cette relation n'est plus valable. Cependant, pour certains milieux particuliers, on peut retrouver une relation similaire.

Un milieu optique est dit :

- *
 - **transparent** s'il laisse passer la lumière. Un milieu non transparent est dit **opaque**.
 - **homogène** si ses propriétés sont identiques en tout point.
 - **isotrope** si ses caractéristiques ne dépendent pas de la direction de propagation de la lumière.

Indice optique

Pour un milieu transparent, homogène et isotrope, on définit l'**indice optique** (ou indice de réfraction) n par :

*

$$n = \frac{c}{v}$$

(3.4)

avec v la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu.

milieu	vide	air	eau	verre	diamant
indice	1	$1,0003 \simeq 1$	1,33	1,4–1,8	2,42

Table 3.1 – Indice optique de quelques milieux pour le domaine visible.

L'indice optique est ici donné pour un rayonnement visible. Nous verrons en seconde année que l'**indice n dépend dans certains cas de la fréquence ν : il s'agit d'un milieu dispersif**.

Enfin on admet la propriété fondamentale suivante : **dans un milieu transparent, homogène et isotrope, la lumière se propage en ligne droite**

I.3 Lien entre la couleur et la longueur d'onde

L'oeil humain est un récepteur sensible à la fréquence du signal et non sa longueur d'onde. Les physiciens ont pris l'habitude d'associer les couleurs à leur longueur d'onde plutôt qu'à leur fréquence, par commodité. **Ceci n'est cependant justifié que si l'on est dans le vide**. Il faut retenir quelques ordres de grandeur particuliers :

- * | 400 nm violet, 550 nm vert, 600 nm orange, 650 nm rouge.

I.4 Optique géométrique

Modèle de l'optique géométrique

- * L'optique géométrique est l'étude des phénomènes optiques dans l'approximation où tous les objets utilisés ont une dimension a grande devant la longueur d'onde de la lumière ($\lambda \ll a$). Par conséquent, **tous les phénomènes de diffraction sont négligés**.

À noter que cette dernière aura en réalité un rôle très important dans la formation d'images de qualité, en particulier lors d'observations spatiales.

La lumière se déplaçant en ligne droite dans un milieu homogène et isotrope, on définit le **rayon lumineux** comme la trajectoire de l'énergie lumineuse. C'est un objet fictif dont la réalisation la plus proche est le faisceau d'un laser.

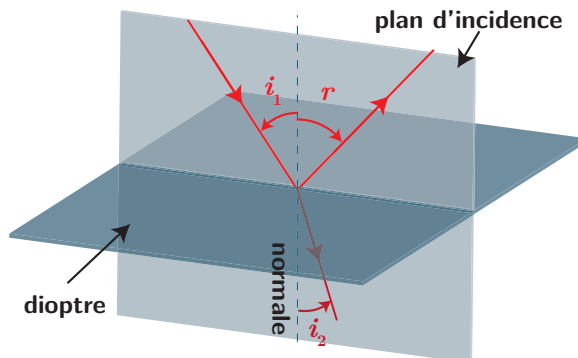
II. Dioptries

On se limite cette année à l'étude des milieux transparents homogènes et isotropes, ainsi nous savons tout de la propagation de la lumière dans ces milieux. Cependant il arrive que la lumière traverse différents milieux, comme par exemple à la surface d'un lac ou au travers d'une vitre. Si nous savons

parfaitement décrire le comportement de la lumière dans chacun de ces milieux grâce à la partie précédente, nous ne savons pas décrire ce qu'il se passe lorsque la lumière traverse « la frontière » entre ces deux milieux, appelée **dioptre**.

II.1 Lois de Snell-Descartes

Considérons un rayon incident sur un **dioptre plan**, c'est-à-dire une surface plane entre deux milieux optiques d'indices n_1 et n_2 différents. Ce rayon incident donne *a priori* lieu à un **rayon réfléchi** et un **rayon réfracté** selon la figure ci-dessous :



C'est-à-dire qu'une partie de la lumière est réfléchi par la surface et reste donc dans le milieu n_1 , tandis qu'une autre traverse cette surface pour poursuivre sa course dans le milieu n_2 .

Ce phénomène physique est régi par les trois lois de Snell-Descartes découvertes indépendamment par Snell en 1621 et par Descartes en 1637 :

Propriété : lois de Snell-Descartes

1^{re} loi : Le rayon incident et la normale définissent le plan d'incidence, dans lequel sont inclus les rayons réfléchis et réfractés.

2^e loi : Les angles d'incidence et de réflexion vérifient :

*

$$r = -i_1$$

(3.5)

3^e loi : Dans le cas où cette relation a un sens

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

(3.6)

On notera qu'en optique les angles, s'ils sont orientés, le sont toujours **de la normale vers le rayon lumineux**. Le signe négatif de la deuxième loi est donc important.

II.2 Principe de retour inverse de la lumière

Pour un milieu homogène, la lumière se propage en ligne droite. On en déduit qu'elle suivrait la même trajectoire si elle se propageait en sens inverse. Cette propriété est-elle toujours valable à la traversée d'un dioptre ?

Dans la situation de la figure précédente avec un rayon incident du milieu d'indice n_2 (par le dessous du dioptre), la troisième loi de Descartes s'écrit $n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1$. Elle est identique au cas où le rayon incident frappe le dioptre par le milieu n_1 . Le lien entre angle d'incidence et angle de réfraction ne dépend donc pas du sens de parcours du rayon lumineux.

De même, si on considère un rayon incident venant frapper le dioptre depuis le milieu n_1 avec un angle r (sens inverse du rayon réfléchi de la même figure), la deuxième loi de Descartes donne $i_1 = -r$. Le lien entre angle d'incidence et angle réfléchi ne dépend pas non plus du sens de parcours du rayon lumineux.

Ainsi, **la trajectoire d'un rayon lumineux ne dépend pas de son sens de propagation** comme le montre la figure ci-dessous. C'est ce que l'on appelle le **principe de retour inverse de la lumière**. Ce principe peut se révéler très utile en exercice, permettant parfois d'éviter des calculs inutiles.

Il est important de bien comprendre ce principe de retour inverse. En particulier le fait que seule la **trajectoire** du rayon lumineux est identique. Le principe de retour inverse ne dit rien sur l'**énergie**

Ce résultat n'est valable qu'en optique géométrique et ne s'applique de toute évidence pas à la diffraction par exemple.

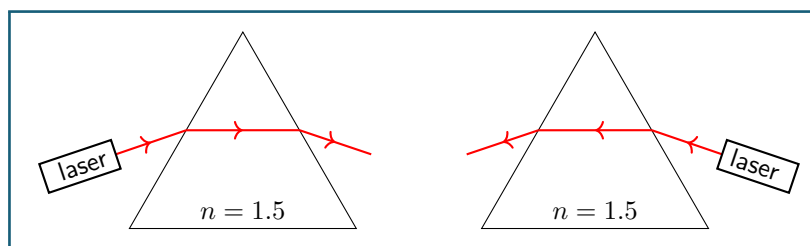
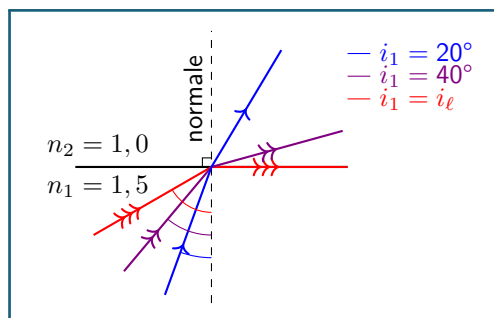


Figure 3.3 – Mise en évidence du principe de retour inverse de la lumière pour un rayon réfracté par un prisme de verre ($n = 1.5$)

lumineuse de ces rayons, c'est-à-dire le pourcentage de lumière réfléchi ou réfracté, et il se peut que ce pourcentage ne soit pas le même à l'aller et au retour. Le cas le plus flagrant est celui de la vitre sans tain puisque la lumière ne peut « passer » que dans un sens. En fait la lumière emprunte exactement le même trajet à l'aller et au retour, mais à l'aller la quasi-totalité de la lumière est réfractée (transmise), alors qu'au retour la quasi-totalité de la lumière est cette fois réfléchi.

II.3 Réflexion totale



Démonstration

La 3^e loi précise « dans le cas où cette relation a un sens ». En effet, cette relation peut se ré-écrire :

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \quad (3.7)$$

- Dans le cas où $n_1 < n_2$, il n'y a aucun problème : $\frac{n_1}{n_2} < 1$ donc $\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 = \sin i_2 < 1$.
- Cependant, dans le cas $n_1 > n_2$ alors il existe un angle $i_{1,\ell}$ tel que $i_1 > i_{1,\ell}$ implique $\sin i_2 > 1$ ce qui n'a pas de sens. Dans ce cas l'angle i_2 n'est pas défini et il n'y a pas de rayon réfracté : on parle de **réflexion totale** comme le montre la FIG. ci-dessous.

L'**angle limite** i_ℓ au-delà duquel on observe une réflexion totale est donné par la condition $\sin i_2 \leq 1$ soit :

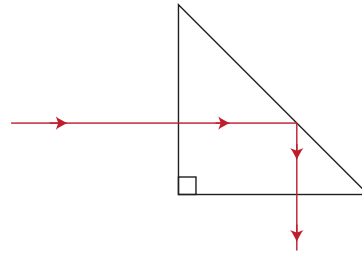
$$\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \leq 1 \iff \sin i_1 \leq \frac{n_2}{n_1} \iff i_1 \leq i_\ell = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (3.8)$$

Une réflexion totale n'est donc possible que si $n_1 > n_2$, on dit dans ce cas que le milieu 1 est plus **réfringent** que le milieu 2. C'est par exemple le cas lors du passage de l'eau ($n_1 = 1,33$) à l'air ($n = 1$) pour un rayon lumineux.

II.4 Quelques conséquences des lois de Descartes

Citons quelques conséquences utiles aux lois de Descartes :

- les prismes à réflexion totale, utilisés dans les jumelles ou périscopes (ayant l'avantage de ne pas avoir d'usure comme pour la surface d'un miroir qui peut s'oxyder). Ils possèdent un angle droit et un indice optique suffisant pour permettre la réflexion totale.

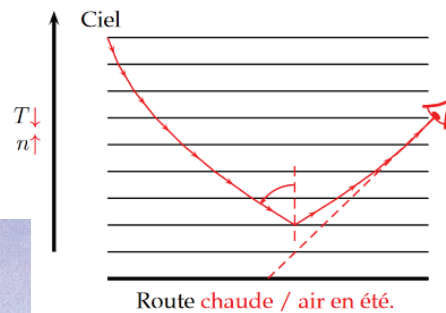
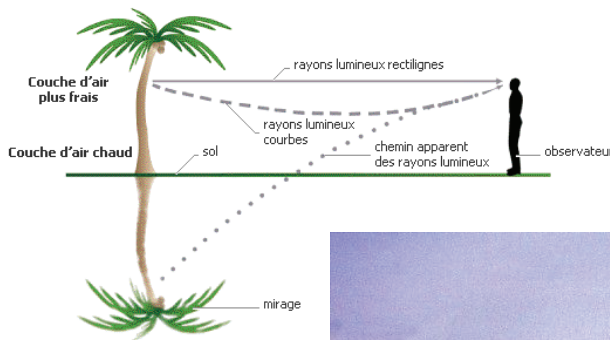


Exercice

Déterminer à partir du schéma précédent à partir de quelle valeur d'indice optique la réflexion totale est réalisée. Le prisme est constitué de côtés de taille identique.

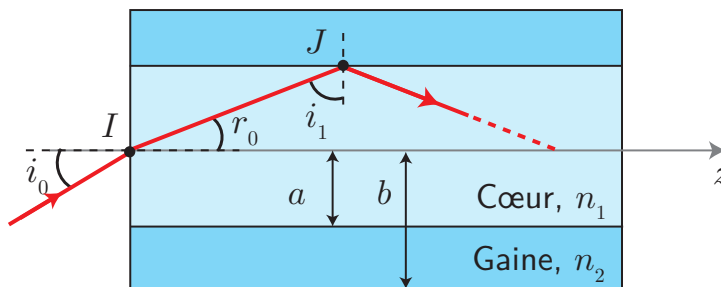
L'angle d'incidence par rapport au dioptré est de 45° . Il faut donc que l'angle limite vérifie $i_\ell < \frac{\pi}{4} \iff \arcsin \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}} < \frac{\pi}{4}$, soit $\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $n_{\text{verre}} > n_{\text{air}}\sqrt{2} = 1,41$. C'est généralement le cas, donc pas de soucis.

- les mirages peuvent également s'expliquer avec les lois de Descartes : l'indice optique change avec la température, un rayon lumineux est alors dévié de sa trajectoire initiale, jusqu'à ce qu'il y ait réflexion totale (pour un angle d'incidence proche de 90°) et un changement de courbure s'opère. On a alors l'impression que le rayon lumineux provient « d'en bas », correspondant à un mirage dit « inférieur » (valable pour un gradient de température vers le haut, typiquement une route qui chauffe l'air ambiant).



II.5 Fibres à saut d'indice

Les fibres optiques à saut d'indice sont constituées d'une gaine d'indice n_1 et d'un cœur d'indice $n_1 > n_2$ de sorte à permettre le confinement d'un rayon lumineux à l'intérieur du cœur :





Manipulation

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/optiqueGeo/dioptres/fibre_optique.php

a) Principe - cône d'acceptance

Le rayon reste confiné dans le cœur de la fibre s'il subit une **réflexion totale** au point J . En effet, suite à la première réflexion, la situation se reproduira à l'identique au prochain dioptre (mêmes angles d'incidence). Pour cela, l'angle i_1 doit vérifier :

$$i_1 > i_\ell = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (3.9)$$

i_1 est reliée à i_0 par les lois de Descartes :

$$\sin i_0 = n_1 \sin r_0 = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) = n_1 \cos i_1 \quad (3.10)$$

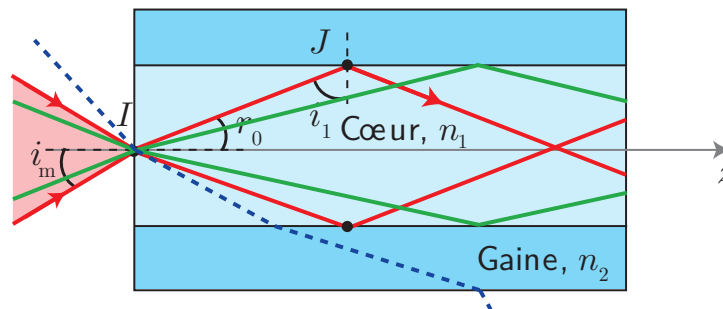
On en déduit que :

$$\cos i_1 < \cos\left(\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right) \iff \frac{\sin i_0}{n_1} < \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \quad (3.11)$$

comme la fonction $\cos$ est décroissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. En injectant n_1 à droite de l'équation, puis dans la racine :

$$\sin i_0 < \sqrt{n_1^2 \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \iff i_0 < \arcsin\left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right) = i_m \quad (3.12)$$

Cela définit alors un **cône d'acceptance**, formé par l'ensemble des valeurs que peut prendre i_0 pour assurer la réflexion : $-i_m < i_0 < i_m$. Tout rayon qui ne vérifie pas cette condition ne sera pas guidé dans la fibre optique. Le cône sera d'autant plus grand que l'écart d'indices optique est important.



b) Dispersion intermodale

Tous les rayons n'ont ni pas même trajet (et parfois pas la même vitesse de propagation) ; c'est la principale cause de dispersion. Une impulsion lumineuse injectée dans la fibre va s'élargir :

Deux impulsions successives, bien distinctes à l'entrée de la fibre pourront interférer avant la sortie, d'où une perte d'information et donc concrètement une limitation du débit dans une fibre optique. On parle de **dispersion intermodale** : c'est l'écart entre les valeurs extrêmes de temps de propagation par unité de longueur. On peut montrer qu'elle vaut $\frac{n_1}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)$ dans le cas d'une fibre à saut d'indice.

En conclusion, il faut donc avoir une différence entre les indices optiques la plus petite possible pour limiter la dispersion et donc augmenter le débit, mais en même temps cela impactera à la baisse la taille du cône d'acceptance.

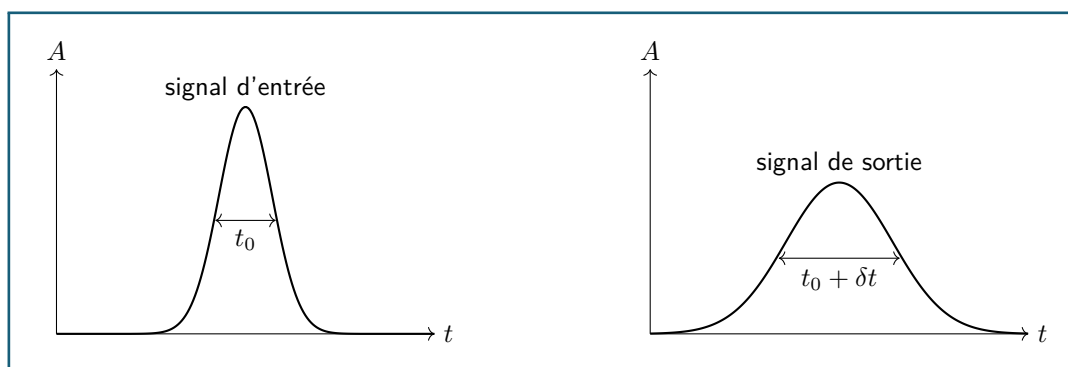


Figure 3.4 – Amplitude A du signal lumineux à l'entrée et à la sortie de la fibre. L'aplatissement du signal est une conséquence directe de la conservation de l'énergie.

Exercices

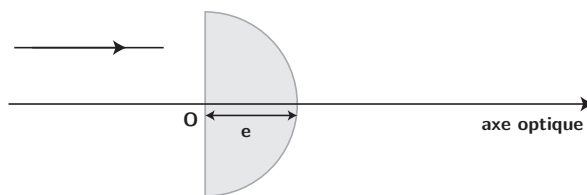
3.1 Angle de Brewster

On considère un dioptre séparant deux milieux matériels homogènes d'indices respectifs n_1 et n_2 . Il existe un angle d'incidence i_1 tel que le rayon réfracté soit perpendiculaire au rayon réfléchi. Après avoir représenté graphiquement la situation physique, déterminer cet angle en fonction de n_1 et n_2 .

NB : au-delà de l'aspect purement géométrique, éclairer une lame avec un angle dit de Brewster permet de polariser la lumière réfléchie.

3.2 Aberrations chromatiques

1. Définir l'expression *milieu dispersif*.
2. On considère une demi-sphère de verre d'indice n placée dans l'air.



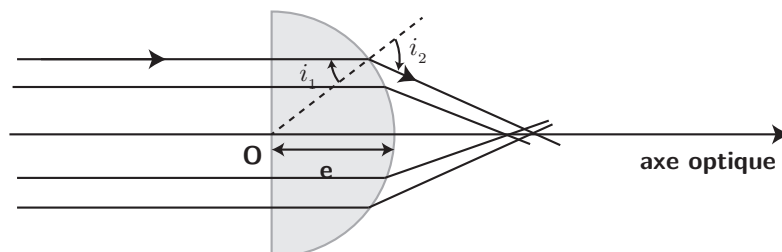
Représenter la trajectoire de quelques rayons incidents perpendiculaires à la face d'entrée. Comment semblent se comporter les rayons à la sortie de la demi-sphère ? comment qualifier cet objet, à votre avis ?

3. L'indice de réfraction n obéit en réalité à la loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}, \text{ avec } A = 1,5 \text{ et } B = 3,8 \cdot 10^3 \text{ nm}^2.$$

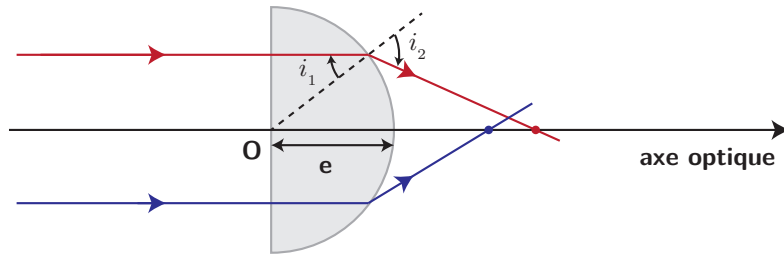
En justifiant très clairement le tracé, tracer l'allure du chemin suivi par une radiation rouge ou une radiation bleue dans l'objet. Que peut-on en conclure ?

-
1. Un milieu dispersif est tel que son indice optique dépend de la longueur d'onde (et de la fréquence).
 2. En entrée de la demi-sphère, le rayon incident est orthogonal au dioptre. Par application de la 3e loi de Descartes, l'angle réfracté est nul, le rayon continue tout droit. Par contre, en sortie, il rencontre un dioptre courbe. Localement, on peut tracer la tangente et la normale, et appliquer à nouveau la loi de Descartes. Le rayon sera ainsi dévié en direction de l'axe optique.



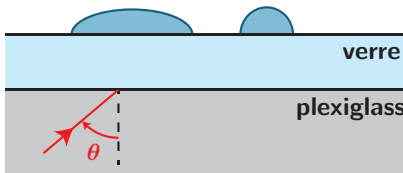
En traçant plusieurs rayons, on constate qu'ils semblent tous converger en direction de l'axe optique, c'est donc une sorte de lentille convergente (que l'on étudiera plus en détail au prochain chapitre).

3. Si l'indice optique du verre augmente, le rayon en sortie de la demi-sphère sera davantage dévié : en effet, pour un même angle d'incidence i_1 , $n \sin i_1 = \sin i_2$ (indice de l'air égal à 1), donc i_2 augmente aussi. Le rayon coupera donc l'axe optique plus proche de la demi-sphère, comme illustré ci-dessous. On justifie qu'il s'agit d'une radiation bleue qui sera plus déviée, car si λ diminue, n augmente.



3.3 Détecteur de pluie

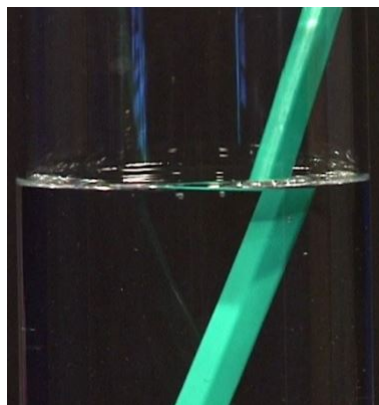
On va chercher à modéliser simplement un détecteur de pluie commandant automatiquement la mise en route des essuie-glaces d'une voiture. Disposée à l'intérieur du véhicule, une diode électroluminescente projette un faisceau lumineux sur le pare-brise (d'indice optique $n_v = 1,55$). Un capteur photo-sensible mesure en permanence l'intensité de la lumière réfléchiée. Le signal mesuré par le capteur sert d'entrée à une chaîne de commande de la vitesse de balayage de l'essuie-glace, choisie en fonction de la quantité d'eau détectée.



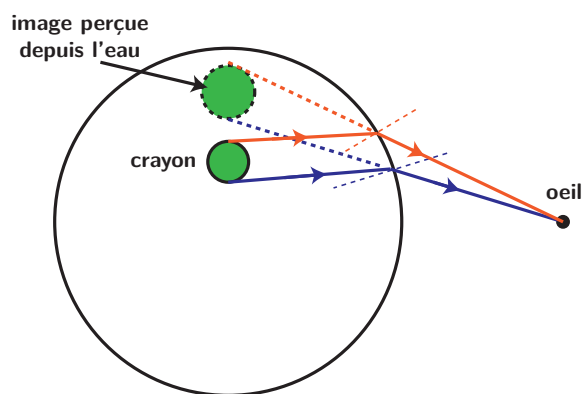
Les rayons lumineux émis par la DEL se propagent jusqu'au pare-brise dans le plexiglas d'indice $n_p = 1,50$. Les rayons sont dirigés vers le pare-brise avec un angle d'incidence $\theta = 50^\circ$. On prendra pour indice optique de l'eau $n_e = 1,33$ et de l'air $n_a = 1,00$.

1. Existe-t-il un rayon transmis vers l'extérieur du véhicule lorsque le pare-brise est sec ? Qu'en est-il en présence de pluie ?
2. En déduire comment la mesure de l'intensité perçue par le photocapteur permet de connaître la quantité d'eau sur le pare-brise, en donc d'ajuster en conséquence la vitesse de balayage des essuie-glace.

3.4 Expliquez (crayon dans un verre d'eau) !

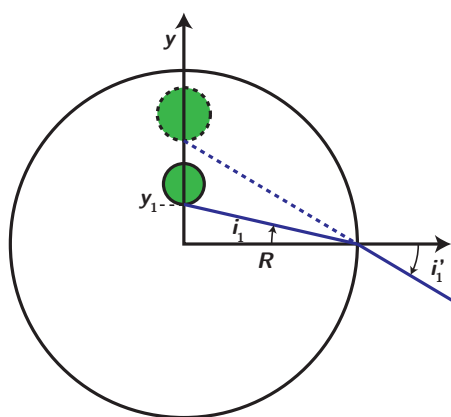


Le phénomène physique mis en jeu ici est la réfraction des rayons lumineux lors du passage entre un ou plusieurs dioptrés. Les rayons lumineux perçus par l'œil qui vont nous permettre de déterminer la position de l'objet, ne vont pas suivre le même trajet selon qu'ils traversent uniquement l'air et le verre que l'eau et le verre. Un petit schéma vu de dessus permet de schématiser clairement ce qu'il se produit :



La loi qui est suivie lors du passage au niveau du dioptre est $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, c'est-à-dire la loi de la réfraction de Snell-Descartes.

Pour estimer l'indice optique de l'eau n_{eau} , on peut essayer de se servir du grandissement de l'épaisseur du crayon, dans la limite des petits angles, en négligeant l'effet du verre dont l'indice est relativement proche de celui de l'eau.



En considérant des rayons issus des deux extrémités du crayon dans l'eau, on a $\tan i_1 = \frac{y_1}{R}$ et $\sin(i'_1) = n_{\text{eau}} \sin i_1$, sachant que le rayon réfracté semble provenir de l'extrémité de l'image perçue par l'œil.

En appelant y'_1 la position de l'extrémité inférieure de l'image du crayon, on a aussi $\tan i'_1 = \frac{y'_1}{R}$. On peut faire de même avec l'autre extrémité en introduisant des angles i_2 et i'_2 . Il vient en linéarisant que $i_1 = \frac{i'_1}{n_{\text{eau}}} = \frac{\frac{y'_1}{R}}{n_{\text{eau}}} = \frac{y_1}{R}$ soit $y'_1 = n y_1$ puis $y'_2 = n_{\text{eau}} y_2$.

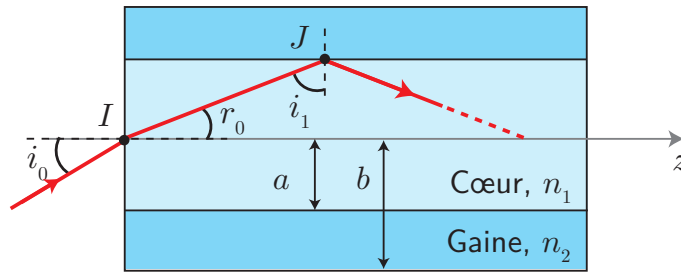
Donc l'épaisseur du crayon dans l'eau est environ $e_{\text{eau}} = y'_2 - y'_1 = n_{\text{eau}} e_{\text{air}}$, soit approximativement $n_{\text{eau}} = \frac{e_{\text{eau}}}{e_{\text{air}}}$.

En utilisant la règle, en supposant que la portion de crayon dans l'air et dans l'eau sont dans le même plan, il vient $n_{\text{eau}} = \frac{8,5}{0,65} = 1,3$

Conclusion : la valeur obtenue est cohérente avec la valeur théorique de 1,33, néanmoins il convient de nuancer nos propos, la mesure ici effectuée est pour le moins imprécise, se base certes sur une formule exacte qui est ensuite simplifiée dans la limite des petits angles que nous ne vérifions pas nécessairement, tandis que la précision sur la mesure des épaisseurs est très limitée. Néanmoins le principe physique est expliqué, et l'ordre de grandeur est satisfaisant.

3.5 Fibre optique ★

Pour guider la lumière dans une direction donnée, on réalise des fibres optiques, longs fils cylindriques dont l'indice diminue quand on s'éloigne de l'axe. La lumière suit la direction moyenne de l'axe grâce au phénomène de réflexion totale, à condition que le faisceau incident ait une ouverture angulaire convenable.



Dans le modèle qui suit, on considère que la fibre est constituée d'un cœur cylindrique de rayon a , d'indice $n_1 = 1,510$ et d'une gaine de rayon extérieur b , d'indice $n_2 = 1,495$.

1. Ouverture numérique

- Un rayon incident se propage dans l'air dans un plan axial de la fibre et arrive en I sur une extrémité de la fibre, sous un angle d'incidence i_0 . On note i_1 l'angle que fait le rayon avec la normale séparant la gaine du cœur. Déterminer la condition sur i_1 tel qu'il y a guidage dans toute la fibre.
- Déterminer la condition sur i_0 , de la forme $i_0 < i_m$, permettant la réflexion en J .
- On appelle ouverture numérique O.N. la quantité $\sin(i_m)$. Exprimer O.N. en fonction de n_1 et n_2 . Effectuer l'application numérique. Comment faire pour respecter au mieux cette condition, expérimentalement ?

2. Bande passante.

Soit L la longueur de la fibre optique étudiée. La lumière entre dans la fibre en couvrant toutes les valeurs d'angle d'incidence comprises entre 0 et i_m . On note c la vitesse de la lumière dans le vide.

- Quel est le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre ? Quel est le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre ? Représenter ces deux rayons et exprimer l'intervalle de temps δt entre le temps de parcours minimal et maximal en fonction de L , c , n_1 et n_2 .

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse de durée t_0 formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_ℓ . La FIG. 3.5 représente l'allure de l'amplitude A du signal lumineux en fonction du temps t .

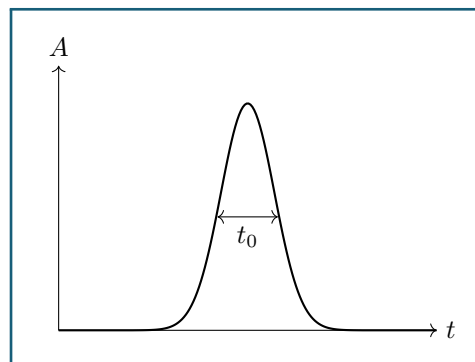


Figure 3.5 – Amplitude A du signal lumineux à l'entrée de la fibre

- Reproduire la FIG. 3.5 en ajoutant à la suite l'allure du signal lumineux à la sortie de la fibre. Quelle est approximativement la durée t'_0 de l'impulsion lumineuse à la sortie de la fibre ?
- Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses périodiquement avec une fréquence d'émission F . En supposant t_0 négligeable devant δt , quelle condition portant sur la fréquence d'émission F exprime le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique ?
- Soit $L_{\max}$ la longueur maximale (à F fixé) de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions. On appelle bande passante de la fibre le produit $B = L_{\max} \times F$. Exprimer la bande passante B en fonction de c , n_1 , et n_2 .

- (e) Calculer la valeur numérique de la bande passante (exprimée en MHz·km). Pour un débit d'information de $F = 100 \text{ Mbits/s} = 100 \text{ MHz}$, quelle longueur maximale de fibre optique peut-on utiliser pour transmettre le signal ? Commenter.

1. (a) Le rayon reste confiné dans le cœur de la fibre s'il subit une **réflexion totale** au point J . Pour cela, l'angle i_1 doit vérifier :

$$i_1 > i_\ell = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (3.13)$$

- (b) Relions tout d'abord les angles i_0 et r_0 . La loi de Descartes donne :

$$\sin i_0 = n \sin r_0 = n \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) = n_1 \cos i_1 \quad (3.14)$$

On en déduit que :

$$\cos i_1 < \cos\left(\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right) \iff \frac{\sin i_0}{n_1} < \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \quad (3.15)$$

comme la fonction $\cos$ est décroissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. En injectant n_1 à droite de l'équation, puis dans la racine :

$$\sin i_0 < \sqrt{n_1^2 \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \iff i_0 < \arcsin\left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right) = i_m \quad (3.16)$$

- (c) L'expression de i_m permet d'exprimer l'ouverture numérique :

$$ON = \sin i_m = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3.17)$$

L'application numérique donne $ON = 0,212$. Pour respecter au mieux cette condition, il faut envoyer un faisceau lumineux faiblement incliné par rapport à l'axe z . On peut l'obtenir grâce à une lentille convergente.

2. (a) Le rayon qui traverse le **plus rapidement** la fibre est celui qui se propage en **ligne droite**. Il correspond à un angle $i_0 = 0$. Celui qui traverse le **moins rapidement** la fibre entre avec un angle $i_1 = i_\ell$. Ces deux rayons sont représentés FIG. 3.6.

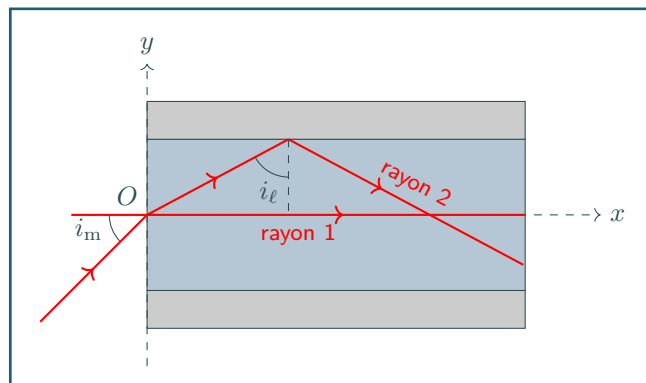


Figure 3.6 – Propagation d'un rayon lumineux dans une fibre à saut d'indice

Le rayon 1 (le plus rapide) parcourt la distance L en un temps :

$$t_1 = n_1 \frac{L}{c} \quad (3.18)$$

En effet on rappelle que la lumière, dans un milieu d'indice n_1 , se propage à la vitesse $\frac{c}{n_1}$.

Le rayon 2 (le moins rapide) parcourt la distance L en un temps :

$$t_2 = n_1 \frac{L}{c \sin i_\ell} = \frac{n_1^2 L}{n_2 c} \quad (3.19)$$

En effet, la distance réelle à parcourir est de $L/\sin i_\ell > L$ d'après le schéma précédent.

On en déduit l'écart temporel entre ces deux rayons :

$$\delta t = t_2 - t_1 = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \quad (3.20)$$

- (b) Pour parcourir la distance L , certaines composantes ont mis δt de plus que les autres. La largeur du signal est donc de $t_0 + \delta t$ comme on le voit FIG. 3.7.

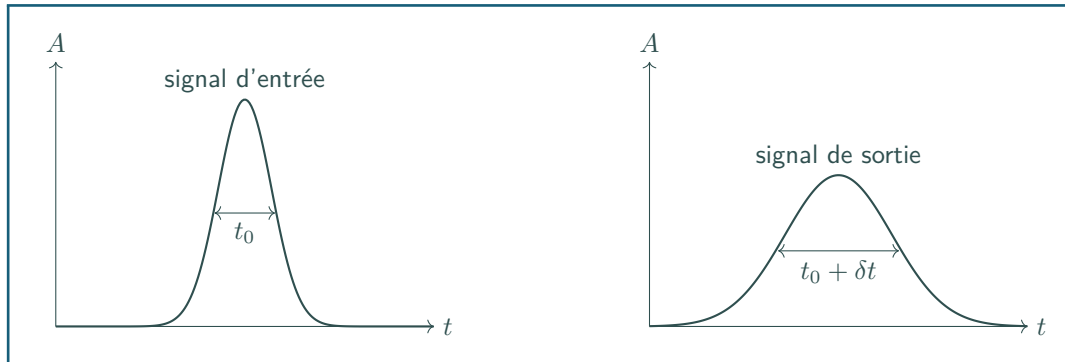


Figure 3.7 – Amplitude A du signal lumineux à l'entrée et à la sortie de la fibre. L'aplatissement du signal est une conséquence directe de la conservation de l'énergie.

- (c) Initialement, chaque impulsion est séparée d'un intervalle de temps $\Delta t = \frac{1}{F}$. Si on souhaite que ces impulsions ne se chevauchent pas à l'arrivée, il faut :

$$\Delta t = \frac{1}{F} > \delta t \quad \text{soit} \quad F < \frac{1}{\delta t} \quad (3.21)$$

- (d) La grandeur $L_{\max}$ est la valeur de L pour laquelle $F = 1/\delta t$ soit :

$$L_{\max} = \frac{c}{F n_1 \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right)} \quad (3.22)$$

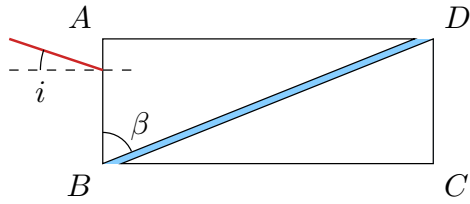
On en déduit :

$$B = L_{\max} F = \frac{c}{n_1 \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right)} \quad (3.23)$$

- (e) L'application numérique donne $B = 1,8 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \cdot \text{m}$. On en déduit la longueur maximale de la fibre pour un débit de 100 Mbits/s : $L_{\max} = 180 \text{ m}$.

Cette fibre optique conviendrait pour transmettre des informations au sein d'un bâtiment (maison, appartement, immeuble) mais elle ne peut être utilisée pour les communications à longue distance (réseau urbain, national ou intercontinental).

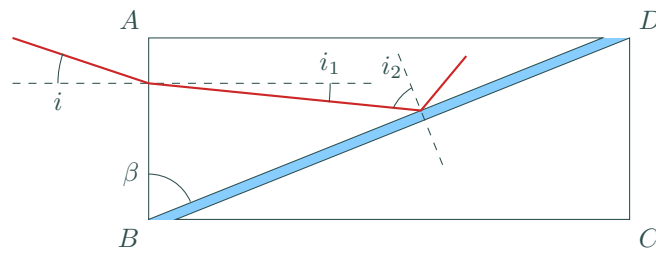
3.6 Réfractomètre d'Abbe



Un réfractomètre d'Abbe est un appareil servant à mesurer des indices optiques, très utilisé notamment à des fins de caractérisation rapide d'échantillons. Ce réfractomètre est composé de deux prismes identiques, d'indice $n_0 = 1,732$, à base en forme de triangle rectangle. L'angle au sommet vaut 60° . Entre ces prismes est intercalé un film de liquide d'indice n que l'on cherche à déterminer. Pour ce faire, le réfractomètre est éclairé par la face AB par un rayon d'angle d'incidence i réglable.

1. Si le rayon sort par la face CD , quelle sera sa direction ? Répondre par un argument physique sans calcul, éventuellement à confirmer (ou deviner !) par un schéma propre.
2. Expliquer comment la mesure de l'angle d'incidence pour laquelle le rayon transmis ne sort plus par la face CD mais par la face AD permet d'en déduire la valeur de l'indice du liquide.
3. Que vaut cet indice si l'angle d'incidence critique vaut $18,0^\circ$?
4. Quelles sont les limites d'utilisation du dispositif ?

1. Avec le principe de retour inverse, comme le système possède une symétrie centrale (centre du système), on ressort de la face CD vers le bas avec le même angle i par rapport à l'horizontale !!
2. Si le rayon ne sort plus par la face CD , cela signifie qu'il y a réflexion totale à l'interface prisme-liquide (segment BD), donc que $n_0 > n$ et l'angle d'incidence à cet interface dépasse $\arcsin\left(\frac{n_0}{n}\right)$. Cette limite dépendant de n_0 (connu) et de n , on peut donc, connaissant l'angle d'incidence, connaître n .
3. Effectuons un schéma pour calculer l'angle d'incidence à l'interface prisme-liquide, noté i_2 :



La somme des angles d'un triangle étant de π , il vient :

$$\beta + \left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) = \pi \iff i_1 = \beta - i_2 \quad (3.24)$$

Puis la troisième loi de Descartes à l'interface AB conduit à :

$$\sin i = n_0 \sin(i_1) \implies \sin i = n_0 \sin\left(\beta - \arcsin\left(\frac{n}{n_0}\right)\right) \quad (3.25)$$

en se plaçant à la limite de la réflexion totale où $i_2 = \arcsin\left(\frac{n}{n_0}\right)$. En inversant la relation pour trouver n :

$$n = n_0 \sin\left(\beta - \arcsin\left(\frac{\sin i}{n_0}\right)\right) = 1,32 \quad (3.26)$$

4. Ce dispositif ne peut fonctionner que si l'indice de l'échantillon est inférieur à l'indice des prismes n_0 . Au-delà, il ne se produit pas de réflexion totale. D'autre part, on ne peut utiliser que des liquides ou des gaz, mais il sera difficile de l'appliquer à des solides.