

Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

Sommaire

3.1 Travail et puissance d'une force	2
3.1.1 Puissance d'une force	2
3.1.2 Travail d'une force	2
3.1.3 Exemples de travaux	3
3.2 Théorème de l'énergie cinétique	3
3.3 Énergie potentielle et forces conservatives	4
3.3.1 Énergie potentielle d'une force conservative	4
3.3.2 Exemples à connaître	4
3.3.3 Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle	5
3.4 Énergie mécanique	5
3.4.1 Définition	5
3.4.2 Théorème de l'énergie mécanique	6
3.4.3 Application à la détermination de l'équation différentielle du mouvement	6
3.5 Étude qualitative des mouvements et équilibres	7
3.5.1 Approche qualitative	7
3.5.2 Analyse du mouvement à l'aide d'un graphe d'énergie potentielle	7
3.5.3 Position d'équilibre et stabilité	8
3.5.4 Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable	9
3.5.5 Résolution d'une équation différentielle non-linéaire	10

Questions de cours :

- Puissance et travail d'une force. Exemple d'une force constante et d'une force de frottements.
- Démonstration du théorème de l'énergie cinétique et application à la détermination de la vitesse obtenue après une chute libre d'un objet, sans vitesse initiale, d'une hauteur h .
- Force conservative, énergie potentielle, et exemple de calcul au choix du khôlleur (gravitationnelle, rappel élastique, coulombienne, force électrostatique).
- Théorème de l'énergie mécanique et détermination de l'équation différentielle du pendule simple.
- Analyse du mouvement à l'aide d'un graphe d'énergie potentielle.
- Position d'équilibre, stabilité, et approximation locale par un puits de potentiel harmonique.

Capacités exigibles du BO :

- Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
- Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte (entre le théorème de l'énergie cinétique ou la puissance cinétique).
- Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique.
- Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie.
- Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
- Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
- Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel.
- Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
- Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
- Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.

Même si l'approche employée à l'aide des lois de Newton est suffisante pour expliquer le mouvement d'un point matériel soumis à une force, l'approche énergétique que l'on va développer est complémentaire dans le sens où elle permet de décrire sans trop de calculs le mouvement, comprendre qualitativement certains phénomènes, et surtout est très utile pour mêler différents domaines de la physique.

I. Travail et puissance d'une force

I.1 Puissance d'une force

* On considère un point matériel soumis à une force et animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen. On appelle puissance d'une force $\vec{F}$ appliquée au point matériel M la quantité

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3.1)$$

Attention, cette puissance dépend du référentiel choisi, comme $\vec{v}$ en dépend !
Plusieurs cas sont à distinguer :

- $\mathcal{P} > 0$, la force $\vec{F}$ est dite **motrice** car $\vec{F}$ est dans le sens du mouvement ;
- $\mathcal{P} < 0$, la force est dite **résistante** ;
- $\mathcal{P} = 0$: la force est perpendiculaire au mouvement et n'a pas d'influence directe sur le mouvement.



Exercice

Quelle puissance doit développer un cycliste de masse $m = 80 \text{ kg}$ s'il souhaite monter une pente de 7% à $v = 10,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$? On précise qu'il devra compenser la puissance du poids, et on néglige tout frottements.

$\mathcal{P}_{\text{cycl}} = -\mathcal{P}(\vec{P}) = mg \sin \theta v$ avec $\tan \theta = 7/100$. Donc $P = 160 \text{ W}$.

I.2 Travail d'une force

Travail élémentaire d'une force

On appelle travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M pendant un intervalle de temps infinitésimal dt la quantité

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F}) dt \quad \text{variable temporelle} \quad (3.2)$$

que l'on peut réécrire avec $\vec{v} dt = d\vec{r}$ le déplacement élémentaire du point M pendant un temps dt :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{variable spatiale} \quad (3.3)$$



La notation δW est différente de dW , que l'on écrit SURTOUT PAS. En effet, on définit un travail sur un temps dt , mais le travail n'est donc pas défini en t et en $t + dt$, et cela ne veut donc rien dire d'écrire $dW = W(t + dt) - W(t)$. Ici δW est une **petite quantité** de travail, et non une variation.

* Conséquence, on peut alors calculer le travail au cours d'un déplacement le long d'une trajectoire (C) entre un point A et B :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_{(C)} \delta W(\vec{F}) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(\vec{F}) dt = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.4)$$

I.3 Exemples de travaux

- Travail d'une force perpendiculaire au mouvement : $\mathcal{P}(\vec{F}) = 0$ donc $W(\vec{F}) = 0$, on dit que la force "ne travaille pas" : cas de la réaction normale du support, de la tension du fil ;
- Travail d'une force constante : on considère une force qui est constante **quel que soit le mouvement**, alors $W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ **indépendant du chemin suivi**. Par exemple le poids, $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ alors $W(\vec{P}) = -mg\vec{e}_z \cdot \vec{AB} = mg(z_A - z_B)$.
- Travail d'une force de frottement de norme constante, et de direction opposée au vecteur vitesse :

$$W(\vec{F}) = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = -\|\vec{F}\| \int_{t_A}^{t_B} \|\vec{v}\| dt = -\|\vec{F}\| \int_A^B \|d\vec{r}\| = -\|\vec{F}\| \ell_{AB}$$

avec ℓ_{AB} la longueur de la trajectoire parcourue entre A et B, mais qui dépend donc de la courbe suivie.

Donc quelle que soit la vitesse, par exemple, ainsi $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ ne rentre pas en ligne de compte

II. Théorème de l'énergie cinétique

Théorème de l'énergie cinétique

Pour un point matériel de masse m se déplaçant d'un point A à un point B dans un référentiel galiléen et soumis à des forces $\{\vec{F}_i\}$:

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i) \quad (3.5)$$

On utilise aussi le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i) \quad (3.6)$$

Démonstration

On part de la loi de la quantité de mouvement appliquée à un point matériel de masse m constante, que l'on multiplie scalairement avec le vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i) \quad (3.7)$$

On aboutit alors au théorème de la puissance cinétique, où une intégration temporelle permet d'amener au théorème de l'énergie cinétique :

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{dE_c}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i) dt \Rightarrow E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i) \quad (3.8)$$

Plusieurs remarques :

- Ce théorème permet d'obtenir des résultats sur le mouvement d'un point matériel plus rapidement que par l'application de la LQM, dans le cas où le mouvement est descriptible par **un seul** paramètre de position ;
- il est néanmoins plus restrictif que la LQM, car on passe de trois équations scalaires à une seule ;
- il permet de justifier l'appellation de force motrice : si $W(\vec{F}) > 0$, $\Delta E_c > 0$ et la vitesse augmente (et inversement).

Exercice

Un objet tombe en chute libre depuis une hauteur h sans vitesse initiale. Déterminer à l'aide du théorème de l'énergie cinétique sa vitesse lorsqu'il arrive au sol, si on néglige tout frottement. Système : objet

de masse m , référentiel terrestre supposé galiléen. Seul le poids intervient. On peut alors appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre le point de départ A ($z = h$) et le point B ($z = 0$) :

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{P}) \iff \frac{1}{2}mv^2 - 0 = -mg\vec{e}_z \cdot \vec{AB} = +mgh \implies v = \sqrt{2gh} \quad (3.9)$$



Exercice

Considérons une masse glissant à vitesse constante v_0 sans frottements sur une piste verglacée. Elle rencontre une zone de largeur ℓ où s'applique un frottement de norme constante $F = fmg$ avec f le coefficient de frottements. Déterminer à quelle condition sur v_0 elle ne s'arrête pas sur la zone de frottements.

L'application du théorème entre le début et la fin de la zone de frottements conduit à $\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W(\vec{F}) = -fmg\ell$. On souhaite que $v_f > 0$, donc $\frac{1}{2}mv_f^2 > 0$, ce qui se réécrit

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - fmg\ell > 0 \iff v_0 > \sqrt{2f g \ell} \quad (3.10)$$

III. Énergie potentielle et forces conservatives

Pour certaines forces, il s'avère que le travail admet une expression bien particulière, qui va nous conduire à introduire une forme nouvelle d'énergie, qui contribue à l'énergie totale d'un point matériel.

III.1 Énergie potentielle d'une force conservative

On dit d'une force qu'elle est **conservative** si le travail associé à cette force le long d'une trajectoire entre A et B ne dépend que des points de départ et d'arrivée, mais pas du chemin parcouru. On peut alors définir une fonction appelée **énergie potentielle** $E_p(M)$ telle que

$$* \quad \delta W(\vec{F}) = -dE_p \implies W_{AB}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B) \quad (3.11)$$

Étant donnée que l'énergie potentielle est définie à partir de sa variation, elle est déterminée à une constante près : on peut donc choisir arbitrairement une position pour laquelle son énergie potentielle est nulle.

III.2 Exemples à connaître

a) Pesanteur

On l'a vu précédemment, comme le poids est une force de norme constante, on aboutit à $W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) = E_p(A) - E_p(B)$, donc on peut poser

$$E_{p,p} = mgz + \text{cste} \quad (3.12)$$

si l'axe (Oz) est orienté vers le haut. On peut le retrouver à partir de la définition du travail :

$$\delta W(\vec{P}) = -mg\vec{e}_z \cdot d\vec{r} = -mgdz = -dE_{p,p} \iff \frac{dE_{p,p}}{dz} = mg \quad (3.13)$$

dont l'intégration permet de retrouver l'expression (3.12).



Selon le sens de l'axe vertical, le signe de l'énergie potentielle peut changer, on peut avoir $E_{p,p} = -mgz + \text{cste}$ si l'axe est vertical orienté vers le bas. Physiquement, il faut retenir que si on augmente en altitude, l'énergie potentielle de pesanteur doit augmenter.

b) Force gravitationnelle

La force gravitationnelle est aussi une force conservative. En effet, en se plaçant par exemple en coordonnées sphériques pour un astre de masse m_a centré en O exerçant une force d'attraction sur un point matériel M de masse m :

$$\vec{F} = -G \frac{mm_a}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \delta W(\vec{F}) = -G \frac{mm_a}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = -G \frac{mm_a}{r^2} dr = -dE_p \quad (3.14)$$

permettant d'écrire que

$$\frac{dE_p}{dr} = G \frac{mm_a}{r^2} \quad (3.15)$$

*

que l'on peut intégrer :

$$E_p = -G \frac{mm_A}{r} + \text{cste} \quad (3.16)$$

et en général la constante est prise nulle pour $r \rightarrow +\infty$ (où l'interaction tend vers 0).

c) Force de rappel élastique

Pour un ressort de raideur k , s'il subit un allongement $\Delta\ell = \ell - \ell_0$, en notant $\ell = x$ il exerce une force $\vec{F} = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x$ sur le système qui lui est accroché (le vecteur $\vec{e}_x$ est alors orienté du ressort vers le système). Le travail élémentaire s'écrit alors :

$$\delta W(\vec{F}) = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x \cdot d\vec{r} = -k(x - \ell_0)dx = -dE_{p,e} \quad (3.17)$$

car un déplacement élémentaire selon la direction du ressort correspond à une petite variation dx de sa longueur. La dérivée de l'énergie potentielle élastique vaut donc :

$$\frac{dE_{p,e}}{dx} = k(x - \ell_0) \quad (3.18)$$

*

On met alors l'énergie potentielle élastique sous la forme :

$$E_{p,e} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 \quad (3.19)$$

l'énergie potentielle élastique étant prise nulle lorsque l'allongement est nul.

III.3 Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle

On a vu précédemment la façon de calculer l'énergie potentielle à partir du travail d'une force d'expression connue. A l'inverse, il est possible d'exprimer la force à partir de l'énergie potentielle en utilisant la notion de gradient :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \quad (3.20)$$

En effet, partant de $-dE_p = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ et par définition de la différentielle $dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$, il vient $F_i = -\frac{\partial E_p}{\partial i}$ par identification, avec $i = x, y, z$.

Par exemple :

*

- en coordonnées cartésiennes, $E_{p,p} = mgz + \text{cste}$ conduit à $\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}} mgz + \text{cste} = -mg\vec{e}_z$;
- en coordonnées sphériques $E_p = -G \frac{mm_A}{r} + \text{cste}$ conduit à $\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{e}_r = +Gmm_A \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{e}_r = -G \frac{mm_A}{r^2} \vec{e}_r$

IV. Énergie mécanique

IV.1 Définition

Pour un système soumis à des forces conservatives $\{F_i\}$ et non conservatives $\{F_j\}$, on appelle énergie mécanique la quantité

$$E_m = E_c + \sum_i E_p(\vec{F}_i) \quad (3.21)$$

Elle correspond à l'**énergie totale macroscopique** que l'on peut associer au système.

On a mis en évidence sur l'oscillateur harmonique que dans certains cas elle pouvait être constante et il pouvait y avoir des conversions entre énergie cinétique et potentielle.

IV.2 Théorème de l'énergie mécanique

Sa variation temporelle suit un théorème général :

Théorème de l'énergie mécanique

- Dans le cas d'un système soumis uniquement à des forces conservatives, l'énergie mécanique est une constante du mouvement, et donc

$$\Delta E_m = 0 \iff \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad (3.22)$$

*

- dans le cas où se rajoutent en plus d'autres forces non conservatives $\{F_j\}_{nc}$, la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservatives :

$$\Delta E_m = \sum_j W(\vec{F}_j) \iff \frac{dE_m}{dt} = \sum_j \mathcal{P}(\vec{F}_j) \quad (3.23)$$

Il ne s'agit en fait que d'une réécriture du théorème de l'énergie cinétique.



Démonstration

Partons du théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F}) = \sum_i W(\vec{F}_i) + \sum_j W(\vec{F}_j) = - \sum_i \Delta E_p(\vec{F}_i) + \sum_j W(\vec{F}_j) \quad (3.24)$$

donc on peut réécrire la variation d'énergie mécanique

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \sum_i \Delta E_p(\vec{F}_i) = \sum_j W(\vec{F}_j) \quad (3.25)$$

soit le résultat à démontrer. Dans le cas où il n'y a que des forces conservatives, $\sum_j W(\vec{F}_j) = 0$, et donc l'énergie mécanique est constante.



Exercice

Déterminer la distance maximale que peut parcourir une voiture sur une pente inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale, si elle part d'une vitesse v_0 et qu'on éteint le moteur.

Système : voiture, référentiel terrestre supposé galiléen, forces : réaction normale du support (pas de travail ni d'énergie potentielle) et poids. On applique le théorème de l'énergie mécanique entre l'instant initial et l'instant où la voiture s'arrête :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_i = 0 + mgz_f \iff z_f - z_i = \frac{v_0^2}{2g} = h \sin \alpha \implies h = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha} \quad (3.26)$$

IV.3 Application à la détermination de l'équation différentielle du mouvement

Dans le cas où le mouvement est descriptible par une seule coordonnée d'espace, on peut retrouver assez simplement l'équation différentielle associée à cette variable d'espace en utilisant le théorème de l'énergie mécanique. Prenons l'exemple du pendule simple sans frottements étudié dans le chapitre M2, dans un référentiel galiléen et en coordonnées polaires :

- son énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$;
- son énergie potentielle est $E_p(\theta) = mgz$ (en prenant pour $\theta = 0$, $z = 0$ et $E_p = 0$, l'axe vertical étant dirigé vers le haut), soit avec $z(\theta) = \ell(1 - \cos \theta)$ et $E_p = mg\ell(1 - \cos \theta)$.

Donc son énergie mécanique vaut $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos \theta)$. Sans forces non conservatives, il vient que

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin \theta$$

soit en simplifiant par $\dot{\theta}$ dans le cas où il y a bien un mouvement,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin \theta = 0$$

équation que l'on avait obtenu en projetant la LQM selon le vecteur $\vec{e}_\theta$.

Exercice

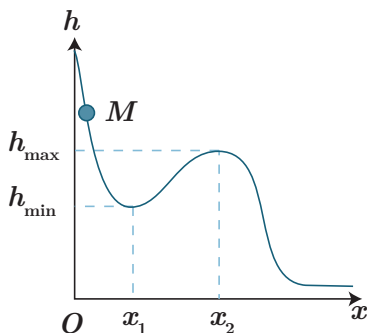
Appliquer ce même principe au cas de l'oscillateur harmonique horizontal et retrouver l'équation différentielle sur la position.

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2. \text{ Ainsi } \frac{dE_m}{dt} = 0 = \dot{x}(m\ddot{x} + k(x - \ell_0)). \text{ CQFD si } \dot{x} \neq 0.$$

V. Étude qualitative des mouvements et équilibres

V.1 Approche qualitative

Considérons l'exemple d'un anneau pouvant glisser sans frottements sur une structure faite en fil de fer. Le système, ici l'anneau de masse m , n'est soumis qu'à son poids et à une réaction de la structure qui est toujours perpendiculaire à la trajectoire, donc qui ne travaille pas. Une étude qualitative montre alors que le lâcher avec une certaine altitude induit certains mouvements :



- si $h_0 > h_{\max}$, la bille va jusqu'en $x \rightarrow +\infty$;
- si $h_{\min} < h_0 < h_{\max}$, la bille reste coincée dans une cuvette, avec un mouvement oscillatoire (qui s'atténuerait s'il y avait des frottements) ;
- si $h_0 = h(x_1)$, l'anneau reste à l'équilibre, et cet équilibre est dit stable ;
- si $h_0 = h(x_2)$, l'anneau est en équilibre, mais instable car le moindre petit mouvement le conduit à se rendre en $x < x_1$ ou $x > x_1$ selon la perturbation.

Cette approche va être confortée par une analyse en terme d'énergie. En effet, ici l'énergie potentielle de l'anneau vaut $E_p = mgh(x)$ en choisissant $E_p(h = 0) = 0$. La position initiale impose une énergie mécanique initiale à l'anneau, qui a des conséquences importantes pour le mouvement ultérieur.

V.2 Analyse du mouvement à l'aide d'une graphe d'énergie potentielle

Dans toute la suite on considère un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives telles que l'on peut définir une énergie potentielle totale ne dépendant que d'une seule coordonnée d'espace, ici x pour s'appuyer sur l'exemple précédent.

Une propriété essentielle est que, dans le cadre d'un système où l'énergie mécanique est conservée, on a nécessairement

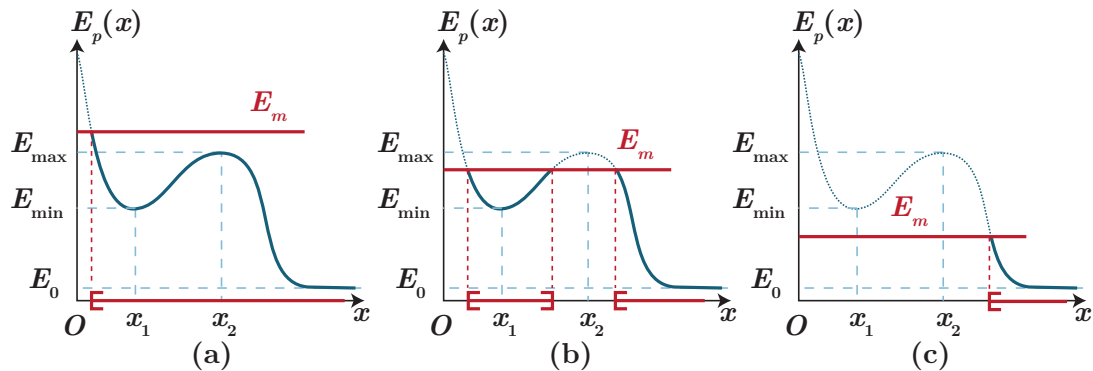
$$E_m = E_c + E_p \geq E_p \quad (3.27)$$

Deux conséquences :

- l'énergie potentielle ne peut dépasser l'énergie mécanique, qui est déterminée par la façon dont on a préparé initialement le système (position et vitesse initiale) ;
- Les lieux où $E_m = E_p(x)$ sont tels que la vitesse est nulle.

* Différentes trajectoires sont donc à considérer :

- (a) : pour $E_m > E_{\max}$, le point peut évoluer de sa position initiale jusqu'à $x \rightarrow +\infty$: on parle d'**état libre** ou **de diffusion** ;
- (b) : pour $E_{\min} < E < E_{\max}$, selon la position initiale, soit le point matériel reste localisé autour de x_1 , la trajectoire est dite **bornée** et on parle d'**état lié**, soit le point part jusqu'en $+\infty$;
- (c) : $E_0 < E < E_{\min}$ seul un état de diffusion est possible ;
- $E < E_0$: cas impossible !



On parle de **puits de potentiel** autour de x_1 et de **barrière de potentiel** autour de x_2 .

V.3 Position d'équilibre et stabilité

On a un état d'équilibre lorsque la somme des forces est nulle. Quel lien peut-on faire avec l'énergie potentielle ? Écrivons la somme des forces, supposées conservatives, comme une résultante de forme $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$, alors par définition du gradient :

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{e}_x \quad (3.28)$$

C'est pour cela que dans le langage courant du physicien, on dit de cette force qu'elle **dérive d'une énergie potentielle**.

Position d'équilibre d'un système

Une position d'équilibre x_{eq} d'un point matériel soumis à des forces conservatives dérivant d'une énergie potentielle $E_p(x)$ est telle que

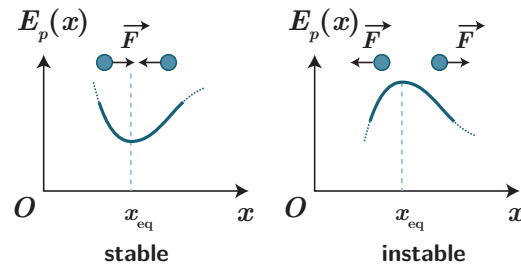
$$* \quad \frac{dE_p}{dx}(x = x_{eq}) = 0 \quad (3.29)$$

Cela correspond à un extremum d'énergie potentielle.

Pour étudier la stabilité, il faut déterminer si, au voisinage de la position d'équilibre x_{eq} , la force est dirigée vers x_{eq} ou non. Pour cela, discutons de la force :

- si l'énergie potentielle est croissante sur un intervalle de position, cela signifie que la force est dirigée dans le sens décroissant $F(x) < 0$ et est d'autant plus intense que la courbe représentative de la fonction est pentue ;

- à l'inverse, si l'énergie potentielle est décroissante, la force est dirigée vers les x positifs, $F(x) > 0$ et il en est de même pour son intensité.



*

Ainsi, si on considère un minimum d'énergie potentielle, donc tel que $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) > 0$:

- pour $x > x_{eq}$, l'énergie potentielle est croissante et la force est dirigée vers x_{eq} et tend donc à ramener le point matériel vers x_{eq} ;
- pour $x < x_{eq}$, c'est le contraire : énergie potentielle décroissante, force dirigée aussi vers x_{eq}

Il s'agit du contraire pour un maximum d'énergie potentielle, pour $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) < 0$: c'est une position d'équilibre instable, en suivant le même raisonnement.

Stabilité d'une position d'équilibre

Une position d'équilibre x_{eq} d'un point matériel soumis à des forces conservatives est :

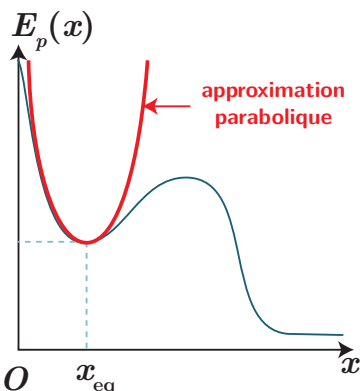
- stable pour un minimum local d'énergie potentielle**, c'est-à-dire lorsque $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) > 0$;
- instable pour un maximum local d'énergie potentielle**, c'est-à-dire lorsque $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) < 0$.

Si $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) = 0$, il faut étudier les dérivées d'ordre supérieur.

V.4 Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

Terminons cette étude en montrant qu'au voisinage d'une position d'équilibre stable on retrouve un mouvement oscillatoire, régi par une équation différentielle d'oscillateur harmonique. Pour cela, écrivons le développement limité de l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre x_{eq} :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \frac{dE_p}{dx}(x_{eq}) + \frac{1}{2}(x - x_{eq})^2 \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) \quad (3.30)$$



*

qui, lorsque la position d'équilibre est stable, se traduit par $\frac{dE_p}{dx}(x_{eq}) = 0$ et $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) > 0$. Donc

$$E_p = E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}(x - x_{eq})^2 \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq})$$

correspondant à une portion de parabole, tel qu'illustré ci-contre : on parle de **puits de potentiel harmonique**.

Ainsi l'énergie mécanique s'écrit localement :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}(x - x_{eq})^2 \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) \quad (3.31)$$

puis du fait de la conservation de l'énergie

$$* \quad \frac{dE_m}{dt} = 0 = m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x} \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq})(x - x_{eq})$$

On retrouve une équation d'oscillateur harmonique en simplifiant par $\dot{x}$:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq} \quad (3.32)$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq})}$ est la pulsation propre de cet oscillateur.

À noter que lorsque l'on autorise un mouvement sur une plage de position un peu plus grande, cette approximation n'est plus valide (cela se constate graphiquement), et des termes non linéaires apparaissent.

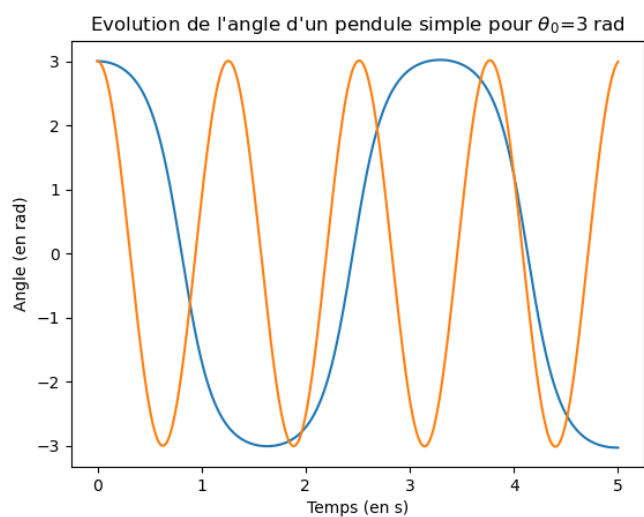
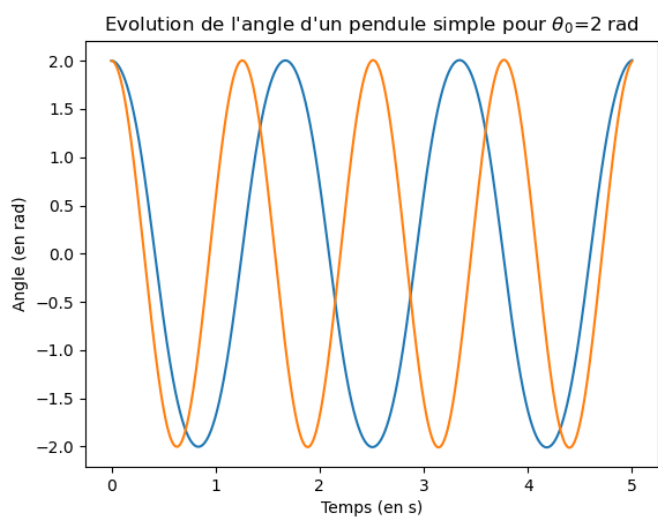
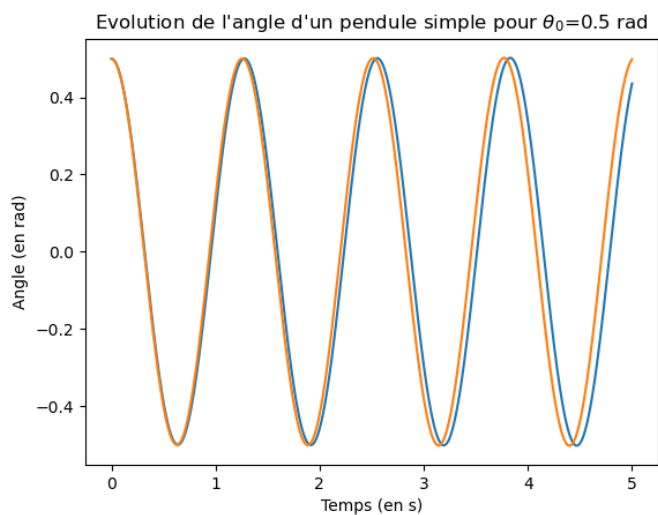
V.5 Résolution d'une équation différentielle non-linéaire

Lorsqu'une approximation en termes de puits de potentiel harmonique n'est plus possible, on est obligé de passer par une résolution numérique. On va prendre l'exemple du pendule simple du chapitre M2, d'équation différentielle $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$, associé à une énergie potentielle $E_p = -mg \cos \theta + \text{cste}$, dont on peut effectuer une approximation parabolique autour de $\theta = 0$. C'est illustré ci-dessous, en comparant les résultats avec et sans l'approximation parabolique.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import scipy.integrate as integ
4
5 omega0=5
6
7 def f(Y): #cas réel du pendule simple
8     return np.array( [ Y[1] , -omega0**2 *np.sin(Y[0]) ] )
9
10 def g(Y): #approximation harmonique
11     return np.array( [ Y[1] , -omega0**2 *Y[0] ] )
12
13 def euler(f,a,b,y0,dy0,n): #algo d'Euler d'ordre 2
14     t=np.linspace(a,b,n)
15     Y0=np.array([y0,dy0])
16     Y=Y0
17     h=(b-a)/n
18     for i in range(n-1):
19         Y.append( Y[i] + h*f(Y[i]) )
20     return t, np.array(Y)
21
22 for theta0 in [0.1,0.5,1,2,3]: #boucle pour plusieurs valeurs de conditions initiales
23     solution=euler(f,0,5,theta0,0,50000)
24     solution_approx=euler(g,0,5,theta0,0,50000)
25     plt.plot(solution[0],solution[1][:,0])
26     plt.plot(solution_approx[0],solution_approx[1][:,0])
27     plt.title(r"Evolution de l'angle d'un pendule simple pour $\theta_0$="+str(theta0)+' rad')
28     plt.xlabel("Temps (en s)")
29     plt.ylabel("Angle (en rad)")
30     plt.show()

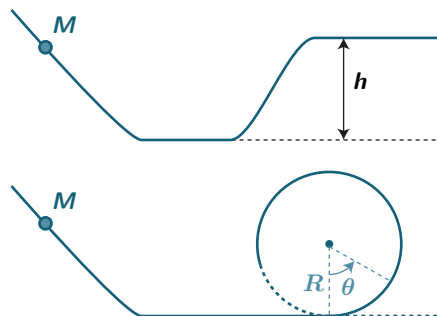
```



Exercices

3.1 Looping

Une petite masse m peut glisser sans frottements sur des tremplins.



1. Sur le tremplin de la figure de droite, de quelle hauteur $h_{\min}$ doit-on au moins lâcher la masse sans vitesse initiale pour qu'elle puisse remonter toute la pente de droite ?
2. On considère le cas d'un looping. On souhaite déterminer la hauteur minimale $h'_{\min}$ pour que la masse fasse un tour complet sur la boucle de rayon R .
 - (a) Expliquer qualitativement pourquoi $h'_{\min}$ n'est pas égale à $2R$.
 - (b) Évaluer la vitesse v_0 atteinte au point le plus bas.
 - (c) De manière générale, donner la norme $v(\theta)$ de la vitesse atteinte au point M en fonction de v_0 , R , g et θ .
 - (d) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, calculer la norme de la réaction normale en fonction de v_0 et θ .
 - (e) En déduire la valeur de $h'_{\min}$.

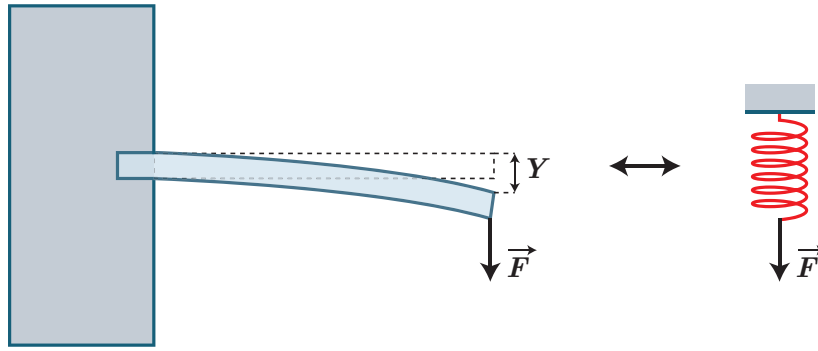
3.2 Distance de freinage

Une voiture de masse $m = 1500 \text{ kg}$ roule à la vitesse de $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Devant un imprévu, le conducteur doit freiner et s'arrête après avoir parcouru une distance $d = 15 \text{ m}$. On modélise la force de freinage par une force constante opposée à la vitesse.

1. Calculer le travail de cette force de freinage. En déduire la norme de cette force.
2. Quelle distance faut-il pour s'arrêter si la vitesse initiale est de $70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?
3. Commenter la phrase d'un livret d'apprentissage de la conduite : "La distance de freinage est proportionnelle au carré de la vitesse de la voiture".

3.3 Tige en verre

Le verre est un matériau très dur. On peut toutefois le déformer légèrement sans le casser : on parle d'élasticité. Récemment, des expériences de biophysique ont été menées pour étudier l'ADN. Le capteur utilisé était simplement une fibre optique en silice amincie à l'extrémité de laquelle on accroche un brin d'ADN. L'expérience consistait à suivre la déformation de flexion de la fibre. La masse volumique du verre est $\rho = 2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. La fibre de verre de longueur ℓ et de diamètre d est encastrée horizontalement dans une paroi immobile. Au repos, la fibre est horizontale (on néglige son poids). Quand on applique une force verticale F (on supposera que la force F reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre de la fibre, celle-ci est déformée. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance Y que l'on appelle la flèche.



La flèche Y est donnée par la relation suivante (on notera la présence du facteur numérique 7, sans dimension, qui est en fait une valeur approchée pour plus de simplicité) :

$$Y = \frac{7\ell^3 F}{Ed^4}$$

où E est le module d'Young du verre.

1. Déterminer l'unité SI du module d'Young E par analyse dimensionnelle.
2. En considérant uniquement la force F , montrer que l'on peut modéliser la fibre de verre par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression analytique en fonction de E , d et ℓ .
3. Démontrer l'expression de l'énergie potentielle d'un ressort de longueur à vide nulle. Quelle est alors l'énergie potentielle élastique de la fibre de verre lorsque la flèche vaut Y ?

Quand la tige en verre est écartée de sa position d'équilibre et relâchée, on observe des vibrations de celle-ci. L'extrémité de la tige vaut $Y(t)$ à l'instant t . On admet que lors des vibrations de la fibre, l'énergie cinétique de la fibre de verre est donnée par l'expression $E_c = \rho l d^2 \left(\frac{dY}{dt} \right)^2$.

4. Déterminer l'expression de la fréquence de vibration f_0 d'une telle tige de verre.

3.4 Potentiel de Lennard-Jones

On peut obtenir une expression assez simple de l'énergie potentielle associée à l'influence d'un atome sur un deuxième atome éloigné d'une distance r :

$$E_p(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

où A et B sont des constantes positives.

1. Tracer l'allure de l'énergie potentielle. Discuter qualitativement de ses limites.
2. Donner la ou les positions d'équilibre ainsi que leur stabilité.
3. Discuter du mouvement possible selon l'énergie mécanique du deuxième atome.
4. Calculer l'expression de la force subie par le deuxième atome. Cette force est-elle attractive, répulsive ? Faire le lien avec la question précédente.

3.5 Puits double

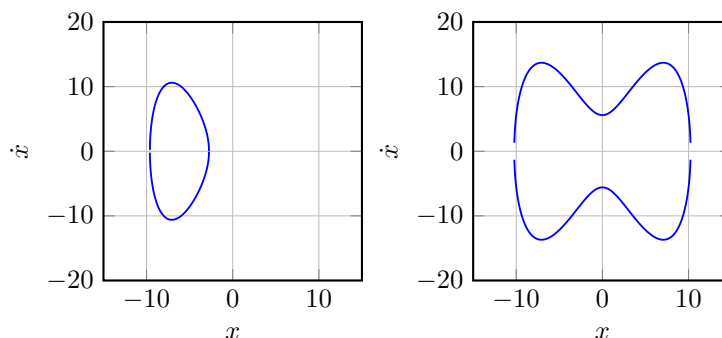
On considère un point matériel M ne pouvant se déplacer que suivant un axe (Ox) plongé dans le champ d'énergie potentielle suivante :

$$E_p(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad (3.33)$$

où x est l'abscisse réduite de M (sans dimension).

1. Tracer le graphe d'énergie potentielle pour $a = 1$, $b = -100$ et $c = 1000$.
2. Existe-t-il des positions d'équilibre ? Si oui, discuter leurs stabilités.
3. Le point M se trouve initialement en $x = -7,07$. Quelle vitesse initiale faut-il communiquer à M pour qu'il puisse explorer le puits droit ? Les frottements sont supposés très faibles.

4. En faisant le lien avec le graphe d'énergie potentielle, interpréter les portraits de phase suivants :



5. Tracer l'allure du portrait de phase pour une énergie mécanique initiale importante, mais en prenant en compte de la dissipation d'énergie.

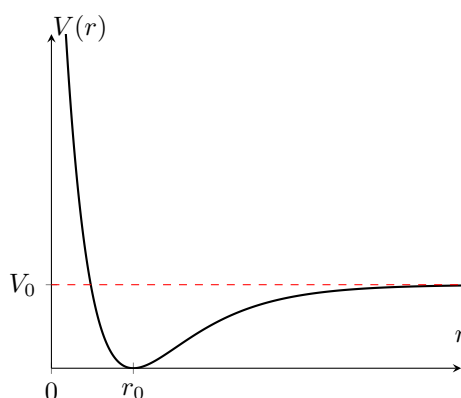
3.6 Vibrations de la molécule de monoxyde de carbone

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses ponctuelles m_1 pour l'atome de carbone et m_2 pour celui d'oxygène. Pour simplifier, on considère que l'atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long de l'axe (Ox). L'attraction gravitationnelle est négligeable à cette échelle. L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique :

$$V(r) = V_0 \left(1 - e^{-\beta(r-r_0)}\right)^2 \quad (3.34)$$

où r est la distance des noyaux des deux atomes et V_0 , r_0 et β des constantes positives.

1. Tracer l'allure de la courbe, en faisant apparaître V_0 et r_0 . Quelle est la dimension de β ?
2. Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à V_0 .
3. En effectuant un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle d'interaction au voisinage de r_0 , montrer qu'il existe un domaine de distance où l'interaction entre les deux atomes peut être modélisée par une force de rappel élastique de raideur k dont on donnera l'expression.
4. En déduire la fréquence des petites oscillations de la molécules de monoxyde de carbone autour de sa position d'équilibre.
5. Que représentent physiquement ces constantes ? Que se passe-t-il si on communique à la molécule une énergie telle que $E_m > V_0$?



1. Allure de la courbe ci-dessus. La dimension de β est l'inverse d'une longueur, comme l'argument de la fonction exponentielle est sans dimension.
2. Si son énergie mécanique est inférieure à V_0 , on a donc un état lié, avec un mouvement oscillatoire : les atomes vibrent au niveau de la liaison en se rapprochant et s'éloignant périodiquement.

3. On se sert du fait que $e^x \simeq 1 + x$ pour $x \ll 1$. On fait donc l'hypothèse que r est suffisamment proche de r_0 pour que $r - r_0 \ll \frac{1}{\beta}$ donc $e^{-\beta(r-r_0)} \simeq 1 - \beta(r - r_0)$. Ainsi en développant l'expression de l'énergie potentielle d'interaction :

$$V(r) \simeq V_0 (1 - 1 + \beta(r - r_0))^2 = V_0 \beta^2 (r - r_0)^2 = \frac{k}{2} (r - r_0)^2 \quad (3.35)$$

Cette énergie potentielle est donc de la forme de celle associée à une force de rappel élastique de raideur k à condition de poser $k = 2V_0\beta^2$.

4. Ainsi en utilisant l'approximation harmonique, en considérant le problème conservatif, on se sert de $\frac{dE_m}{dt} = 0$ donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{k}{2} (r - r_0)^2 \right) = 0 \iff m \dot{r} \ddot{r} + k (r - r_0) \dot{r} = 0 \quad (3.36)$$

D'où l'équation d'un oscillateur harmonique $\ddot{r} + \omega_0^2 r = 0$ de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La fréquence des petites oscillations

est donc $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2V_0\beta^2}{m}}$.

5. V_0 correspond à l'énergie de dissociation de la molécule : si on part du minimum d'énergie potentielle, l'énergie mécanique minimale à apporter pour obtenir un état de diffusion (et donc que les atomes se séparent) est bien V_0 . Concernant r_0 , cela correspond à la position du minimum d'énergie potentielle, donc la position d'équilibre stable : c'est donc la longueur de la liaison.