–M6–

Mécanique du solide

Sommaire

6.1 Cinématique du solide 2
6.1.1 Notion de solide 2
6.1.2 Translation d'un solide 2
6.1.3 Rotation autour d'un axe fixe 2
6.2 Étude d'un solide en rotation autour d'un axe fixe 3
6.2.1 Moment cinétique scalaire pour un solide 3
6.2.2 Moment d'une force pour un solide 4
6.2.3 Notion de couple 4
6.2.4 Liaison pivot et moteurs 5
6.2.5 Loi du moment cinétique 6
6.2.6 Application au pendule pesant 6
6.3 Approche énergétique 6
6.3.1 Énergie cinétique et puissance d'une force pour un élément en rotation 7
6.3.2 Puissance des forces intérieures 7
6.3.3 Théorème de la puissance cinétique pour un solide 7
6.3.4 Cas des systèmes déformables 8

Questions de cours :

- Définition d'un solide, et d'un système déformable. Conséquence sur la puissance des forces.
- Loi du moment cinétique pour un solide : notion de moment d'inertie et interprétation physique, loi du moment cinétique et application au cas du pendule pesant.
- Couple de forces : définition, valeur du couple. Liaison pivot : définition, cas de la liaison pivot idéale.
- Énergie cinétique et puissance d'une force pour un solide en rotation. Énoncé et démonstration du théorème de la puissance cinétique.

Capacités exigibles du BO :

- Différencier un solide d'un système déformable.
- Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
- Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
- Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
- Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
- Définir un couple.
- Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
- Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement.
- Expérience : Réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique.
- Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, mettre en évidence le non-isochronisme des oscillations (déjà vu au chapitre M2).
- Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
- Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.
- Prendre en compte le travail des forces intérieures. Utiliser sa nullité dans le cas d'un solide.
- Conduire le bilan énergétique du tabouret d'inertie.

Expériences :

- Vidéo de conservation du moment cinétique sur une chaise tournantes avec haltères https ://www.youtube.com/watch ?v=G6XSK72zZJc ;
- Chute d'un homme avec une poulie et une petite masse https ://www.youtube.com/watch ?v=yZC6kOV58uU

I. Cinématique du solide

Dans certains cas, l'objet d'étude ne peut pas être considéré comme ponctuel. Il faut alors adopter une description plus complète.

I.1 Notion de solide

Définition

* On appelle solide un système $\mathcal{S}$ dont les points restent à distance constante les uns des autres :

$$\forall A_i, A_j \in \mathcal{S} \quad \overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{\text{cste}} \tag{6.1}$$

Un solide est donc par définition **indéformable**.

Pour repérer un solide dans l'espace, 6 paramètres sont nécessaires. En effet, soit $\mathcal{R}(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ notre référentiel d'étude et soit $\mathcal{R}_S(O_S, \vec{e_x}', \vec{e_y}', \vec{e_z}')$ un référentiel lié au solide. Pour repérer complètement la position du solide il faut alors situer O_S par ses 3 coordonnées d'espace, puis fixer l'orientation de $\mathcal{R}_S$ grâce à 3 angles (rotation autour de $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$).

I.2 Translation d'un solide

Propriété

Un solide est en translation lorsque les 3 angles évoqués ci-dessus sont constants. On peut alors faire coïncider en tout temps les vecteurs $(\vec{e_x}', \vec{e_y}', \vec{e_z}')$ avec $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

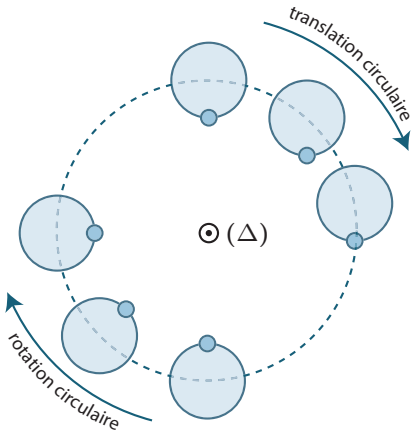
L'étude du mouvement du solide se résume alors à l'étude du mouvement d'un de ses point, par exemple O_S.

$$\forall P \in \mathcal{S} \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_S} + \overrightarrow{O_SP} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{O_SP} = \overrightarrow{\text{cste}} \tag{6.2}$$

On distingue deux mouvements de translation particuliers :

- une **translation rectiligne** lorsque le mouvement de O_S est un mouvement rectiligne (par exemple un ascenseur) ;
- une **translation circulaire** lorsque le mouvement de O_S est un mouvement circulaire (nacelle d'une grande roue).

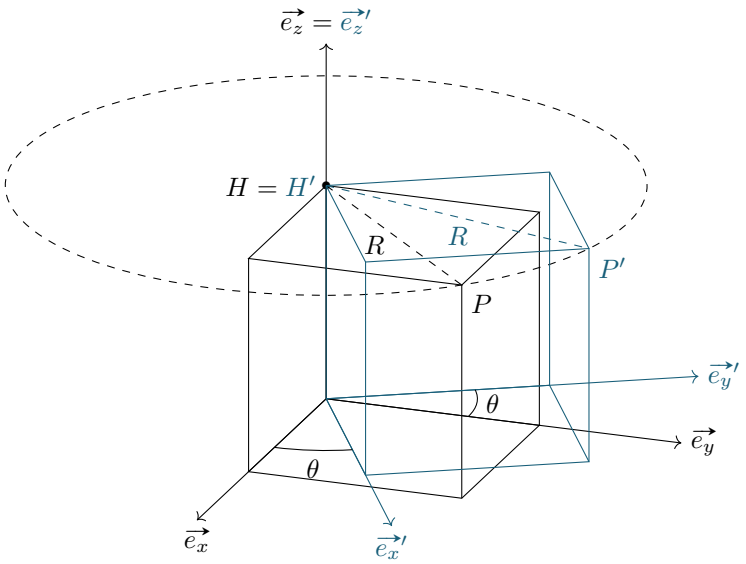
Il faut distinguer le mouvement de rotation et la translation circulaire :



I.3 Rotation autour d'un axe fixe

Propriété

Un solide est en rotation autour d'un axe si et seulement si il existe une unique droite Δ immobile dans $\mathcal{R}$ **ET** dans $\mathcal{R}_S$.



Pour notre exemple, on considère $\Delta = (Oz)$. Dans ce cas on a toujours $\vec{e_z}' = \vec{e_z}$ et la position du solide est alors entièrement repérée par l'angle θ existant entre $\vec{e_x}'$ et $\vec{e_x}$ (ou $\vec{e_y}'$ et $\vec{e_y}$).

Soit P un point du solide et H son projeté orthogonal sur l'axe Δ. Alors P décrit un **cercle** de rayon $HP = r$ autour de H.

On peut alors adopter les coordonnées polaires pour P et on est ramené à un mouvement circulaire :

$$\overrightarrow{HP} = r\vec{e_r} \tag{6.3}$$

puis :

$$\vec{v}_{P/\mathcal{R}} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = r\omega\vec{e_\theta} \tag{6.4}$$

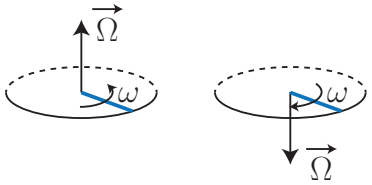
La vitesse angulaire ω est commune à tous les points du solide, seul r change.

Notons que l'axe de rotation Δ peut être à l'intérieur ou à l'extérieur du solide.

On peut définir le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \omega\vec{e}_\Delta$. Ce dernier est :

- tel que sa direction est la même que celle de l'axe de rotation (Δ) ;
- sa norme est égale à la vitesse angulaire du solide par rapport à l'axe de rotation ;
- son sens indique le sens de rotation du solide, à l'aide de la règle de la main droite :

*



II. Étude d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Dans la suite, on va s'intéresser exclusivement aux solides en rotation autour d'un axe fixe, cas très fréquemment rencontré dans les systèmes réels, industriels ou non. L'objectif est de dégager les paramètres physiques pertinents pour l'étude d'un tel mouvement.

II.1 Moment cinétique scalaire pour un solide

Le moment cinétique pour un solide indéformable est particulièrement compliqué à calculer. On peut se restreindre au cas de la rotation autour d'un axe fixe, où l'on a vu que tous les points tournaient à la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

Moment cinétique et moment d'inertie d'un solide

* Dans le cas d'un mouvement de rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe (Δ), le moment cinétique est proportionnel à la vitesse de rotation $\dot{\theta}$:

$$L_{(\Delta)} = J_{(\Delta)}\dot{\theta} \tag{6.5}$$

où $J_{(\Delta)}$ est appelé **moment d'inertie du solide** par rapport à l'axe (Δ), caractérisant la distribution de masse du solide autour de l'axe (Δ). À partir du moment où le solide est indéformable, $J_{(\Delta)}$ est une constante. Il s'exprime en kg·m^{-2}

On peut intuiter l'expression précédente en considérant que le solide indéformable est constitué d'un grand nombre de points M_i de masse infinitésimale respective $\mathrm{d}m_i$.
Alors $L_{(\Delta)} = \sum_i (\mathrm{d}m_i r_i^2 \dot{\theta}) = \left(\sum_i \mathrm{d}m_i r_i^2\right)\dot{\theta}$ où r_i est la distance du point M_i à l'axe.
Ainsi le moment d'inertie se retrouve être simplement une somme (ou une intégrale) $J_{(\Delta)} = \sum_i \mathrm{d}m_i r_i^2 = \iiint r^2 \mathrm{d}m$. Le calcul ne sera jamais exigible.

Une remarque importante : plus la masse est concentrée autour de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie est petit (et inversement). Ainsi, par exemple, un cerceau de masse m aura un moment d'inertie beaucoup plus important qu'un disque homogène de même masse et même rayon.



Exercice

Que peut-on dire pour l'exemple de la Terre, où $J_{\text{Terre}} \simeq 0{,}33 M_T R_T^2 < \frac{2}{5} M_T R_T^2$ (sphère homogène) ?

II.2 Moment d'une force pour un solide

Pour un solide, le calcul du moment d'une force reste identique à celui d'un point matériel. La difficulté majeure réside dans le **lieu d'application de cette force pour un solide**, qui n'est plus un point matériel. Retenons que :

- pour le poids, on considèrera toujours que la **force s'applique en son centre de gravité (ou centre d'inertie)** G ;
- pour la réaction du support, la force est répartie sur toute la surface, mais on modélise souvent comme une unique force de point d'application le milieu de la surface (lorsque la masse s'applique de manière homogène sur la surface) ;
- la tension du fil s'applique au point d'attache du fil, tout comme la force de rappel élastique.

Tout autre cas sera nécessairement précisé lorsque c'est nécessaire.

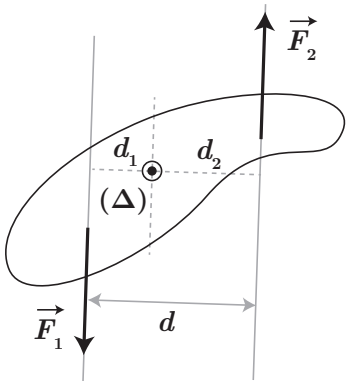
II.3 Notion de couple

Pour un solide on rencontre un cas fréquent de moment de force, c'est celui associé à un couple de forces.

Définition : couple

* Un couple de force est par définition un ensemble de forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ vérifiant $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$: il s'agit de forces de même norme F, de sens opposé et de résultante nulle s'appliquant sur un solide.

C'est ce qu'il se passe quand on tient un volant de voiture que l'on fait tourner, par exemple.



On peut calculer le moment scalaire de l'ensemble de ces deux forces à l'aide des bras de levier :

$$\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = Fd_1 + Fd_2 = Fd \tag{6.6}$$

avec d la distance entre les deux droites d'actions. On a ainsi un moment non nul si les deux droites d'action ne sont pas confondues.

Moment d'un couple

Le moment associé à un couple de forces, appelé (abusivement) **couple**, et noté Γ, vaut

$$\Gamma = \pm Fd \tag{6.7}$$

avec F la norme de chacune des forces et d la distance entre les droites d'actions des forces. Le signe est lié au sens de rotation qu'induit le couple par rapport à l'axe orienté choisi. La norme de ce couple est par contre **indépendante du choix de l'axe de rotation** choisi pour le calculer.

Cette notion de couple peut être étendue à tout cas où la somme des forces est nulle, et le moment des forces par rapport à un axe (Δ) orienté n'est pas nul. Citons le cas du couple exercé par la main sur le bouchon d'une bouteille d'eau.

Quelques exemples dont les expressions seront rappelées :

- un couple de torsion lié à l'équivalent en rotation d'un ressort de raideur k : $\Gamma = -\alpha\theta$ par exemple ;
- un couple de frottements fluides $\Gamma = -h\dot{\theta}$;
- un couple de frottements solides $\Gamma = -\gamma\dfrac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}$.

II.4 Liaison pivot et moteurs

Attardons-nous un instant sur la **liaison pivot** étudiée en SII. Une liaison pivot d'axe (Oz) **restreint les possibilités de mouvement d'une pièce mobile appelée rotor à une rotation d'axe (Oz) par rapport à une partie fixe appelée stator**. Il s'agit de la liaison la plus communément rencontrée dans des systèmes mécaniques. On supposera très souvent que la liaison est géométriquement idéale, c'est-à-dire qu'elle bloque toute translation le long de l'axe (Oz) et assure un guidage parfait autour de l'axe (Oz).

Définition

On parle de **liaison pivot idéale** si le stator n'exerce aucun moment scalaire d'axe (Oz) sur le rotor, soit $\boxed{\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{liaison}) = 0}$.



La liaison pivot peut par contre exercer un effort ou un moment selon d'autres axes pour compenser l'action du rotor sur le stator afin d'imposer le guidage.

Dans le cas d'un moteur, la liaison pivot entre le rotor et le stator possède un autre intérêt que le guidage car **le stator exerce un couple moteur** Γ afin de mettre en rotation une pièce accrochée au

rotor. Cette dernière va donc, par le principe des actions réciproques, exercer un couple de freinage sur le rotor. En régime permanent, les deux couples vont se compenser, comme on va le montrer à l'aide de la loi du moment cinétique pour un solide.

II.5 Loi du moment cinétique

Loi du moment cinétique pour un un solide

Pour un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe orienté (Δ) dans un référentiel galiléen, soumis à des forces extérieures $\{\vec{F}_i\}$, le moment cinétique scalaire vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}L_{(\Delta)}}{\mathrm{d}t} = J_{(\Delta)}\ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_i) \tag{6.8}$$

Cela permet d'ailleurs de souligner le sens physique du moment d'inertie par rapport à un axe fixe : il caractérise son aptitude à s'opposer aux variations de vitesse de rotation autour de cet axe.

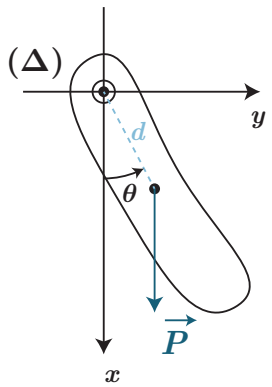
Petite application simple justifiant les propos précédents sur le cas du moteur : en notant J le moment d'inertie du rotor, l'application de la loi du moment cinétique à ce dernier conduit à

$$J\ddot{\theta} = \Gamma_{\text{mot}} - \Gamma_{\text{frotts}} \tag{6.9}$$

pouvant conduire à un régime permanent où le couple moteur et le couple résistant se compensent, si le couple résistant n'est pas constant (sinon accélération ou décélération).

II.6 Application au pendule pesant

* Considérons un solide indéformable en liaison pivot autour d'un axe (Δ). Cet axe ne passe pas par le centre d'inertie du solide, de sorte que le poids va induire un mouvement de rotation si le solide n'est pas strictement à la verticale. On suppose la liaison idéale, et on note $J_{(\Delta)}$ le moment d'inertie. On appelle enfin d la distance entre le centre d'inertie et l'axe (Δ).



* Ainsi le moment scalaire exercé par le poids est simplement $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{P}) = -mgd\sin\theta$. L'application de la loi du moment cinétique conduit alors à

$$J_{(\Delta)}\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{(\Delta)}}\sin\theta = 0 \tag{6.10}$$

soit le même type d'équation que le pendule simple, en posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgd}{J_{(\Delta)}}}$ la pulsation propre associée.

III. Approche énergétique

On va compléter l'approche énergétique en donnant certaines expressions (énergie cinétique, puissance d'une force) afin de pouvoir étendre le théorème de l'énergie cinétique pour un solide

III.1 Énergie cinétique et puissance d'une force pour un élément en rotation

Lorsqu'un solide indéformable est en rotation autour d'un axe fixe (Δ), il acquiert une énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} J_{(\Delta)} \dot{\theta}^2 \tag{6.11}$$

*

De la même façon, on peut exprimer la puissance d'une force lorsque le solide est en rotation :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F})\dot{\theta} \tag{6.12}$$

III.2 Puissance des forces intérieures

À l'intérieur d'un système, des forces peuvent exister, on parle alors de **forces intérieures** et sont souvent oubliées. Pour autant, **pour un solide indéformable, la puissances des forces intérieures est nulle.**

Démonstration

Partons de deux points quelconques M_i et M_j du solide. D'après la troisième loi de Newton, chaque point exerce l'un sur l'autre des forces opposées et alignées avec le vecteur $\overrightarrow{M_iM_j}$, donc la somme des puissance est :

$$\vec{F}_{i\to j} \cdot \vec{v}_j + \vec{F}_{j\to i} \cdot \vec{v}_i = \vec{F}_{i\to j} \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i)$$

Or le solide est indéformable, donc $\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\|^2 = \text{cste}$ soit en dérivant :

$$\frac{\mathrm{d}\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\|^2}{\mathrm{d}t} = 0 = 2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{M_iM_j} = 2(\vec{v}_j - \vec{v}_i) \cdot \underbrace{\overrightarrow{M_iM_j}}_{//\vec{F}_{i\to j}}$$

donc $\vec{F}_{i\to j} \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) = 0$. Les forces intérieures pouvant toutes être regroupées ainsi par paires en vertu du principe des actions réciproques, on obtient bien que la somme des puissances des forces intérieures à un solide est nulle.

III.3 Théorème de la puissance cinétique pour un solide

Dans ce même cadre, on peut alors exprimer ce que vaut la variation d'énergie cinétique

Théorème de la puissance cinétique

Pour un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe (Δ) dans un référentiel galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i) = \sum_i \mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_i)\dot{\theta} \tag{6.13}$$

avec $\sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$ la somme des puissances des forces extérieures au système.

En réalité cette expression est équivalente à celle de la loi du moment cinétique scalaire :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = J_{(\Delta)}\dot{\theta}\ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_i)\dot{\theta} \tag{6.14}$$

qui conduit alors à

$$J_{(\Delta)}\ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_i) \tag{6.15}$$

Les équations sont donc identiques.

Par ailleurs, la notion de couple moteur ou de freinage est bien cohérente : si $\mathcal{P}(\vec{F}_i) > 0$, $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_i)$ est du même signe que $\dot{\theta}$, et l'énergie cinétique croît (donc $\dot{\theta}$ aussi), on a bien affaire à un couple moteur.

III.4 Cas des systèmes déformables

Dans le cas de systèmes déformables, il faut tenir compte des forces intérieures dont les puissances peuvent être non nulles :

Théorème de la puissance cinétique

Pour un système déformable en rotation autour d'un axe fixe (Δ) dans un référentiel galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,ext} \mathcal{P}(\vec{F}_i) + \sum_{j,int} \mathcal{P}(\vec{F}_j) \tag{6.16}$$

en distinguant les puissances des forces extérieures et intérieures.



Exercice

Expliquer qualitativement les observations de la vidéo où la vitesse de rotation augmente si la personne approche les haltères vers lui.

Évoquer également l'énergie cinétique qui augmente, et qui vient du fait que pour un objet déformable, il y a des forces "intérieures" au système que l'on ne prend pas en compte dans la modélisation.

* C'est ce fait notamment qui permet aux muscles d'un corps d'augmenter son énergie cinétique, ou au patineur d'augmenter sa vitesse de rotation en rapprochant le bras de son corps. Ainsi, si le moment cinétique d'un système isolé est toujours conservé car les moments appliqués sont nuls, ce n'est pas nécessairement le cas de son énergie à cause du travail des forces intérieures.



Exercice

Situation bilan : chute d'un homme et d'une masse (vidéo). Quels concepts physiques semblent nécessaires pour expliquer les observations ?

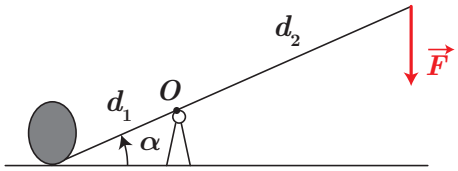
Plusieurs aspects à prendre en compte :

- conservation du moment cinétique (à peu de choses près) pour la masse, qui accélère du fait du raccourcissement de la longueur ;
- d'un point de vue énergétique, on voit la masse remonter (or on a donné une certaine énergie potentielle et énergie cinétique nulle ? ?) : force de traction fournit un travail qui est transmise au système ;
- Arrêt ? frottements solides entre le mât et la corde.
- Oscillations en fin ? corde élastique qui se déforme, équivalent à un oscillateur amorti !

Exercices

6.1 Levier

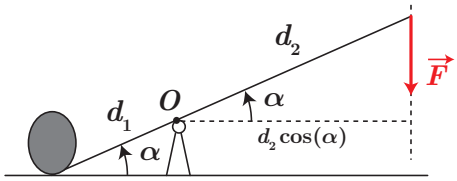
Un manutentionnaire utilise un levier afin de soulever un rocher de masse $M = 200\,\text{kg}$. Les longueurs valent $d_1 = 40\,\text{cm}$ et $d_2 = 1{,}6\,\text{m}$ et $\alpha = 60°$.



1. À quelle condition le rocher va commencer à se soulever ?
2. En déduire la norme minimale de la force verticale nécessaire pour que le rocher se soulève.
3. En faisant varier la direction de la force qu'il exerce par rapport au levier, le manutentionnaire peut être plus efficace. Expliquer comment il peut procéder et quelle force il doit exercer. Quel est le gain par rapport au cas précédent ?

---

1. Si on effectue un bilan de forces sur le levier, on a deux forces qui sont dirigées selon la verticale : le poids du rocher $\vec{P}$, et la force exercée par l'utilisateur $\vec{F}$. On cherche à savoir quand il est possible d'obtenir un mouvement de rotation, sachant que ces deux forces induisent un moment dans le sens oppposé. Il faut donc que $\left\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})\right\| > \left\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P})\right\|$ (car alors on pourra faire varier le moment cinétique du système de sorte qu'il y ait une rotation dans la direction du manutentionnaire).
2. En s'aidant de la notion de bras de levier, l'équation précédente se traduit par $d_2 \cos\alpha \left\|\vec{F}\right\| > d_1 \cos\alpha \left\|\vec{P}\right\|$

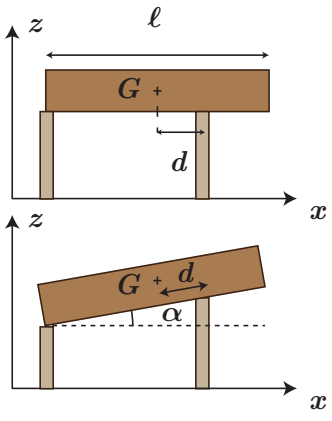


soit encore $Fd_2 > Mgd_1$ et donc $\boxed{F > \dfrac{Mgd_1}{d_2} = 500\,\text{N}}$ soit l'équivalent d'une masse à soulever de "seulement" 80 kg.

3. On peut faire en sorte d'augmenter le bras de levier en appliquant une force perpendiculaire au levier, ainsi la condition précédente devient $d_2 F > Mgd_1 \cos\alpha$ soit $F > 250\,\text{N}$!

6.2 Déménagement

Deux déménageurs portent une armoire, de hauteur $\ell = 3\,\text{m}$ et de masse $m = 50\,\text{kg}$. L'un est à une extrémité M de la poutre, l'autre au point L à une distance $d = 0{,}7\,\text{m}$ du milieu de l'armoire. On suppose le solide homogène, pour simplifier.



1. À quelle condition un objet initialement à l'équilibre n'effectue aucun mouvement de rotation ?
2. On suppose que les déménageurs ont même taille, l'armoire est donc maintenue horizontalement. Déterminer les normes des forces $\vec{F}_M$ et $\vec{F}_L$ exercées pour la maintenir.
3. Même question si on imagine maintenant que l'un des déménageurs est plus petit, et donc l'armoire est inclinée d'un angle $\alpha = 20°$.

---

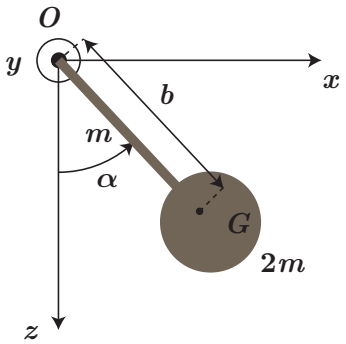
1. On souhaite un déplacement de l'armoire sans aucun mouvement de rotation du solide (qui en général se traduirait par des dommages collatéraux). Par conséquent, il suffit que $\dfrac{\mathrm{d}L_{(\Delta)}}{\mathrm{d}t} = 0$ si on considère une rotation possible autour

de l'axe (Δ) perpendiculaire au plan de la feuille passant par G (de vecteur directeur en direction de nos yeux). On calcule donc le moment des deux forces par rapport à cet axe (donc un moment scalaire) et on veut que la somme s'annule, d'après la loi du moment cinétique scalaire. Avec $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_M) = -\frac{\ell}{2}F_M$, et $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_L) = +dF_L$ (induit une rotation dans le sens trigonométrique), soit finalement $dF_L = \frac{\ell}{2}F_M$. D'autre part, on peut supposer que l'on est soit à l'équilibre, soit en mouvement rectiligne uniforme, et donc $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_L + \vec{F}_M$ soit après projection selon l'axe vertical $P = mg = F_L + F_M$ et donc après combinaison des deux équations : $\boxed{F_M = \dfrac{mg}{1+\dfrac{\ell}{2d}} = 1{,}6{\cdot}10^2 \text{ N}}$ et $F_L = 3{,}4{\cdot}10^2$ N (réfléchissez-y à deux fois la prochaine fois que vous faites un déménagement !).

2. En reprenant les mêmes calculs, mais en calculant les nouveaux bras de levier, il vient $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_M) = -\frac{\ell}{2}\cos\alpha F_M$, et $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_L) = +d\cos\alpha F_L$ et donc la condition de non-rotation reste $dF_L = \frac{\ell}{2}F_M$: la situation est inchangée !

6.3 Pendule pesant

On considère le pendule ci-contre, capable d'osciller librement autour de l'axe (Oy) horizontal grâce à une liaison pivot parfaite. Il est constitué d'une barre homogène de section constante et masse m, à l'extrémité de laquelle on a soudé un disque homogène de masse $2m$ et de centre C. L'ensemble obtenu constitue un solide rigide. On note b la distance du centre de gravité à l'axe. Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Oy) est $J_{(Oy)} = kmb^2$, k étant un réel positif que l'on cherche à déterminer expérimentalement.



On écarte le pendule d'un angle α_0 par rapport à sa position d'équilibre, et on le lâche sans vitesse initiale à la date $t = 0$. On étudie son mouvement ultérieur en observant l'angle α que forme la direction de la barre avec l'axe vertical descendant (Ox).

1. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit α.
2. En déduire un moyen d'obtenir expérimentalement k, en explicitant la formule à utiliser.

---

1. Appliquons la loi du moment cinétique scalaire au pendule de masse totale $3m$ dans le référentiel galiléen du laboratoire. Faisons un bilan des différents moments :
   - liaison pivot parfaite, donc pas de moment associé $\mathcal{M}_{(Oy)}(\text{liaison}) = 0$;
   - poids dont la résultante s'applique au centre de gravité distant de b de l'axe, par conséquent le bras de levier par rapport à l'axe Oy vaut $b\sin\alpha$, et le poids dans cette configuration va faire tourner le système dans le sens horaire, donc $\mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{P}) = -3mgb\sin\alpha$.

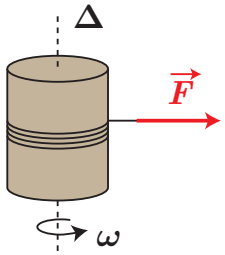
   Ainsi on a donc $\dfrac{\mathrm{d}L_{(Oy)}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{(Oy)}(\text{liaison})$ soit à l'aide du moment d'inertie $J_{(Oy)}\ddot{\alpha} = -3mgb\sin\alpha$. Puis en injectant l'expression du moment d'inertie, il vient finalement :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{kb}\sin\theta = 0 \tag{6.17}$$

2. En se plaçant dans des conditions telles que le système oscille faiblement autour de sa positiion d'équilibre, on peut considérer $\alpha \ll 1$ et donc $\sin\alpha \simeq \alpha$. On reconnaît alors l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 telle que $\omega_0^2 = \dfrac{3g}{kb}$, et donc $k = \dfrac{3g}{b\omega_0^2} = \dfrac{3gT^2}{4\pi^2 b}$ avec T la période du pendule que l'on peut mesurer facilement. À noter qu'il faut obtenir la distance b, même si dans l'exercice cela semble être une donnée, dans les faits il faut pouvoir l'obtenir :
   - soit on l'obtient en pouvant maintenir le pendule autour de n'importe quel point, celui qui permettra de rendre le pendule stable quel que soit l'angle initial sera ainsi le point G (en effet, le moment du poids sera nul quel que soit l'angle initial) ;
   - soit on l'attache à deux points différents du solide et on regarde son état d'équilibre : dans tous les cas, le point G sera situé sur la verticale passant par le point d'attache, et les deux verticales obtenues donneront via leur intersection le point G.

6.4 Toupie or not toupie

Considérons une toupie, que l'on va modéliser comme un cylindre tournant de masse m et de rayon R, de moment d'inertie par rapport à son axe de symétrie $J_{(\Delta)} = \dfrac{mR^2}{2}$. On enroule un fil autour du cylindre (4 tours), et on tire dessus avec une force de norme F supposée constante, à partir de $t = 0$, la toupie étant initialement immobile.



1. Exprimer la puissance instantanée de la force $\vec{F}$.
2. En déduire l'accélération angulaire de la toupie.
3. À l'aide d'un bilan d'énergie cinétique, déterminer la vitesse angulaire de la toupie quand tout le fil a été déroulé.

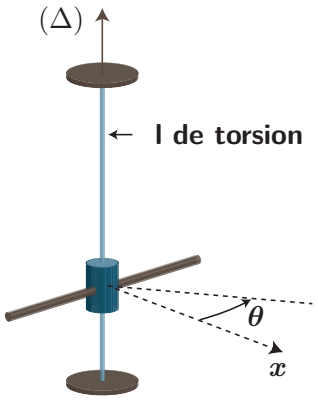
6.5 Tabouret d'inertie

Un expérimentateur est assis sur un tabouret pouvant tourner sans frottement autour d'un axe vertical. Il maintient ses bras tendus horizontalement dans l'axe de ses épaules, tenant dans ses mains des haltères de 5 kg chacune, se trouvant alors à $L = 1\,\text{m}$ de l'axe de rotation. Un collègue le met en rotation en exerçant au bout d'un de ses bras une force orthoradiale constante de $F = 5\,\text{N}$ sur un angle de $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$, lui faisant alors atteindre à une vitesse angulaire ω_1 pour une durée d'accélération $\tau = 3\,\text{s}$. Il rapproche alors ses bras du corps, et les croise sa poitrine. Sa vitesse angulaire devient $\omega_2 = 3{,}0\,\text{rad·s}^{-1}$.

1. Pourquoi sa vitesse angulaire de rotation varie-t-elle lorsqu'il rapproche ses bras du corps ? Justifier le sens de cette variation.
2. Exprimer puis calculer la vitesse angulaire ω_1.
3. Déterminer le rapport entre les moments d'inertie du système expérimentateur + haltères + tabouret dans les positions initiale et finale, puis déterminer leurs valeurs numériques.
4. Quel travail l'expérimentateur assis sur le tabouret a-t-il dû fournir pour ramener ses bras le long de son corps. Ce résultat dépend-il de si le mouvement a été rapide ou non ?

6.6 Pendule de torsion

Un pendule de torsion est constitué d'un fil dont la masse est négligeable devant celle de l'objet du balancier fixé à son extrémité. Le moment d'inertie du balancier par rapport à l'axe vertical (Δ) du fil est noté $J_{(\Delta)}$. L'air environnant exerce un couple de frottement fluide linéaire de constante α, soit $\Gamma_{(\Delta),f} = -\alpha\dot{\theta}$ et le fil exerce un couple de rappel linéaire de constante k, soit $\Gamma_{(\Delta),r} = -k\theta$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ repérant l'orientation du pendule par rapport à sa position d'équilibre $\theta_{\text{eq}} = 0$. Caractériser cette équation et en donner une écriture canonique.
2. À partir de la position d'équilibre, on fait effectuer au pendule un tour complet sur lui-même, puis on le lâche sans vitesse angulaire initiale. Déterminer l'évolution temporelle de θ. On donne $\alpha = 2{\cdot}10^{-6}\,\text{N·m·s·rad}^{-1}$, $k = 1{,}00{\cdot}10^{-4}\,\text{N·m·rad}^{-1}$ et $J_{(\Delta)} = 2{,}00{\cdot}10^{-4}\,\text{kg·m}^2$.

6.7 Temps de chute ⋆

Un cylindre de masse m_0 et de rayon r peut tourner librement autour de son axe horizontal (Δ) fixe dans le référentiel du laboratoire. Son moment d'inertie par rapport à l'axe est noté J. Un fil inextensible et de masse négligeable est enroulé autour du cylindre. Un corps M de masse m est attaché à l'extrémité de ce fil. Il est abandonné sans vitesse initiale à une altitude h.

1. Exprimer la norme de la tension du fil qu'exerce le point M en mouvement accéléré.

2. Calculer l'accélération de M.

3. Au bout de combien de temps touchera-t-il le sol ?

6.8 Fluctuations du couple d'une machine tournante

Un moteur entraîne une machine tournante modélisée par le moment d'inertie total $J_{(\Delta)}$ autour de l'axe des parties mobiles et un moment résistant linéaire de coefficient de frottement h. Le couple moteur est la somme d'un terme constant M_0 et d'un terme sinusoïdal d'amplitude ΔM et de pulsation ω modélisant les fluctuations de ce couple dans le temps :

$$M_{(\Delta)}^{\text{mot}} = M_0 + \Delta M \cos \omega t \tag{6.18}$$

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire Ω de rotation du moteur, puis en donner une écriture canonique.

2. Décrire les solutions de cette équation et déterminer la composante permanente de cette solution.

3. Montrer que ce système présente un comportement de filtre dont on précisera la nature et dont on tracera la représentation de Bode. Comment peut-on réduire les fluctuations de la vitesse angulaire du rotor, en supposant qu'il n'est pas possible d'agir sur celles du moteur ?

---

1. Appliquons la loi du moment cinétique scalaire au système « machine tournante », dans le réferentiel terrestre supposé galiléen :

$$J_{(\Delta)} \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = -h\Omega + (M_0 + \Delta M \cos \omega t) \Longleftrightarrow \dot{\Omega} + \frac{h}{J_{(\Delta)}}\Omega = \frac{M_0}{J_{(\Delta)}} + \frac{\Delta M}{J_{(\Delta)}} \cos \omega t \tag{6.19}$$

On peut poser $\tau = \dfrac{J_{(\Delta)}}{h}$ comme constante de temps caractéristique.

2. Les solutions de cette équation se décomposent en utilisant le théorème de superposition :

$$\Omega(t) = \Omega_{\text{h}}(t) + \Omega_{\text{p}} + \Omega_{\text{f}}(t) \tag{6.20}$$

avec :

- la solution de l'équation sans second membre $\Omega_{\text{h}}(t) = Ae^{-t/\tau}$;
- la solution particulière au second membre constant $\Omega_{\text{p}} = \dfrac{M_0}{h}$;
- la solution liée au forçage sinusoïdal, pouvant s'écrire $\Omega_{\text{f}} = \Omega_{\text{m}} \cos(\omega t + \varphi)$.

Pour trouver les constantes Ω_{m} et φ, on peut passer en notations complexes, mais il faut enlever la composante continue du second membre. On pose $\tilde{\Omega} = \Omega(t) - \Omega_{\text{p}}$. L'équation vérifiée par cette nouvelle variable s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\Omega}}{\mathrm{d}t} + \frac{\tilde{\Omega}}{\tau} = \frac{\Delta M}{J_{(\Delta)}} \cos \omega t \tag{6.21}$$

On passe en notations complexes en cherchant $\underline{\tilde{\Omega}} = \underline{\Omega}_{\text{m}} e^{j\omega t}$ avec $\underline{\Omega}_{\text{m}} = \Omega_{\text{m}} e^{j\varphi}$:

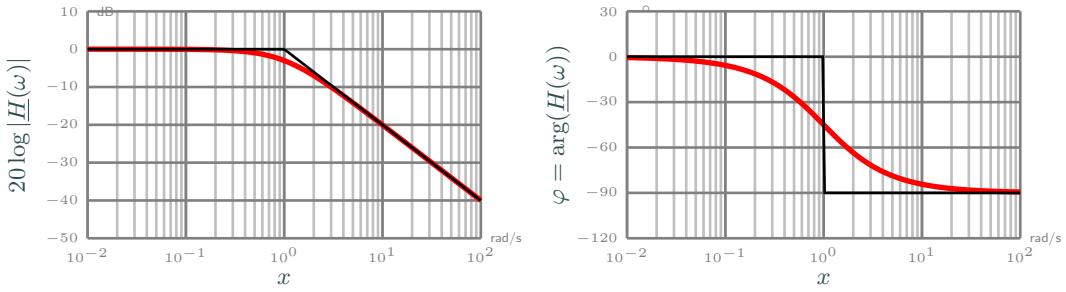
$$j\omega\underline{\tilde{\Omega}} + \frac{1}{\tau}\tilde{\Omega} = \frac{\Delta M}{J_{(\Delta)}} e^{j\omega t} \tag{6.22}$$

L'amplitude complexe s'écrit alors après simplifications :

$$\underline{\Omega}_{\text{m}} = \frac{\dfrac{\Delta M}{h}}{1 + j\omega\tau} \tag{6.23}$$

d'où $\Omega_{\text{m}} = |\underline{\Omega}_{\text{m}}| = \dfrac{\dfrac{\Delta M}{h}}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$ et $\varphi = \arg(\underline{\Omega}_{\text{m}}) = -\arctan(\omega\tau)$.

3. D'après le travail de la question précédente, l'amplitude complexe a la forme d'une fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1. On peut par exemple effectuer une représentation de Bode de la fonction $\underline{H}(x) = \dfrac{\underline{\Omega}_{\text{m}}}{\Omega_{\max}}$ avec $\Omega_{\max} = \dfrac{\Delta M}{h}$ la vitesse angulaire maximale et $x = \omega\tau$ la pulsation réduite :

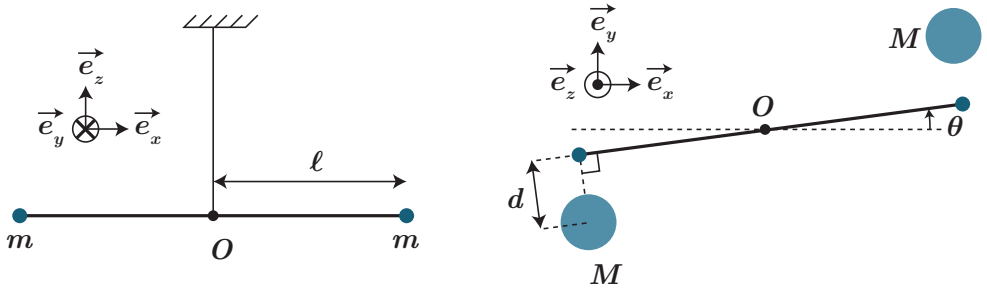


4. D'après ce qui précède, à valeur de ω fixé, il faut faire en sorte que $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, avec $\frac{1}{\tau} = \frac{h}{J_{(\Delta)}}$ la pulsation de coupure du passe-bas. Ainsi, on atténuera l'amplitude de la réponse de la machine tournante aux variations du couple moteur. Il faut donc diminuer la pulsation de coupure, donc augmenter $J_{(\Delta)}$ (ou diminuer h). C'est classique, un système de grand moment d'inertie est moins sensible aux perturbations extérieures.

6.9 Problème : Expérience de Cavendish

La faible intensité de la force de gravitation par rapport aux autres forces rend sa mesure difficile. En 1798, Cavendish réalise une expérience utilisant un pendule de torsion dont les résultats seront réinterprétés un siècle plus tard comme la première détermination de G.

La figure ci-dessous illustre le principe de l'expérience de Cavendish. Deux particules de masse m sont fixées aux extrémités d'une tige de longueur 2ℓ, un fil de torsion correspondant à la verticale relie le centre de la tige à un point fixe du laboratoire, réalisant ainsi un pendule de torsion. En approchant deux sphères de masse M à une distance d de chacune des extrémités du pendule, on observe une déviation angulaire dont la mesure permet de déterminer G.



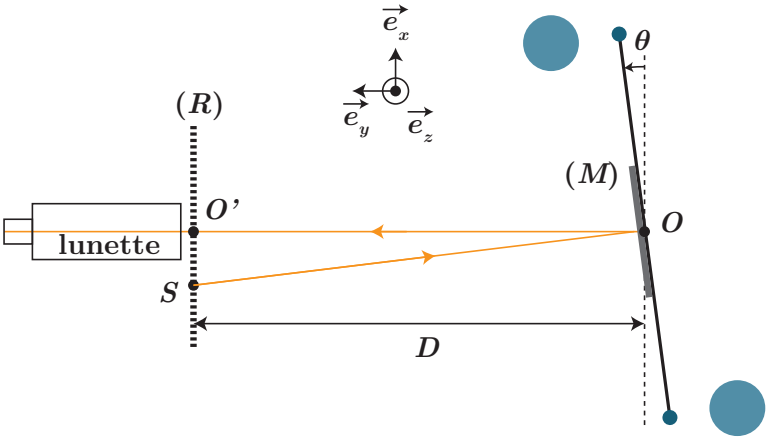
Dans la suite, on note θ la déviation angulaire du pendule par rapport à sa position d'équilibre. On note k la raideur angulaire du fil de torsion : le moment du couple de rappel est $-k\theta\vec{e_z}$. Les sphères de masse M et les particules de masse m sont considérées comme des particules ponctuelles. Le moment d'inertie de la tige et des deux masses m par rapport à l'axe du fil de torsion s'exprime de manière approchée par $J = 2m\ell^2$.

1. Calculer la déviation angulaire θ due à l'attraction des sphères.

2. Lors de son expérience, Cavendish utilisa les paramètres suivants : $m = 0{,}80\,\text{kg}$, $M = 158\,\text{kg}$, $\ell = 1{,}0\,\text{m}$, $d = 20\,\text{cm}$ et $k = 3{,}6{\cdot}10^{-4}\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^2{\cdot}\text{s}^{-2}$. Sachant que $G = 6{,}67{\cdot}10^{-11}\,\text{m}^3{\cdot}\text{kg}^{-1}{\cdot}\text{s}^{-2}$, prévoir la valeur de θ attendue.

3. Parmi les différentes grandeurs qui interviennent dans la détermination de G à partir d'une mesure de θ, laquelle vous semble la plus difficile à déterminer directement ? Proposer une expérience complémentaire pour mesurer cette grandeur. Exprimer G en fonction de M, ℓ, d, θ et du résultat de la mesure que vous avez proposée.

Afin de mesurer l'angle avec précision, la méthode de Poggendorff a été employée postérieurement à Cavendish. On accroche alors un petit miroir plan (M) solidaire de la tige en rotation. Une lunette de visée permet d'observer sans accomodation l'image que le miroir (M) donne d'une règle graduée (R). On voit alors défiler devant le fil vertical du réticule les images des divisions de la règle à mesure que le miroir tourne. On suppose que le viseur est situé à une distance $D = 0{,}5\,\text{m}$ du miroir.



4. La lunette de visée comporte deux lentilles convergentes, l'objectif étant positionné approximativement en O' et ayant une distance focale image de $f_1' = 30\,\text{cm}$. On définit la puissance de la lunette comme $P = \dfrac{\alpha'}{\overline{AB}}$ où α' est l'angle sous lequel on voit un objet AB au travers de la lunette de visée. Déterminer la distance focale de l'oculaire et l'encombrement de la lunette si on veut que $P = 10\,\delta$.
5. Préciser enfin le lien entre θ, la distance parcourue par le point S au niveau de la règle δx entre les positions $\theta = 0$ et θ du miroir, et D. Calculer alors numériquement δx et conclure.