

Loi du moment cinétique et mouvements dans un champ de force centrale conservatif

Sommaire

5.1 Théorème du moment cinétique	3
5.1.1 Moment cinétique d'un point matériel	3
5.1.2 Moment d'une force	5
5.1.3 Loi du moment cinétique	6
5.1.4 Application au pendule simple	7
5.2 Généralités sur les mouvements dans un champ de force centrale conservatif	8
5.2.1 Champ de force centrale	8
5.2.2 Caractéristiques du mouvement	8
5.2.3 Énergie potentielle effective et étude des trajectoires	10
5.3 Cas du champ gravitationnel	11
5.3.1 Référentiels classiques en mécanique céleste	11
5.3.2 Quelques données astronomiques	13
5.3.3 Lois de Képler	14
5.3.4 Cas du mouvement circulaire	14
5.3.5 Cas des satellites	15

Questions de cours :

- Moment cinétique d'un point matériel : définition mathématique, sens physique, conséquences. Calcul dans le cas d'un mouvement circulaire.
- Moment de force : définition mathématique, sens physique, notion de bras de levier et moment scalaire.
- Loi du moment cinétique pour un point matériel : énoncé, cas de conservation du moment cinétique et application au pendule simple.
- Mouvement à champ de force centrale : propriété de la force, moment cinétique et justification que le mouvement est plan.
- Démontrer la loi des aires et l'interpréter sur l'exemple d'un mouvement elliptique.
- Dans le cas d'un champ de force newtonien d'énergie potentielle $E_p = -\frac{K}{r}$, montrer l'expression de l'énergie potentielle effective et caractériser les différents types de mouvements dans le cas d'une interaction purement attractive.
- Étudier le mouvement circulaire dans le cadre d'une interaction gravitationnelle : vitesse, période et énergie mécanique.
- Cas du satellite géostationnaire : conditions à respecter et démonstration de la hauteur d'un satellite géostationnaire autour de la Terre. On donne $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg et $R_T = 6400$ km.

Capacités exigibles du BO :

- Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
- Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
- Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
- Identifier les cas de conservation du moment cinétique.
- Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique.
- Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
- Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement.
- Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.
- Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective.
- Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.
- Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.
- Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
- Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période.
- Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.

- Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.
- Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.
- Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions.
- Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

Expériences :

- Vidéo de conservation du moment cinétique sur une chaise tournantes avec haltères <https://www.youtube.com/watch?v=G6XSK>
- Expérience avec un stylo et une porte

Pour un point matériel, l'approche étudiée au chapitre M2 suffit à décrire complètement le système, via une équation vectorielle (et donc trois équations scalaires) permettant de décrire complètement les trois degrés de liberté de ce point. On peut avoir une approche assez similaire, toujours pour un point matériel, avec une équation vectorielle reliée à des mouvements de rotation. Cela sera l'occasion d'introduire de nouvelles grandeurs cinématiques (moment cinétique), et dynamique (moment de force) et voir comment les relier. Cette base théorique permettra ensuite de mettre en lumière le cas des forces centrales et les conséquences pour le mouvement de planètes, satellites ou comètes.

I. Théorème du moment cinétique

I.1 Moment cinétique d'un point matériel

a) Définition

Définition

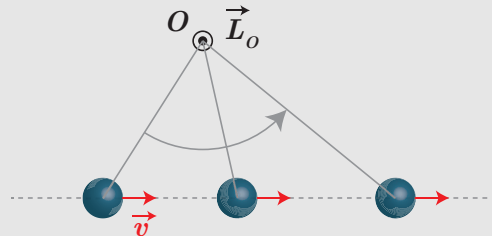
Le moment cinétique d'un point matériel M animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen est défini par le produit vectoriel

$$* \quad \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \quad (5.1)$$

exprimé en $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ou J.s. Il s'agit de l'analogue de la quantité de mouvement d'un point matériel, lors de l'étude des rotations autour de points ou d'axes fixes.

Ce vecteur **caractérise la rotation apparente du point matériel autour d'un point O que l'on se fixe.**

Le moment cinétique n'est pas uniquement lié à des trajectoires circulaires. Par exemple, pour un mouvement de translation :



Le moment cinétique donne bien l'information de "rotation" autour du point O , avec son sens de rotation.

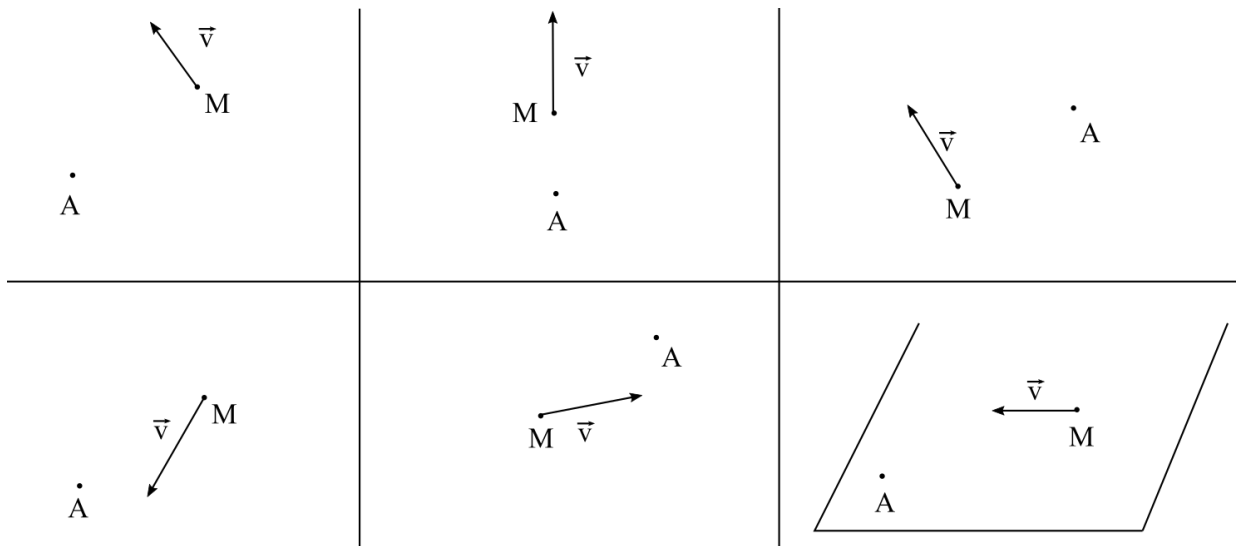
Le **sens du moment cinétique donne le sens de la "rotation" autour du point auquel on le calcule** (en utilisant la règle de la main droite, où le pouce est dans la direction de $\vec{L}$ et les doigts donnent le sens de rotation).



Le moment cinétique dépend du point où on le calcule :

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \wedge \vec{p} = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p} = \vec{L}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p} \quad (5.2)$$

Exemples : représenter qualitativement le vecteur $\vec{L}_A(M)$ dans les cas suivants :



b) Moment cinétique scalaire

On peut des fois restreindre le calcul du moment cinétique par rapport à un axe orienté, noté par la suite $(\Delta) = (O, \vec{e}_{(\Delta)})$:

Définition

On appelle **moment cinétique scalaire** la projection sur (Δ) du moment cinétique calculé en un point A de l'axe

$$* \quad L_{(\Delta)} = \vec{L}_A \cdot \vec{e}_{(\Delta)} \quad (5.3)$$

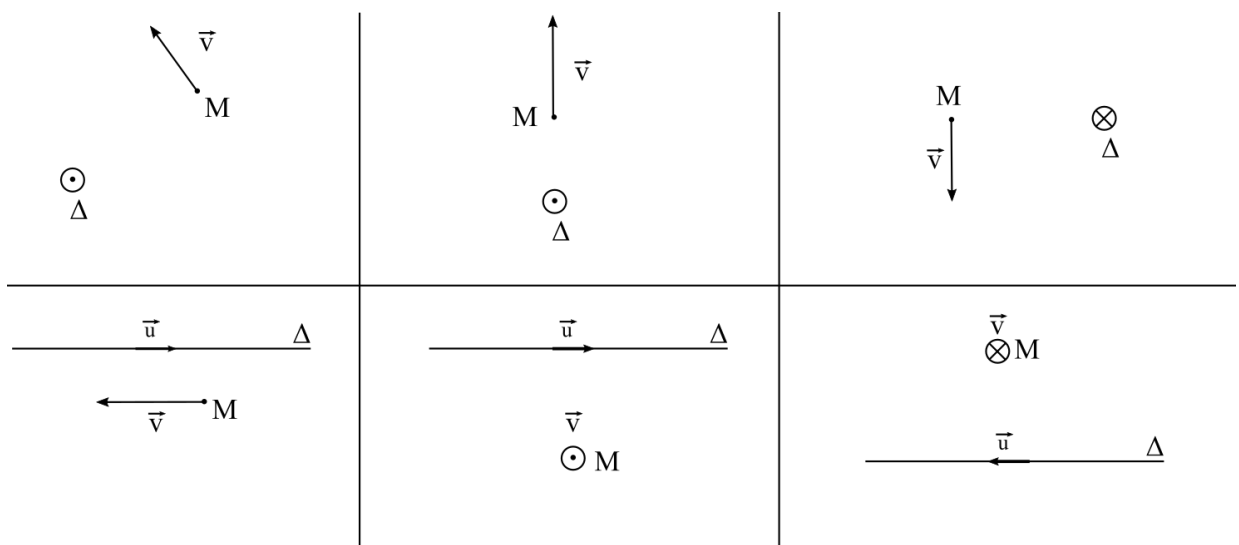
Le moment cinétique scalaire est **indépendant du point de l'axe où l'on calcule le moment cinétique**.



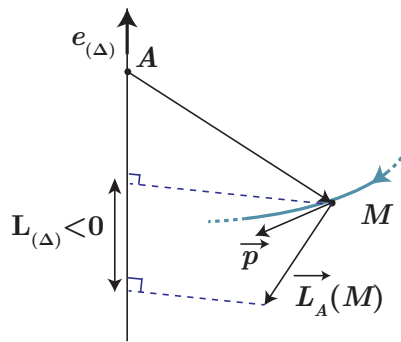
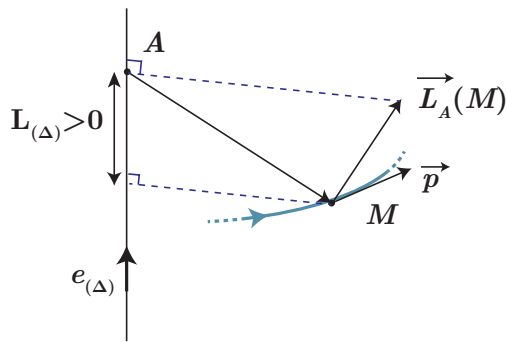
Démonstration

Démontrons cette dernière affirmation, en considérant deux points A et B appartenant à (Δ) . Avec $\vec{L}_A = \vec{L}_B + \vec{AB} \wedge \vec{p}$, $\vec{L}_A \cdot \vec{e}_{(\Delta)} = \vec{L}_B \cdot \vec{e}_{(\Delta)} + \vec{AB} \wedge \vec{p} \cdot \vec{e}_{(\Delta)} = \vec{L}_B \cdot \vec{e}_{(\Delta)}$ car $\vec{AB}$ est parallèle à $\vec{e}_{(\Delta)}$.

Application : préciser dans chaque cas, si $L_{\Delta}(M)$ est positif, négatif ou nul.



Selon le signe du moment cinétique scalaire, on pourra donc connaître l'orientation de la "rotation" autour de l'axe considéré : si $L_{(\Delta)} > 0$, on a une rotation dans le sens trigonométrique autour de $\vec{e}_{(\Delta)}$, sinon dans le sens horaire, comme l'illustre la figure ci-dessous :



c) Cas d'un mouvement circulaire

Dans le cas d'un mouvement de rotation circulaire, sur un cercle de centre A et rayon r , on se repère en coordonnées cylindriques de centre A , d'axe (Oz) perpendiculaire au plan du cercle. Alors $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et

$$\vec{L}_A = \vec{AM} \wedge m\vec{v} = m(r\vec{e}_r) \wedge (r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z \quad (5.4)$$

et donc

$$L_{(Oz)} = mr^2\dot{\theta} = J_{(Oz)}\dot{\theta} \quad (5.5)$$

* où

$$J_{(Oz)} = mr^2 \quad (5.6)$$

est appelé **moment d'inertie** par rapport à l'axe (Oz) d'un point matériel de masse m distant de r de l'axe.

On constate ainsi déjà un élément important : plus la masse est importante, plus le moment cinétique sera important, mais c'est également vrai pour la distance à l'axe ou la vitesse. Retenez par exemple l'analogie avec une fronde : il va être davantage compliqué de stopper son mouvement de rotation circulaire si sa vitesse est importante, ou sa masse, ou encore le rayon de la trajectoire (et c'est le rayon qui va avoir un effet prépondérant) !

I.2 Moment d'une force

Le moment cinétique correspond à l'aspect cinématique : on constate un mouvement, mais on n'en connaît pas l'origine. On va introduire l'équivalent dynamique des forces : le **moment de force**.

a) Moment d'une force par rapport à un point

Définition

On appelle moment en O d'une force $\vec{F}$ appliquée au point matériel M la quantité

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} \quad (5.7)$$

*

- Sa dimension est une énergie, s'exprimant en joule ou plus couramment en $N \cdot m$;
- il s'agit d'une grandeur additive, le moment d'une somme de forces est la somme des moments de chacune des forces.

On introduit la notion de **droite d'action** pour la force comme étant la droite $(M, \vec{F})$ (il est souvent nécessaire de prolonger cette droite). Deux conséquences :

- si le point O appartient à la droite d'action, le moment est nul : vu depuis le point O la force ne fait pas tourner M ;
- si ce n'est pas le cas, cela va traduire la modification du mouvement de rotation du point M autour du point O du fait de la force.

b) Moment d'une force par rapport à un axe orienté

À l'instar du moment cinétique, on peut également se restreindre au calcul du moment d'une force par rapport à un axe orienté $(\Delta) = (O, \vec{e}_{(\Delta)})$:

$$\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}) = \vec{M}_{(O)}(\vec{F}) \cdot \vec{e}_{(\Delta)} \quad (5.8)$$

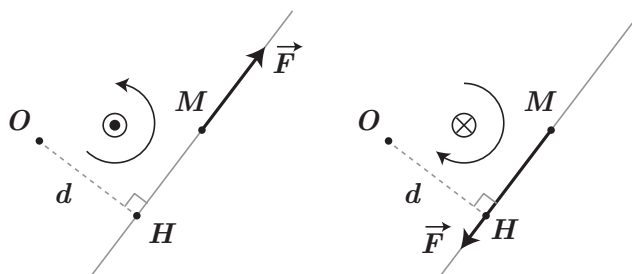
grandeur algébrique dont le signe renseigne sur le sens de la rotation.

c) Bras de levier

On peut très facilement calculer le moment de force à l'aide du **bras de levier** correspondant à la distance du point O à la droite d'action de $\vec{F}$:

$$* \quad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{OH} \wedge \vec{F} + \vec{HM} \wedge \vec{F} = \vec{OH} \wedge \vec{F} \quad (5.9)$$

et dont la norme est simplement $\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})\| = dF$ avec $d = \|\vec{OH}\|$ le bras de levier. La direction est perpendiculaire au plan $(O, M, \vec{F})$ et le sens est déterminé avec la règle de la main droite.



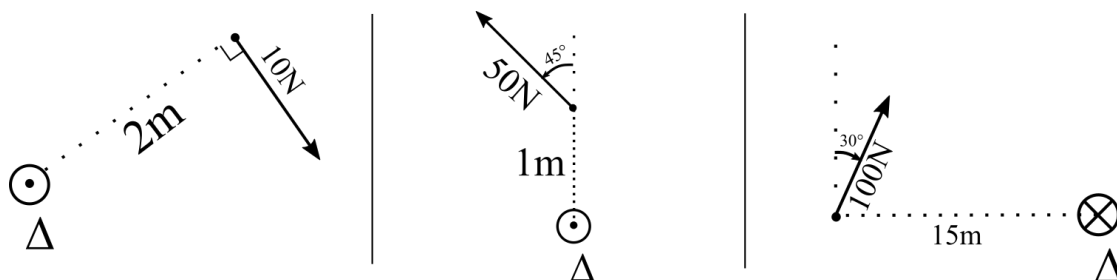
Exemple de l'ouverture de la porte : la poignée est placée de manière à être la plus éloignée de l'axe de rotation, afin que le bras de levier soit le plus important, et donc le moment est plus important, à force d'intensité égale.

On peut faire de même pour le moment de force par rapport à un axe : il est calculable lui-aussi à l'aide du bras de levier d (qui est alors la distance entre la droite d'action et (Δ)) et vaut donc

$$\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}) = \pm dF \quad (5.10)$$

où le signe se détermine à l'aide de la règle de la main droite.

Application : déterminer par la méthode du bras de levier le moment sur l'axe Δ des forces suivantes :



I.3 Loi du moment cinétique

a) Énoncé

À l'instar de la quantité de mouvement qui est reliée dans la LQM à la somme des forces, on peut relier le moment cinétique au moment des forces s'exerçant sur un point matériel :

Loi du moment cinétique pour un point matériel

* Pour un point matériel M de masse m , dont l'étude est réalisée dans un référentiel galiléen et soumis à un ensemble de forces $\{\vec{F}_i\}$, le moment cinétique par rapport au point O vérifie :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) \quad (5.11)$$



Démonstration

Démontrons-le à partir de la loi de la quantité de mouvement appliquée à ce même système :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_i \quad (5.12)$$

*

soit, avec $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{0}$, $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$ et donc

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) \quad (5.13)$$

b) Conservation du moment cinétique

Lorsque le moment cinétique est constant, la loi du moment cinétique permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\sum_i \vec{F}_i) = \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

En considérant que $M \neq O$, le moment cinétique se conserve dans plusieurs cas de figure :

- soit $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ auquel cas on a absence de mouvement ($\vec{L}_O = \vec{0}$) ou un mouvement rectiligne uniforme ($\vec{L}_O = \text{cste}$) ou encore un mouvement circulaire uniforme (cf. plus loin) ;
- soit la résultante est non nulle, mais passe constamment par le point O : on dit alors que M est soumis à une **force centrale** de centre O , cas étudié dans la suite.

c) Loi du moment cinétique par rapport à un axe fixe

Dans certains cas où le point matériel tourne autour d'un axe fixe, il peut être judicieux de ne calculer que le moment cinétique scalaire et les moments scalaires des forces, reliés simplement par :

$$\frac{dL_{(\Delta)}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_i) \quad (5.14)$$

venant de la projection selon $\vec{e}_{(\Delta)}$ (vecteur constant) de la loi du moment cinétique.

I.4 Application au pendule simple

Prenons le cas du pendule simple, constitué d'un fil souple de masse nulle et de longueur ℓ , accroché à un point fixe O . On accroche à l'autre extrémité une masse m , considérée comme un point matériel M et l'on cherche à déterminer l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation sur l'angle θ . On se place en coordonnées polaires, l'axe (Oz) correspondant par exemple à l'axe de rotation.



Exercice

Calculer le moment cinétique au point O pour la masse.

Moment cinétique : $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{e}_r \wedge m\ell^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta = m\ell^2\dot{\theta}\vec{e}_z$.



Exercice

Calculer le moment de chaque force s'exerçant sur la masse.

Deux forces s'exercent sur la masse :

- la tension du fil, $\vec{T} = -T\vec{e}_r$, d'où $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = r\vec{e}_r \wedge -T\vec{e}_r = \vec{0}$; le moment de cette force est donc nul ;
- le poids, $\vec{P} = -mg\vec{e}_y = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$, donc

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = r\vec{e}_r \wedge mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) = -mg\ell\sin\theta\vec{e}_z \quad (5.15)$$

Si $\theta > 0$, la force va induire une rotation dans le sens horaire, donc le signe négatif est cohérent.

L'application de la loi du moment cinétique permet donc d'écrire :

$$\frac{d m \ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z}{dt} = -m g \ell \sin \theta \vec{e}_z \quad (5.16)$$

* soit en projection selon $\vec{e}_z$:

$$m \ell^2 \ddot{\theta} = -m g \ell \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (5.17)$$

correspondant à l'équation du mouvement du pendule simple. S'en suivent alors les mêmes raisonnements que d'habitude.

L'application de la loi du moment cinétique scalaire permet d'écrire la même chose, sans avoir à projeter selon $\vec{e}_z$:



Exercice

À l'aide de la notion de bras de levier, calculer le moment scalaire associé au poids par rapport à l'axe (Oz) .

Le bras de levier vaut $\ell \sin \theta$, soit $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = \pm m g \ell \sin \theta$ et le raisonnement sur $\theta > 0$ conduit à une rotation dans le sens horaire autour de $\vec{e}_z$ donc $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = -m g \ell \sin \theta$

* Ainsi, avec $L_{(Oz)} = m r^2 \dot{\theta}$

$$\frac{d m \ell^2 \dot{\theta}}{dt} = -m g \ell \sin \theta \Rightarrow m \ell^2 \ddot{\theta} = -m g \ell \sin \theta \quad (5.18)$$

II. Généralités sur les mouvements dans un champ de force centrale conservatif

II.1 Champ de force centrale

Définition

* On dit d'une force qu'elle est centrale de centre O si quelle que soit la position du point M dans l'espace, la droite d'action de la force en M passe constamment par O . Les coordonnées sphériques étant adaptées, on aura ainsi

$$\vec{F}(M) = f_r(r) \vec{e}_r \quad (5.19)$$

en supposant une invariance de la situation physique par rotation d'angle θ ou φ .

Si elle est de plus conservative, on peut définir une énergie potentielle ne dépendant que de r vérifiant $\frac{dE_p}{dr} = -f_r(r)$.

Rappelons deux forces parmi les plus courantes :

- la force gravitationnelle attractive exercée par la masse m_1 fixe située en O sur une masse m_2 située en M vérifiant $\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques, dérivant de l'énergie potentielle $E_p(r) = \frac{-\mathcal{G} m_1 m_2}{r}$;
- la force coulombienne attractive ou répulsive exercée par une charge fixe q_1 située en O sur une charge q_2 située en M vérifiant $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques, dérivant de l'énergie potentielle $E_p(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$

* On parle de **forces newtoniennes**, car elles se mettent sous la forme $\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ avec $E_p(r) = -\frac{K}{r}$.

II.2 Caractéristiques du mouvement

a) Conservation du moment cinétique et conséquences

i) Le moment cinétique se conserve

Si un point matériel n'est soumis qu'à une force centrale de centre O , le moment cinétique est une constante du mouvement :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad (5.20)$$

* car $\vec{OM}$ est colinéaire à $\vec{F}$. Ainsi l'application de la loi du moment cinétique au point M dans un référentiel galiléen conduit à

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{0} \iff \vec{L}_O(M) = \text{cste} \quad (5.21)$$

ii) Le mouvement est plan

Notons $\vec{OM}_0$ le vecteur position initial, $\vec{v}_0$ la vitesse en ce point, alors le plan $(\mathcal{P})$ défini par $(O, \vec{OM}_0, \vec{v}_0)$ est perpendiculaire à $\vec{L}_O(M_0)$, par définition du moment cinétique.

Pour toute position ultérieure M du point matériel, $\vec{L}_O(M) = \vec{L}_O(M_0)$ vu que le vecteur est constant au cours du temps. Donc $\vec{OM}$ est par définition du moment cinétique perpendiculaire à $\vec{L}_O(M_0)$ et donc contenu dans le plan $(\mathcal{P})$: le **mouvement est plan**.

On peut donc utiliser les coordonnées polaires de centre O , et réécrire le moment cinétique :

$$\vec{L}_O(M) = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z \quad (5.22)$$

iii) Loi des aires

Comme le moment cinétique ainsi que la masse sont constants, on introduit une constante :

Constante des aires

La **constante des aires** C est définie par

$$* \quad C = \frac{\|\vec{L}_O\|}{m} = r^2\dot{\theta} = \text{cste} \quad (5.23)$$

Cela signifie que pour un mouvement à force centrale, distance et vitesse angulaire sont toujours reliés à cette constante (dépendant des conditions initiales).

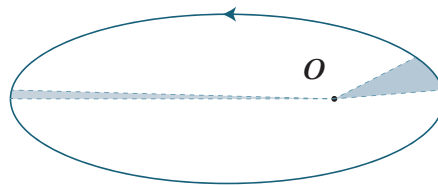
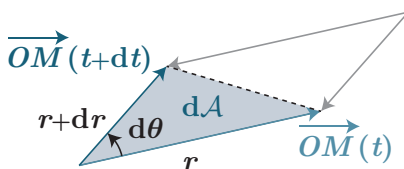
On va en donner une interprétation en calculant la **vitesse aréolaire**, correspondant à la vitesse $\mathcal{V}$ à laquelle le vecteur position balaye une aire dA pendant dt , soit $\mathcal{V} = \frac{dA}{dt}$:

Démonstration

En se plaçant sur un intervalle de temps dt , l'aire balayée correspond à la moitié du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{OM}(t)$ et $\vec{OM}(t+dt)$, soit $dA = \frac{1}{2} \|\vec{OM}(t) \wedge \vec{OM}(t+dt)\|$. En posant $\vec{OM}(t+dt) = \vec{OM}(t) + d\vec{r}$, avec $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta$:

$$dA = \frac{1}{2} \|(r\vec{e}_r) \wedge (r\vec{e}_r + dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta)\| = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (5.24)$$

* Ainsi $\mathcal{V} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} C$. Cette vitesse est donc une constante.



Loi des aires

L'aire balayée par le vecteur position est la même au cours du temps pour un mouvement à force centrale conservatif :

$$\mathcal{V} = \frac{C}{2} \quad (5.25)$$

avec C la constante des aires.

- * Une conséquence est illustrée sur une trajectoire elliptique ci-dessus : on peut estimer que la vitesse proche du point O est plus élevée que celle à l'opposée car la distance à parcourir pendant le même temps est plus grande.

II.3 Énergie potentielle effective et étude des trajectoires

a) Énergie potentielle effective

Le système étudié, soumis à une force centrale conservative, est donc par nature conservatif, c'est-à-dire que l'énergie mécanique est conservée. Exprimons-la pour n'importe quelle position, dans le cas d'un champ newtonien d'énergie potentielle $E_p(r) = -\frac{K}{r}$:

*
$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{K}{r} \quad (5.26)$$

L'énergie mécanique dépend de deux variables r et θ , cependant on peut se ramener à la seule variable r via la constante des aires : $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$.

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{C}{r^2}\right)^2 - \frac{K}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r}\right) \quad (5.27)$$

où l'on introduit une **énergie potentielle effective** $E_{p,\text{eff}}$ vérifiant

*
$$E_{p,\text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r} \quad (5.28)$$

prenant en compte l'énergie cinétique de rotation et l'énergie potentielle associée à la force conservative, et ne dépendant que de la position radiale : on peut alors conduire des raisonnements graphiques.

b) Différents types de mouvements

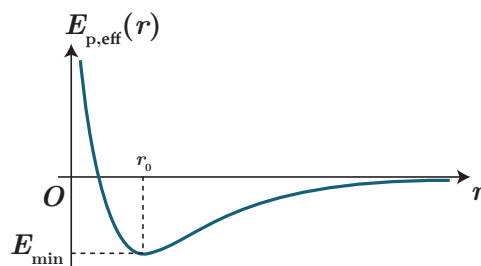
On va se concentrer dans un premier temps sur le cas de l'attraction gravitationnelle, car il s'agit d'une force exclusivement attractive, avec $K > 0$.

Les interactions coulombiennes pouvant être répulsives, on peut avoir $K < 0$



Exercice

Déterminer l'allure du graphe d'énergie potentielle effective ainsi que la position du minimum d'énergie potentielle effective r_0 , et l'énergie minimale associée $E_{\min}$. Traçons l'énergie potentielle effective en fonction de r :



Elle possède un minimum en $r = r_0$ tel que :

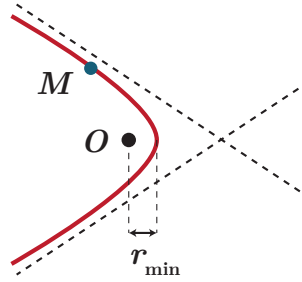
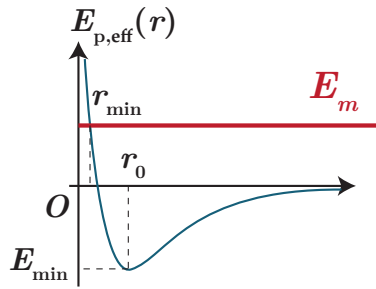
$$\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr}(r = r_0) = 0 = -m\frac{C^2}{r_0^3} + \frac{K}{r_0^2} = 0 \Leftrightarrow r_0 = \frac{mC^2}{K} \quad (5.29)$$

où l'énergie potentielle vaut alors

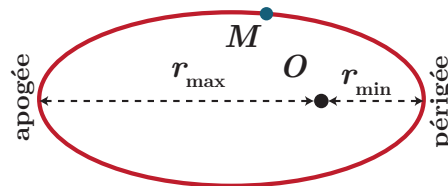
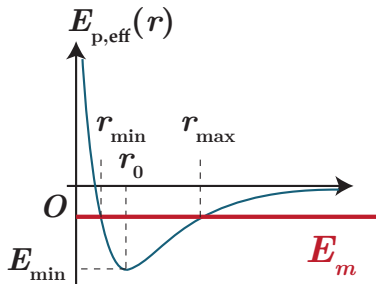
$$E_{\min} = \frac{K}{r_0} \left(\frac{mC^2}{2Kr_0} - 1 \right) = \boxed{-\frac{K}{2r_0}} = -\frac{K^2}{2mC^2} \quad (5.30)$$

On distingue alors plusieurs trajectoires possibles selon la valeur de l'énergie mécanique :

- si $E_m > 0$ (typiquement le cas pour des astéroïdes ou des comètes), on a un état de diffusion, caractérisé par une **trajectoire hyperbolique** dont O est le foyer le plus proche de la courbe et dont l'énergie mécanique permet de connaître la distance minimale d'approche ;

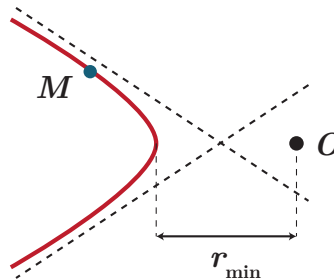
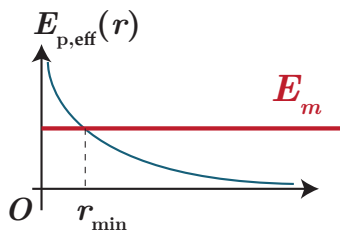


- si $E_m = 0$, on a également un état de diffusion, et une **trajectoire parabolique** (cas limite) ;
- si $E_{\min} < E_m < 0$, on a une **trajectoire elliptique**, et on obtient également à l'aide de l'intersection $E_m = E_{p,eff}$ la distance minimale $r_{\min}$ (périgée) et maximale $r_{\max}$ (apogée) du point matériel par rapport au centre de force, et on note $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$ le **demi-grand axe** de l'ellipse. On définit l'excentricité de l'ellipse comme étant le rapport $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ (et vaut 0 pour un cercle).



- si enfin $E_m = E_{\min}$, une seule valeur de r est possible, r_0 , correspondant au cas d'une **trajectoire circulaire**. En effet, cela impose $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = 0$, c'est-à-dire $\dot{r} = 0$ et donc un mouvement circulaire uniforme étant donné que $r^2\dot{\theta} = \text{cste}$.

Dans le cas d'interactions répulsives, la courbe d'énergie potentielle effective ne passe jamais par un minimum, elle est monotone décroissante. Le système se trouve constamment dans un état de diffusion, donc la trajectoire est une branche d'hyperbole dont le centre de force occupe le foyer le plus éloigné



Pour être parfaitement précis, le système étudié exerce également une force sur la masse centrée en O , et en réalité les deux objets sont en rotation, autour du barycentre des masses. En général, vu le rapport de masse, on peut confondre le barycentre avec O , mais ce n'est pas toujours vrai.

Imaginez un électron s'approchant d'un autre, il ne va pas lui tourner autour ! Donc il passe au plus loin

III. Cas du champ gravitationnel

Dans la suite, on va s'intéresser exclusivement au champ gravitationnel, et étudier plus particulièrement le mouvement circulaire : on peut très souvent approximer la trajectoire à un cercle dès lors qu'on étudie des exemples simples comme un satellite autour d'une planète.

III.1 Référentiels classiques en mécanique céleste

Pour décrire les mouvements au sein du système solaire, il y a trois référentiels à savoir définir parfaitement.

a) Le référentiel de Copernic

Définition

Le **référentiel de Copernic** $\mathcal{R}_C$ est défini comme le référentiel qui a pour point de référence le centre d'inertie du système solaire, et dont les axes pointent vers trois étoiles suffisamment lointaines pour être considérées comme fixes.

On peut également définir le **référentiel héliocentrique**, qui a pour point de référence le centre d'inertie du Soleil. À l'échelle du système solaire, le centre d'inertie du Soleil et celui du système solaire sont pratiquement confondus, donc on pourra en pratique confondre le référentiel de Copernic et le référentiel héliocentrique.

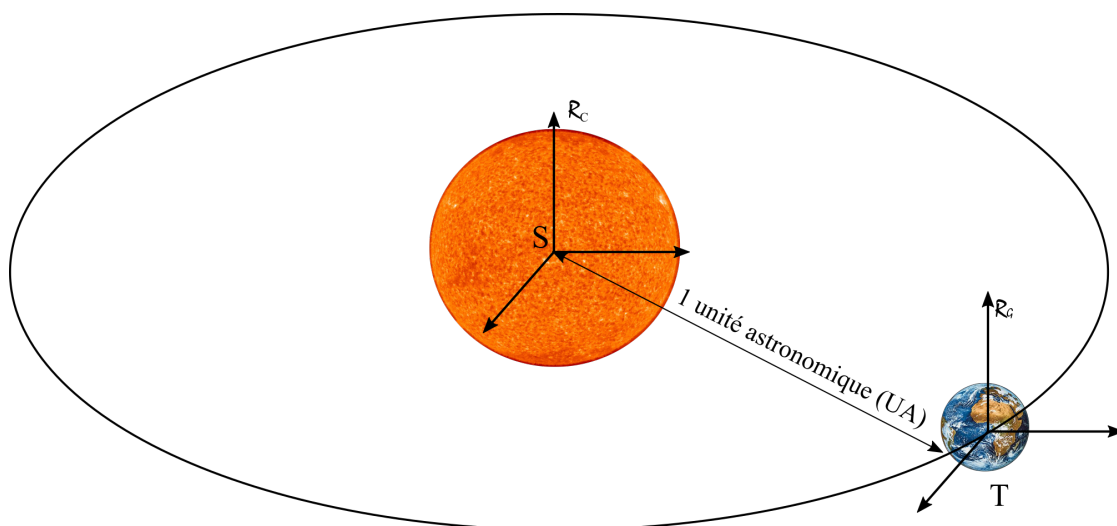
Le référentiel de Copernic est toujours considéré comme **galiléen** pour les expériences de physique classique. Cela tient au fait que le système solaire peut être considéré comme un système isolé.

b) Le référentiel géocentrique

Définition

Le **référentiel géocentrique** $\mathcal{R}_G$ est défini comme le référentiel qui a pour point de référence le centre d'inertie de la Terre, et dont les axes pointent vers trois étoiles suffisamment lointaines pour être considérées comme fixes.

Ce référentiel sera considéré comme galiléen, sauf exceptions très peu nombreuses. En particulier, le phénomène des marées océaniques est lié au caractère non galiléen du référentiel géocentrique.



Mouvement relatif de $\mathcal{R}_G$ par rapport à $\mathcal{R}_C$

Le référentiel géocentrique possède un mouvement de **translation circulaire** par rapport au référentiel de Copernic. Le rayon de ce (quasi-)cercle est par définition une **unité astronomique** ($1\text{UA}=150\cdot 10^6\text{ km}$).

La période de révolution de la Terre dans le référentiel de Copernic est environ de 365,25j, nommée **année sidérale**.

Est-il besoin de rappeler que ces $\approx 0,25$ jours imposent l'utilisation d'années bissextiles presque une fois tous les 4 ans ?

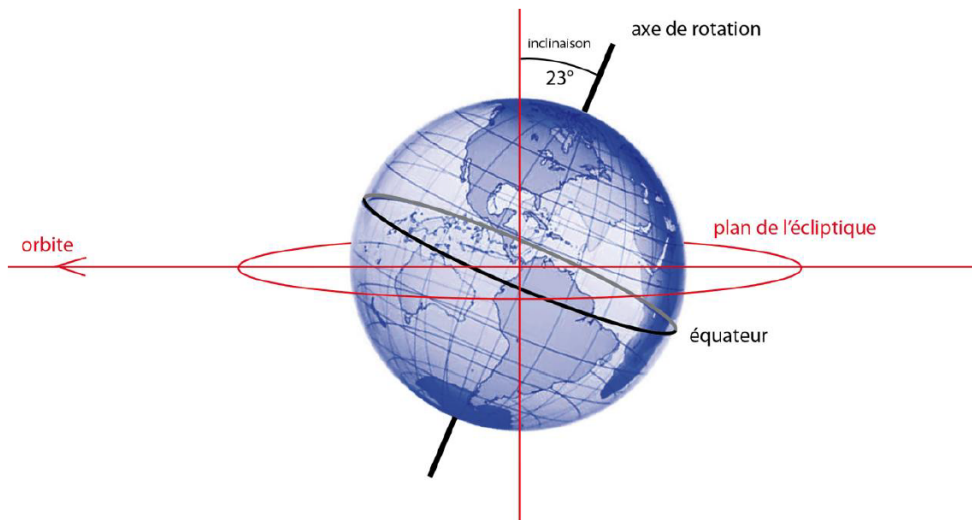
c) Le référentiel terrestre

Définition

Le **référentiel terrestre** $\mathcal{R}_T$ est lié à la Terre considérée comme une sphère solide.

En particulier, tout point fixe par rapport à la surface de la Terre est fixe dans ce référentiel.

Le référentiel terrestre est le référentiel choisi usuellement pour la description d'un mouvement d'un observateur fixe à la surface de la Terre. Il sera considéré comme galiléen, sauf pour des expériences de longue durée (**pendule de Foucault** par exemple) ou de grandes dimensions. (le mouvement d'enroulement des masses d'air autour des dépressions et des anti-cyclones n'est explicable qu'en prenant en compte le caractère **non-galiléen** du référentiel terrestre).



Mouvement de $\mathcal{R}_T$ par rapport à $\mathcal{R}_G$

Le référentiel terrestre possède un mouvement de **rotation** par rapport au référentiel géocentrique.

La **période de rotation** de la Terre sur elle-même est de **un jour sidéral** et vaut $T = 86164s \simeq 23h56min$.

Il faut ainsi noter qu'il existe une différence entre le jour solaire (24 heures, par définition) et le jour sidéral, durée nécessaire à ce que la Terre fasse un tour sur elle-même dans le référentiel géocentrique.

III.2 Quelques données astronomiques

Les valeurs **en gras** sont à connaître **par cœur**. Les données indiquées sont des valeurs approchées à deux chiffres significatifs se basant sur des modèles simplifiés, des valeurs plus précises peuvent être trouvées dans un Handbook par exemple, ou sur Internet.

a) Système solaire

Pour une révision rapide de la composition du système Solaire, on peut se reporter à cette vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=libKVRa01L8>

Masse du Soleil	$M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Masse des planètes composant le système solaire	$2,7 \cdot 10^{27} \text{ kg} = 0,13\% M_S$
Distance Terre/Soleil	$1 \text{ UA} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Rayon du Soleil	$7 \cdot 10^8 \text{ m}$
Nombre de planètes principales du système solaire	8

b) Terre

Rayon de la Terre à l'équateur	$R_t = 6400 \text{ km}$
Masse de la Terre	$6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg} = 0,0003\% M_S$
Âge de la Terre	$4,5 \cdot 10^9 \text{ an}$
Période de révolution autour du Soleil	$T \simeq 365,25 \text{ j}$
Période rotation sidérale	$T_{sid} \simeq 23h56min$
Vitesse angulaire de rotation propre	$\Omega_{sid} = \frac{2\pi}{T_{sid}} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
Accélération moyenne de la pesanteur à la surface de la Terre	$g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Proportion de la surface terrestre recouverte par de l'eau liquide	71%

La Terre décrit en réalité une ellipse autour du Soleil, mais d'excentricité très faible ($e=0,017$) : c'est pratiquement un cercle. Il est amusant de constater que la Terre est à son périhélie le 2 janvier, et à son aphélie le 4 juillet... contrairement à ce qu'une mauvaise intuition pourrait suggérer¹.

III.3 Lois de Képler

Au début du XVII^e siècle, Kepler énonça, à partir d'observations astronomiques, trois lois portant son nom et régissant le mouvement des planètes autour du Soleil :

Lois de Képler

- Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont un foyer est occupé par le Soleil ;
- l'aire balayée par le segment liant le centre du Soleil au centre d'une planète pendant une durée donnée est constante (loi des aires) ;
- la période de révolution T d'une planète autour du Soleil de masse M_S est liée au demi-grand axe a de sa trajectoire elliptique par

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \quad (5.31)$$

Les deux premières lois sont liées directement aux propriétés vues précédemment, on peut également en conclure que l'énergie mécanique d'une planète n'est donc pas égale à l'énergie potentielle effective minimale, vu que la trajectoire est elliptique.

À noter également que ces lois sont transposables à un satellite en rotation autour d'une planète, en considérant que la planète est un des foyers de l'ellipse, et en remplaçant M_S par la masse de la planète.

III.4 Cas du mouvement circulaire

a) Vitesse et période

Dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon $r = r_0$, il est nécessairement uniforme via $r_0^2 \dot{\theta} = \text{cte}$. Ainsi

$$\vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{v^2}{r_0} \vec{e}_r \quad (5.32)$$

puis en appliquant la loi de la quantité de mouvement au système de masse M en rotation autour d'un astre de masse M_A situé en O :

$$* \quad M \vec{a} = -\frac{GM_A M}{r_0^2} \vec{e}_r \quad (5.33)$$

soit en projection selon $\vec{e}_r$

$$-M \frac{v^2}{r_0} = -\frac{GM_A M}{r_0^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_A}{r_0}} \quad (5.34)$$

On peut alors en déduire la période de révolution :

$$* \quad T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{\frac{GM_A}{r_0}}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r_0^3}{GM_A} \quad (5.35)$$

conduisant à la troisième loi de Kepler

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_A} \quad (5.36)$$

De manière générale, cette loi reste valable même avec une trajectoire elliptique, à ceci près qu'il faut remplacer le rayon r_0 par le demi-grand axe a .

1. Du reste, ce fait ne paraît contre-intuitif qu'aux habitants de l'hémisphère Nord !

b) Aspects énergétiques

On peut dans ce même cadre calculer l'énergie mécanique du système, dont on sait qu'il s'agit d'une constante.

- l'énergie cinétique vaut : $E_c = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M \frac{GM_A}{r_0} = \frac{1}{2} \frac{GMM_A}{r_0}$;
- * ▪ l'énergie potentielle vaut : $E_p = -\frac{GMM_A}{r_0}$;
- l'énergie mécanique vaut alors $E_m = E_c + E_p = -\frac{GMM_A}{2r_0}$ (correspondant au minimum de la courbe d'énergie potentielle effective).

Énergie mécanique d'un satellite ou d'une planète

L'énergie mécanique d'un objet de masse M en rotation circulaire uniforme de rayon r_0 autour d'un astre de masse M_A s'écrit

$$E_m = -\frac{GMM_A}{2r_0} = \text{cste} \quad (5.37)$$

* On peut généraliser aux trajectoires elliptiques :

$$E_m = -\frac{GMM_A}{2a} \quad (5.38)$$

avec a le demi-grand axe.

En notant qu'à l'apogée et au périgée, $\dot{r} = 0$, on a $E_m = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMM_a}{r}$, on peut donc retrouver $r_a = r_{\max}$ et $r_p = r_{\min}$ en résolvant le polynôme :

$$E_m r^2 + GMM_A r - \frac{mC^2}{2} = 0 \quad (5.39)$$

de solution $r_{\pm} = \frac{-GMM_A \pm \sqrt{\Delta}}{2E_m}$ avec $\Delta = (GMM_A)^2 + 2E_m C^2 > 0$. On a donc $r_+ = r_a$ et $r_- = r_p$. Ainsi le demi-grand axe a vérifie :

$$2a = r_a + r_p = -\frac{2GMM_A}{E_m} \iff E_m = -\frac{GMM_A}{2a} \quad (5.40)$$

III.5 Cas des satellites

a) Vitesses cosmiques et différentes orbites de satellites

Les satellites sont en général lancés de sorte à suivre une **trajectoire circulaire**. Dès lors, on peut utiliser les résultats précédents pour calculer leur période, leur vitesse, dès que l'on s'est fixé un rayon pour la trajectoire autour de la planète.

Demandons-nous quelle vitesse minimale doit avoir le satellite pour qu'il puisse être en orbite circulaire au niveau du sol, appelée **première vitesse cosmique** (en réalité, du fait de l'atmosphère c'est

évidemment impossible). Il suffit que

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = 7,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$R_T = 6400 \text{ km et } M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Dans ce cadre, les satellites sont dits en **orbite basse** (jusqu'à une altitude de 2000 km) et sont utilisés principalement pour la **télécommunication** (exemple des satellites Starlink de Tesla) ou pour l'**imagerie** (renseignement, météorologie, imagerie terrestre).

À plus haute altitude, les satellites sont en **orbite moyenne** (de 2000 à 35000 km) et sont plutôt utilisés pour la **navigation** (GPS) et pour de la télécommunication.

* On parle également de **vitesse de libération** (ou **deuxième vitesse cosmique**), la vitesse nécessaire à communiquer au satellite de masse m pour qu'il s'éloigne indéfiniment de l'attraction de l'astre, toujours sans prendre en compte d'éventuels frottements : on est alors dans le cas d'un mouvement de diffusion, et l'énergie mécanique doit être au minimum nulle (cf. étude précédente à l'aide de l'énergie potentielle effective) :

$$E_m = 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM_T}{R_T} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} \simeq 40000 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \quad (5.41)$$

Dans les faits, plusieurs éléments sont à prendre en considération :

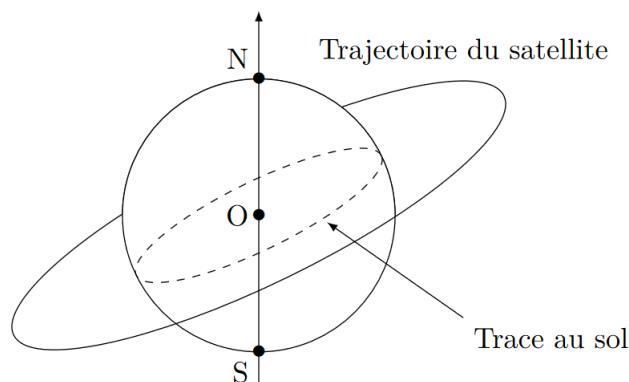
- l'accélération est en réalité progressive pour le lancement d'un satellite ;
- le satellite possède une vitesse initiale due à la rotation propre de la planète, d'autant plus importante qu'elle est éloignée de l'axe de rotation : c'est pourquoi il est préférable d'effectuer le lancement proche de l'équateur (Kourou !)

b) Cas des satellites géostationnaires

Signalons enfin le cas d'un satellite géostationnaire qui, de par sa définition, est un satellite qui est constamment au-dessus du même point de la surface terrestre, en **orbite haute** ou encore **orbite géosynchrone**. Ces satellites sont particulièrement utiles pour la **télécommunication** ou la **diffusion de télévision** (les paraboles peuvent alors pointer un point fixe dans le ciel). Certains satellites sont également utilisés pour l'observation météorologique (Meteosat pour l'Europe).

Pour ce faire, il doit réunir plusieurs conditions :

- **sa vitesse angulaire doit être identique à celle de rotation propre de la Terre**, ainsi $\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec T_{sid} la période de rotation propre de la planète, c'est-à-dire le **jour sidéral** et valant pour la Terre $T = 86168 \text{ s}$;
- **l'orbite doit être circulaire** : conséquence de la condition précédente, si la vitesse angulaire est constante, d'après la constante des aires le rayon doit rester constant !
- **sa trajectoire doit être située dans le plan de l'équateur**. En effet, on sait que le plan contenant la trajectoire passe nécessairement par le centre d'attraction de la force gravitationnelle d'une part, et d'autre part si la trajectoire était inclinée par rapport au plan de l'équateur, il oscillerait tantôt dans l'hémisphère nord, tantôt dans l'hémisphère sud et ne serait donc pas immobile :



* Cela permet ainsi de calculer le rayon de l'orbite géostationnaire, en appliquant la troisième loi de Kepler :

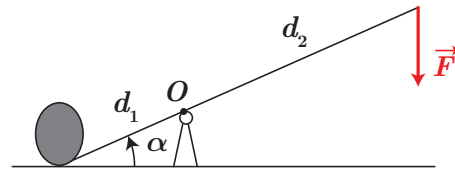
$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}} = 42164 \text{ km} \iff h = r - R_T = 35786 \text{ km} \simeq 36000 \text{ km} \quad (5.42)$$

Du fait de perturbations (attraction lunaire, pression de radiation solaires, irrégularités gravitationnelles de la Terre), ces satellites peuvent légèrement dériver : il convient donc de régulièrement corriger leur trajectoire, ce qui consomme du carburant et explique leur durée de vie limitée sur l'orbite géostationnaire.

Exercices

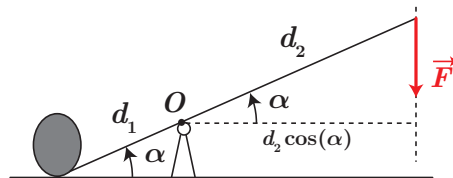
5.1 Levier

Un manutentionnaire utilise un levier afin de soulever un rocher de masse $M = 200$ kg. Les longueurs valent $d_1 = 40$ cm et $d_2 = 1,6$ m et $\alpha = 60^\circ$.



1. À quelle condition le rocher va commencer à se soulever ?
2. En déduire la norme minimale de la force verticale nécessaire pour que le rocher se soulève.
3. En faisant varier la direction de la force qu'il exerce par rapport au levier, le manutentionnaire peut être plus efficace. Expliquer comment il peut procéder et quelle force il doit exercer. Quel est le gain par rapport au cas précédent ?

1. Si on effectue un bilan de forces sur le levier, on a deux forces qui sont dirigées selon la verticale : le poids du rocher $\vec{P}$, et la force exercée par l'utilisateur $\vec{F}$. On cherche à savoir quand il est possible d'obtenir un mouvement de rotation, sachant que ces deux forces induisent un moment dans le sens opposé. Il faut donc que $\|\vec{M}_O(\vec{F})\| > \|\vec{M}_O(\vec{P})\|$ (car alors on pourra faire varier le moment cinétique du système de sorte qu'il y ait une rotation dans la direction du manutentionnaire).
2. En s'aidant de la notion de bras de levier, l'équation précédente se traduit par $d_2 \cos \alpha \|\vec{F}\| > d_1 \cos \alpha \|\vec{P}\|$



soit encore $F d_2 > M g d_1$ et donc

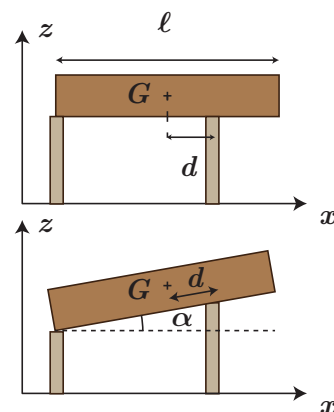
$$F > \frac{M g d_1}{d_2} = 500 \text{ N}$$

soit l'équivalent d'une masse à soulever de "seulement" 80 kg.

3. On peut faire en sorte d'augmenter le bras de levier en appliquant une force perpendiculaire au levier, ainsi la condition précédente devient $d_2 F > M g d_1 \cos \alpha$ soit $F > 250$ N !

5.2 Déménagement

Deux déménageurs portent une armoire, de hauteur $\ell = 3$ m et de masse $m = 50$ kg. L'un est à une extrémité M de la poutre, l'autre au point L à une distance $d = 0,7$ m du milieu de l'armoire. On suppose le solide homogène, pour simplifier.



1. À quelle condition un objet initialement à l'équilibre n'effectue aucun mouvement de rotation ?
2. On suppose que les déménageurs ont même taille, l'armoire est donc maintenue horizontalement. Déterminer les normes des forces $\vec{F}_M$ et $\vec{F}_L$ exercées pour la maintenir.
3. Même question si on imagine maintenant que l'un des déménageurs est plus petit, et donc l'armoire est inclinée d'un angle $\alpha = 20^\circ$.

1. On souhaite un déplacement de l'armoire sans aucun mouvement de rotation du solide (qui en général se traduirait par des dommages collatéraux). Par conséquent, il suffit que $\frac{dL(\Delta)}{dt} = 0$ si on considère une rotation possible autour

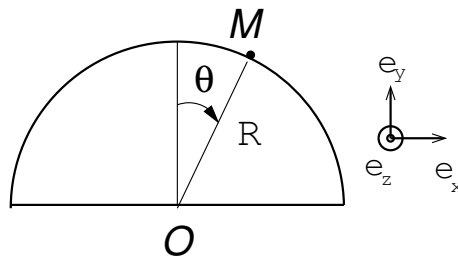
de l'axe (Δ) perpendiculaire au plan de la feuille passant par G (de vecteur directeur en direction de nos yeux). On calcule donc le moment des deux forces par rapport à cet axe (donc un moment scalaire) et on veut que la somme s'annule, d'après la loi du moment cinétique scalaire. Avec $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_M) = -\frac{\ell}{2}F_M$, et $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_L) = +dF_L$ (induit une rotation dans le sens trigonométrique), soit finalement $dF_L = \frac{\ell}{2}F_M$. D'autre part, on peut supposer que l'on est soit à l'équilibre, soit en mouvement rectiligne uniforme, et donc $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_L + \vec{F}_M$ soit après projection selon l'axe vertical $P = mg = F_L + F_M$ et donc après combinaison des deux équations :

$$F_M = \frac{mg}{1 + \frac{\ell}{2d}} = 1,6 \cdot 10^2 \text{ N} \quad \text{et}$$

$F_L = 3,4 \cdot 10^2 \text{ N}$ (réfléchissez-y à deux fois la prochaine fois que vous faites un déménagement!).

- En reprenant les mêmes calculs, mais en calculant les nouveaux bras de levier, il vient $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_M) = -\frac{\ell}{2} \cos \alpha F_M$, et $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_L) = +d \cos \alpha F_L$ et donc la condition de non-rotation reste $dF_L = \frac{\ell}{2} F_M$: la situation est inchangée!

5.3 L'esquimau et l'igloo



Un esquimau, repéré par son centre d'inertie M , est sur son igloo, de rayon R . Il glisse sur celui-ci. On modélise ici des frottements fluides avec l'air, en prenant un modèle de force de frottement linéaire ($\vec{F} = -\alpha \vec{v}$).

On prendra $\alpha = 20 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, $R = 10 \text{ m}$, et $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Déterminer l'expression du moment en O du poids de l'esquimau par calcul direct puis par l'utilisation du bras de levier. Faire de même pour la force de frottement.
- En appliquant soigneusement le théorème du moment cinétique, trouver l'équation différentielle vérifiée par le paramètre θ repérant l'esquimau.
- Application d'informatique* : Résoudre cette équation grâce à Python, tracer l'allure de $\theta(t)$ puis celle de la réaction normale, et déterminer l'angle de décollement de l'esquimau.

5.4 Vitesse d'un satellite à son périégée

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1,1 \text{ t}$. L'orbite de transfert est elliptique et la distance entre la surface de la Terre et le satellite varie entre $d_P = 200 \text{ km}$ au périégée, et $d_A = 35,9 \cdot 10^3 \text{ km}$ à l'apogée. On rappelle que le périégée est le point de l'orbite le plus proche de la Terre et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée $v_A = 3,5 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée et le périégée.
- Déterminer le demi-grand axe de la trajectoire, puis en déduire l'énergie mécanique et la période du satellite (sans démonstration).
- On note v_P la vitesse du satellite au périégée. Exprimer le module du moment cinétique calculé au point O du satellite à son périégée et son apogée. En déduire la vitesse à son périégée.

5.5 Expérience de Rutherford et taille du noyau

On considère une particule α de charge $2e$ envoyée de M_0 avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ avec $v_0 \simeq 2 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, sur un noyau d'or ($Z = 79$) fixe au point O du repère. On appelle b le paramètre d'impact de la trajectoire, correspondant à la distance séparant le noyau d'or de la droite $(M_0, \vec{v}_0)$.

1. Exprimer la force de répulsion coulombienne subie par une particule α , et démontrer l'expression de l'énergie potentielle.
2. Calculer le moment cinétique en O de la particule α lorsqu'elle se trouve très loin du noyau au point M_0 , puis à tout instant en choisissant un système de coordonnées approprié.
3. Exprimer l'énergie mécanique et introduire une énergie potentielle effective. Quelle est la trajectoire attendue ? La représenter qualitativement.
4. En considérant que le paramètre d'impact est quasi-nul, estimer la distance minimale d'approche au noyau de la particule α , et effectuer l'application numérique. On précise qu'une particule α possède 4 nucléons, et on négligera l'énergie potentielle devant l'énergie cinétique en M_0 .

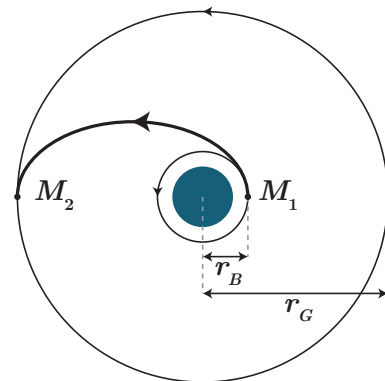
Données : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1}$, $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

5.6 Lancement d'un satellite terrestre

On veut placer un satellite en orbite géostationnaire autour de la Terre. L'étude est menée dans le référentiel géocentrique dans lequel la Terre est animée d'un mouvement de rotation de période T autour de son axe.

1. Démontrer l'expression de l'énergie mécanique $E_{m,B}$ d'un satellite de masse m en orbite circulaire à basse distance r_B du centre de la Terre. L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est choisie nulle à l'infini et on admet que la Terre crée un champ analogue à celui d'une masse M_T occupant son centre fixe.
2. Exprimer l'énergie du satellite E_S avant son lancement, lorsqu'il est posé à la surface de la Terre et à la latitude λ . Où est-il préférable de procéder au lancement ?
3. L'orbite géostationnaire est celle pour laquelle le satellite reste à la verticale d'un même point de la Terre.
 - (a) Peut-on placer un tel satellite au-dessus d'un point quelconque de la Terre ?
 - (b) Déterminer le rayon r_G de l'orbite géostationnaire.
 - (c) Calculer l'énergie mécanique $E_{m,G}$ d'un satellite géostationnaire.

4. Une fois le satellite placé sur son orbite basse, on souhaite le transférer vers l'orbite géostationnaire. Pour cela, on lui communique une impulsion au point M_1 , de sorte qu'il décrit une ellipse dont l'apogée se trouve en M_2 sur l'orbite géostationnaire (ellipse de Hohmann). Une seconde impulsion permet alors de le stabiliser sur cette orbite.



- (a) Déterminer l'énergie mécanique $E_{m,T}$ du satellite sur l'ellipse de transfert. En déduire l'énergie qu'il faut fournir en M_1 puis en M_2 pour réaliser le transfert, et calculer alors l'excédent de vitesse Δv à fournir en chacun des points (en supposant que la poussée s'effectue durant un temps très court devant la période de révolution).
- (b) Déterminer la durée du transfert.

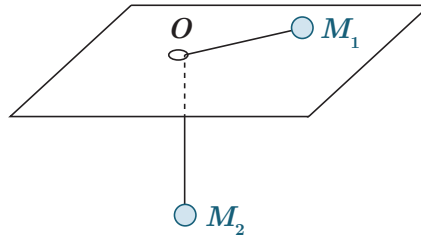
5. On utilise enfin les moteurs pour annuler quasiment la vitesse du satellite.

- (a) Décrire l'allure de la trajectoire.
- (b) Déterminer la nouvelle valeur de son énergie mécanique. En déduire alors le demi-grand axe de la nouvelle trajectoire.
- (c) En déduire une estimation de la durée au bout de laquelle le satellite tombera sur la Terre, en utilisant de nouveau la troisième loi de Kepler.

Données : $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6,38 \cdot 10^3 \text{ km}$, $m = 10^3 \text{ kg}$, $r_B = 7 \cdot 10^6 \text{ km}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

5.7 Système mécanique à force centrale

Un système mécanique est constitué de deux points matériels reliés par un fil de longueur ℓ constante et de masse négligeable. Le premier point matériel M_1 , de masse m_1 , glisse sans frottement sur un plan horizontal percé d'un trou O . Le fil est engagé dans le trou, de sorte que le second point M_2 de masse m_2 se déplace verticalement dans le champ de pesanteur terrestre g . On choisit la longueur ℓ de sorte qu'avec les conditions initiales choisies, aucun des points matériels n'atteigne le point O .



1. Choisir un système de repérage adapté pour décrire ce système.
2. Exprimer l'énergie mécanique du système et montrer qu'elle peut s'exprimer à partir d'une variable unique. En déduire les équations du mouvement. Commenter.
3. Étudier le profil de potentiel de ce système. Le mouvement du point M_1 est-il libre ou lié ?
4. Justifier si les affirmations suivantes sont justes ou non :
 - (a) le mouvement de M_2 est périodique ;
 - (b) le mouvement de M_1 vérifie la loi des aires ;
 - (c) la trajectoire de M_1 est une ellipse ;
 - (d) la trajectoire de M_1 est fermée.
5. Le mouvement de M_1 peut-il être circulaire ? Quelles doivent être, le cas échéant, la vitesse linéaire v à donner à la bille M_1 pour obtenir un cercle de rayon r_0 ?