

Filtrage linéaire

Sommaire

7.1 Signaux périodiques	3
7.1.1 Définitions et exemples	3
7.1.2 Grandeurs usuelles d'un signal périodique	3
7.1.3 Décomposition en série de Fourier	4
7.2 Étude d'un filtre simple	6
7.2.1 Étude qualitative : comportement asymptotique	6
7.2.2 Étude en fréquence	7
7.2.3 Représentations graphiques	7
7.3 Principes du traitement des signaux	8
7.3.1 Cadre d'étude	8
7.3.2 Notion de gabarit	9
7.4 Action d'un filtre sur un signal	10
7.4.1 Définitions	10
7.4.2 Étude d'un filtre	11
7.4.3 Réponse d'un filtre à un signal périodique quelconque	13
7.5 Quelques exemples de filtres	14
7.5.1 Filtres d'ordre 1	14
7.5.2 Filtres du deuxième ordre	16
7.5.3 Passe-bande	17
7.5.4 Association de quadripôles	18
7.5.5 Cas des systèmes non-linéaires	19
7.5.6 Filtres mécaniques	19
7.5.7 Simulation numérique de l'effet d'un filtre	20

Questions de cours :

- Définir la valeur moyenne et la valeur efficace, et l'appliquer à un signal sinusoïdal quelconque.
- Définir ce qu'est un spectre en amplitude pour un signal périodique, donner la décomposition en série de Fourier en définissant chaque terme. Sur un exemple de décomposition de signal au choix du colleur, représenter le spectre en amplitude.
- Étudier complètement le filtre passe-haut d'ordre 1 (circuit RL) : fonction de transfert (forme canonique), comportement asymptotique, gain et déphasage, diagramme de Bode asymptotique en gain et phase.
- Définir rigoureusement la pulsation de coupure et la calculer pour un filtre passe-bas et passe-haut du premier ordre (à partir de fonctions de transferts fournies).
- À partir d'un signal $e(t) = 3 + 10 \cos(5t) + 5 \sin(70t)$, expliquer qualitativement comment obtenir le signal en sortie d'un filtre passe-bas ($\omega_c = 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$) ou passe-haut ($\omega_c = 30 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$).
- Présenter quelques fonctions : moyennneur, intégrateur, dérivateur et des exemples de circuits en précisant les conditions pour lesquelles ils jouent correctement leur rôle.
- Donner la définition de la fonction de transfert, de l'impédance d'entrée et de sortie, et déterminer la condition pour associer deux quadripôles de sorte que la fonction de transfert globale soit le produit des fonctions de transfert individuelles.

Capacités exigibles du BO :

- Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
- Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal.
- Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.
- Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
- Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.
- Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.

- Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.
- Mettre en oeuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.
- Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.
- Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyennneur, intégrateur, ou dérivateur.
- Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.
- Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.).
- Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.
- Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.
- Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

Manipulations de cours :

- Filtres avec plaquette

On a vu dans le chapitre précédent que des systèmes mécaniques comme électriques avaient des comportements variés, lorsqu'ils étaient soumis à un forçage sinusoïdal. Dans ce chapitre on va aller encore plus loin, en considérant tout type de signal périodique, afin de mettre en évidence un comportement de filtrage : en effet, certaines fréquences vont être plus ou moins atténuées, ce qui peut conduire à de multiples applications, et pas seulement dans le domaine de l'électronique.

I. Signaux périodiques

I.1 Définitions et exemples

Définition

On dit qu'un signal $s(t)$ est **périodique de période T** si :

$$s(t + T) = s(t) \quad \forall t \quad (7.1)$$

On parle de signal **pseudo-périodique** si un phénomène se produit périodiquement, tout en ne vérifiant pas la condition précédente à tout instant, par exemple un pendule qui oscille repasse à chaque instant par la position verticale, mais son amplitude décroît.

I.2 Grandeurs usuelles d'un signal périodique

a) Valeur moyenne

Définition ♥

Soit un signal périodique $s(t)$ de période T . La valeur moyenne de ce signal est définie par :

*

$$s_{\text{moy}} = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt \quad \forall t_0 \quad (7.2)$$

En général on prend $t_0 = 0$ mais ce n'est pas obligatoire. Cette formule est à connaître par cœur.

Exercice

Représenter le signal $s(t)$ périodique, de période T , valant 5 pour $t \in [0; 0,8T[$ et -3 pour $t \in]0,8T; T]$. Calculer alors la valeur moyenne de ce signal.

b) Valeur efficace d'un signal périodique

Définition ♥

Soit un signal périodique $s(t)$ de période T . La valeur efficace de ce signal est définie par :

*

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt} \quad \forall t_0 \quad (7.3)$$

Cette formule est également à connaître par cœur.

c) Cas d'un signal sinusoïdal

Exercice

Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace pour le signal $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)$ (à savoir refaire) :
Valeur moyenne :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s_0 \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{T} \left[\frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\omega} \right]_0^T = \frac{1}{2\pi} (\sin(\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)) = 0 \quad (7.4)$$

car $\omega T = 2\pi$.

Valeur efficace :

$$s_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T s_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt \quad (7.5)$$

soit en linéarisant, avec $\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi))$:

$$s_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2T} s_0^2 \left(\underbrace{\int_0^T dt}_{=T} + \underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi) dt}_{=0} \right) = \frac{s_0^2}{2} \quad (7.6)$$

On peut expliquer pourquoi on parle de valeur efficace à partir des notions d'électricité. Supposons que l'on calcule la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance alimentée sous une tension sinusoïdale. On a alors $u(t) = E \cos(\omega t)$, donc $P = \frac{u^2(t)}{R} = \frac{E^2}{R} \cos^2(\omega t)$. Cette puissance varie au cours du temps, mais on peut calculer sa valeur moyenne :

$$\langle P \rangle = \frac{E^2}{R} \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{E^2}{2R} \quad (7.7)$$

La valeur obtenue est identique, et donc aussi « efficace », au cas où la résistance est alimentée sous une tension continue U_{eff} telle que $P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$ avec $U_{\text{eff}} = \frac{E}{\sqrt{2}}$. Or, justement,

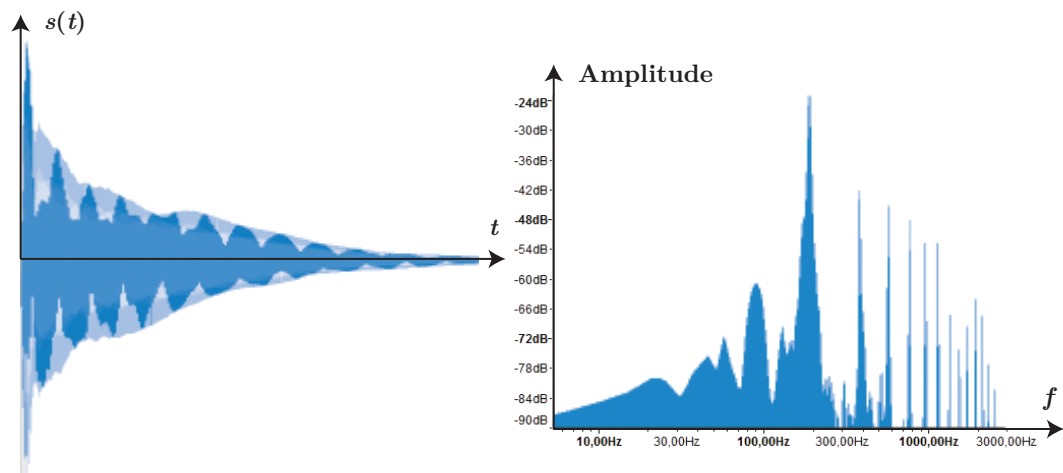
$$\sqrt{\langle E^2 \cos^2(\omega t) \rangle} = \sqrt{\frac{E^2}{2}} = \frac{E}{\sqrt{2}} = U_{\text{eff}}.$$

I.3 Décomposition en série de Fourier

La représentation temporelle d'un signal périodique n'a assez peu d'intérêt, car au bout d'une période, on connaît complètement le signal vu qu'il se répète dans le temps décalé d'un multiple de la période T . On va plutôt s'intéresser à l'aspect **spectral** du signal, à savoir quelles fréquences sont présentes dans le signal. Par exemple, on sait qu'un son émis par un instrument est souvent lié à plusieurs fréquences.

a) Notion de spectre

Pour un signal quelconque non forcément périodique, on peut tracer un **spectre** dit continu, où sont représentées l'importance de chaque fréquence dans le signal. L'enregistrement sonore d'une guitare et le spectre associé est représenté ci-dessous :



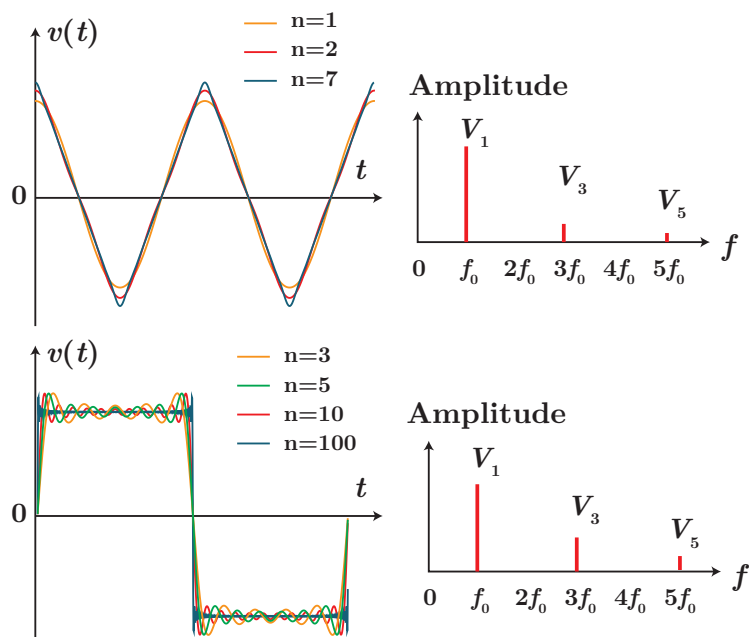
On constate que certaines fréquences semblent plus prononcées que d'autres, que l'on peut associer à des harmoniques particulières. D'un point de vue concret, les harmoniques jouent un rôle très important dans la perception d'un son, comme l'illustre l'exemple d'un son de piano à corde pincée ou corde frappée.



Manipulation

Simulation : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/0ndes/general/synthese.html

Plusieurs exemples sont représentés ci-dessous pour des signaux fréquemment rencontrés (triangle et créneau). Les spectres présentés sont discrets, car composés d'un nombre restreint de « pics ».



Selon le nombre d'harmoniques, on obtient un signal plus ou moins proche de la réalité. Plus le signal possède des variations brutales, plus il faudra d'harmoniques pour le décrire.

b) Décomposition de Fourier

Propriété : développement en série de Fourier (♥)

Tout signal périodique de fréquence f_s se décompose en une somme infinie de sinusoïdes de fréquences multiples de f_s appelé **développement / décomposition en série de Fourier**

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n) \quad (7.8)$$

où

- S_0 est la composante continue du signal, cela correspond même à sa **valeur moyenne**
- $f_s = \frac{1}{T}$ et S_1 caractérisent la fréquence et l'amplitude de ce qu'on appelle le mode **fondamental** ;
- pour $n \geq 2$ on parle d'**harmoniques de rang n** : ils correspondent à des signaux de fréquence multiple du fondamental $f_n = n f_s$.
- φ_n sont les déphasages à $t = 0$ pour chaque harmonique de rang n .

On s'arrange souvent pour que $S_n > 0$, en utilisant le déphasage adapté $(-\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi + \pi))$.



Exercice

Tracer l'allure du spectre du signal $s(t) = 2 + \frac{1}{2} \cos(\pi t + 0,5) + 3 \cos(3\pi t) + 2 \sin(5\pi t)$.



Exercice

Tracer l'allure du spectre du signal $s(t) = \cos^2(\omega t)(1 + \cos(\omega t))$.

Le développement conduit à $s(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t)$

c) Valeur efficace d'un signal périodique

Pour un signal périodique quelconque, on peut se demander quelle serait sa valeur efficace. Si on reprend l'exemple de la résistance électrique, soumise à une tension $u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} U_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n)$. La puissance qu'elle reçoit s'écrit $\mathcal{P} = u(t)i(t) = \frac{u^2(t)}{R}$, soit en moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$.

On admet que la puissance fournie par $u(t)$ est la somme des puissances fournies par ses harmoniques soit :

$$\frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = \sum \frac{U_{n,\text{eff}}^2}{R} \iff U_{\text{eff}}^2 = \sum U_{n,\text{eff}}^2 \quad (7.9)$$

Si on détaille :

- pour la valeur moyenne $U_{0,\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 dt = U_0^2$;
- pour le fondamental ou chaque harmonique $U_{n,\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_n^2 \cos^2(2\pi n f_s t + \varphi_n) dt = \frac{U_n^2}{2}$ en reprenant le même calcul que pour un seul signal sinusoïdal (c'est logique car pour les harmoniques, on considère le calcul de la valeur efficace pour n périodes, sur le temps T).

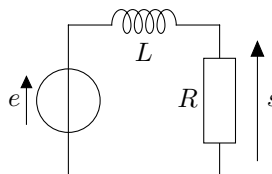
D'où l'égalité dite de Parseval, formule donnant l'expression de la valeur efficace d'un signal périodique et traduisant la conservation de la puissance :

$$U_{\text{eff}}^2 = U_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{U_n^2}{2} \quad (7.10)$$

II. Étude d'un filtre simple

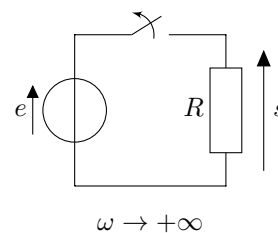
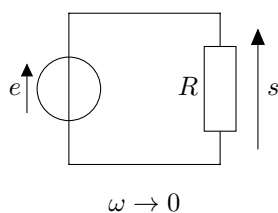
II.1 Étude qualitative : comportement asymptotique

Considérons un circuit du premier ordre : le circuit RL série. Étudions le comportement de la tension aux bornes du condensateur, et faisons varier la fréquence du générateur basses fréquences, de tension $\underline{e} = E e^{j\omega t}$. Dans un premier temps, regardons à très basse fréquence et très haute fréquence : on parle de **comportement asymptotique**.



On peut tracer deux schémas à basse et hautes fréquences en remplaçant respectivement la bobine soit par un interrupteur fermé, soit un interrupteur ouvert :

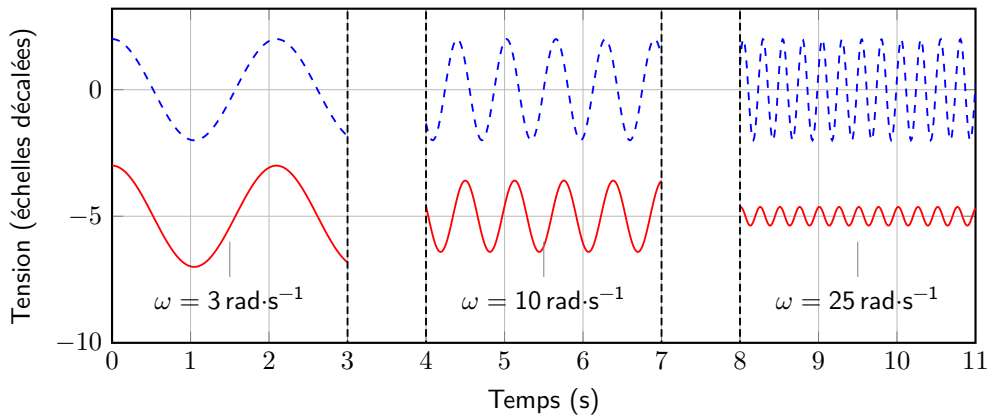
*



Ainsi pour $\omega \rightarrow 0$, $s = e$, et pour $\omega \rightarrow +\infty$ $s = 0$ (pas de courant). On qualifie le système de filtre passe-bas : à haute fréquence le signal d'entrée n'est pas transmis.

II.2 Étude en fréquence

Des mesures expérimentales, pour $\frac{R}{L} = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, sont représentées ci-dessous :



Pour les interpréter, passons en complexe, et déterminons l'expression de la tension aux bornes de la résistance en régime forcé. Par une relation de pont diviseur :

$$\underline{s} = \underline{S}_m e^{j\omega t} = \frac{R}{jL\omega + R} \underline{e} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega} \underline{e} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \underline{e} \Rightarrow \underline{S}_m = \frac{E}{1 + j\omega\tau} \quad (7.11)$$

Par conséquent l'amplitude de sortie vaut $S_m = \frac{E}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$ et $\varphi = -\arctan \omega\tau$.

Introduisons une pulsation caractéristique du système $\omega_{RL} = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, donc :

$$\underline{S}_m = \frac{E}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{RL}}} \quad (7.12)$$

Discutons qualitativement :

- pour $\omega \ll \omega_{RL}$, $\underline{S}_m \simeq E$ donc $S_m = E$ et $\varphi = \arg(\underline{S}_m) = 0$ donc $s(t) \simeq e(t)$;
- pour $\omega \gg \omega_{RL}$, $\underline{S}_m \simeq \frac{E}{j\frac{\omega}{\omega_c}} = -j\frac{\omega_c E}{\omega}$, donc $\underline{S}_m = \frac{\omega_c E}{\omega} \ll E$ et $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$.

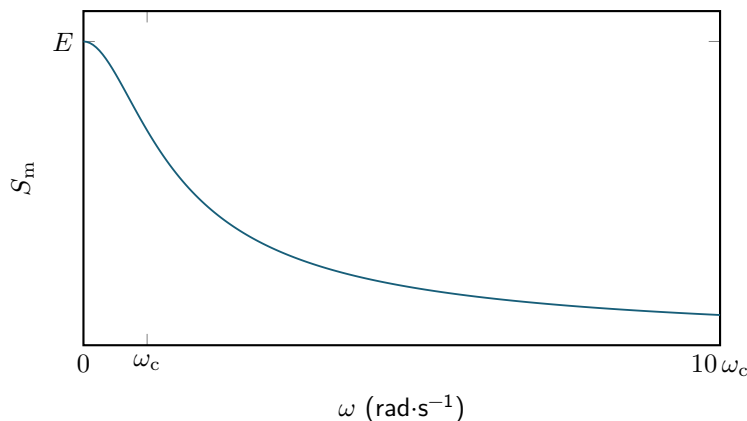
*

Par conséquent, pour des pulsations petites devant ω_{RL} , le signal d'entrée est intégralement transmis sans déformation, tandis que pour des pulsations grandes devant ω_{RL} , le signal de sortie est déphasé, d'amplitude très petite devant celle du générateur : c'est pour cela qu'on qualifie bien le circuit RL série avec la sortie aux bornes de la résistance de **pas-se-bas**.

II.3 Représentations graphiques

a) Représentation linéaire

Afin d'observer de manière rapide l'effet du filtre sur un signal sinusoïdal, on peut représenter l'amplitude en fonction de la pulsation ω :



Ainsi on peut connaître rapidement *via* ce graphique les variations d'amplitude selon la pulsation du signal d'entrée du filtre. Cependant, il manque clairement de précision si on souhaite savoir pour quelle pulsation l'amplitude est divisée par 100, ou 1000.

b) Représentation logarithmique

On va alors utiliser une autre échelle : le décibel. Il s'agit d'une unité de grandeur sans dimension, définie comme 10 fois le logarithme décimal du rapport entre deux puissances. Étant donné le lien entre puissance et tension ($P = u^2/R$ pour une résistance), on exprimera des grandeurs en décibel en effectuant le rapport de tensions de « sortie » (ici la tension aux bornes du condensateur) sur celle d'« entrée » (générateur) :

$$G_{dB} = 10 \log \frac{P_s}{P_e} = 10 \log \frac{u_s^2}{u_{e,m}^2} = 20 \log \left(\frac{u_{s,m}}{u_{e,m}} \right) = 20 \log \left(\frac{S_m}{E} \right) \quad (7.13)$$

On parle alors de **gain en décibel**. Plusieurs valeurs sont à retenir :

- * si S_m/E est multiplié par $\sqrt{2}$, on ajoute au gain logarithmique initial la quantité $20 \log(\sqrt{2}) = 10 \log(2)$ soit environ 3 dB ;
- si S_m/E est multiplié par 10, on ajoute au gain logarithmique initial 20 dB ;
- si S_m/E est divisé par 10, on enlève au gain logarithmique initial 20 dB.

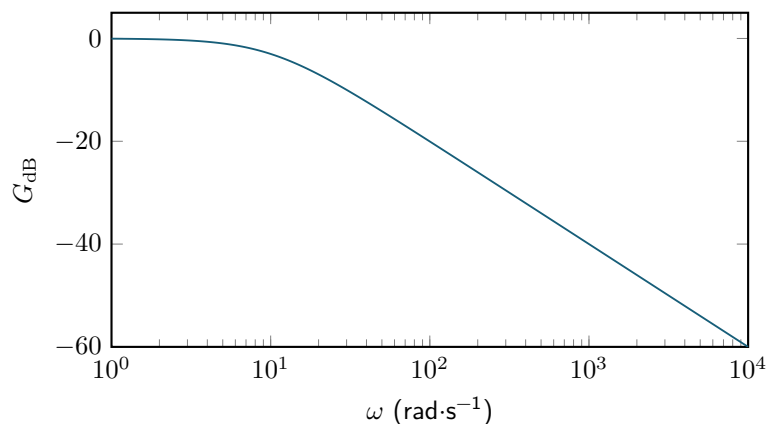


Exercice

Que vaut S_m/E lorsque $G_{dB} = 0$ dB ? $G_{dB} = 20$ dB ? $G_{dB} = 100$ dB ? $G_{dB} = -40$ dB ? $G_{dB} = -60$ dB ?

Respectivement 1, 10, 10^5 , 10^{-2} , 10^{-3} .

On peut alors tracer le même graphique que précédemment, mais on va utiliser une échelle logarithmique également pour l'axe des abscisses, de sorte à représenter sur une plus grande plage de fréquence l'évolution de l'amplitude :



Exercice

Pour quelle pulsation, en fonction de ω_{RL} , le signal en sortie est divisé par 10 ? par 100 ? par 1000 ?

Le signal de sortie est divisé par 10 lorsque $G_{dB} = -20$ dB, donc pour $\omega = 10^2 \text{ rad.s}^{-1} = 10\omega_{RL}$.
Divisé par 100 pour $100\omega_{RL}$, et par 1000 pour $1000\omega_{RL}$.

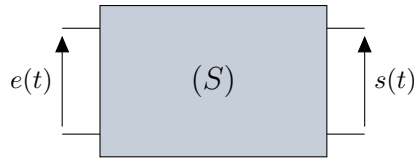
III. Principes du traitement des signaux

III.1 Cadre d'étude

On va dans toute la suite s'intéresser à un système (S) possédant deux caractéristiques fondamentales :

- ses propriétés sont **indépendantes du temps** (d'un point de vue mécanique, cela revient à considérer que les composants mécaniques tels les ressorts ou vérins vont garder leurs propriétés mécaniques inchangées au cours du temps malgré leur utilisation pouvant être intensive) ;

- il a un comportement **linéaire**, cela sous-entend a priori que (S) est régi par une **équation différentielle linéaire** pour décrire le lien entre la variable d'entrée $e(t)$ (tension du générateur, excitation d'une extrémité d'un ressort) et celle de sortie $s(t)$ (tension aux bornes du condensateur, de la résistance, ..., position de la masse du système masse-ressort).



* Ce dernier point est très important. Cela signifie que si un signal entrant $e_1(t)$ devient $s_1(t)$ en sortie, et qu'il en est de même pour le couple $(e_2(t), s_2(t))$, alors pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ quelconques, $\lambda e_1 + \mu e_2$ devient en sortie du système $\lambda s_1 + \mu s_2$.

Cette propriété permet de justifier la suite de notre étude, où nous allons chercher à connaître la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale de la forme $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$, pour toute pulsation ω . Ainsi, d'après la décomposition en série de Fourier d'un signal périodique, il suffira de sommer la réponse du système pour chaque composante sinusoïdale du signal.

Le chapitre va s'appuyer majoritairement sur des exemples électriques, même s'il sera possible d'appliquer de nombreux raisonnements à d'autres types de systèmes.

III.2 Notion de gabarit

a) Gain d'un système

Il est parfois souhaitable de supprimer d'un signal des composantes indésirables (des harmoniques élevées, par exemple). On emploie alors des **filtres** mécaniques, électroniques voire numériques.

Pour quantifier l'influence d'un filtre sur un signal de pulsation ω , on introduit le **gain**. Deux définitions sont utiles, en **utilisant les notations complexes** :

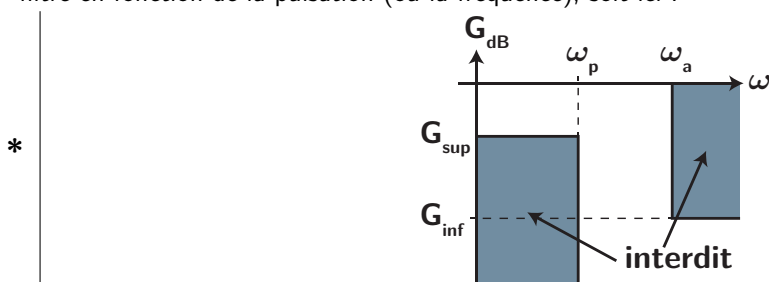
- le **gain linéaire** : on compare l'amplitude de sortie avec l'amplitude du signal d'entrée $\left| \frac{s(\omega)}{e(\omega)} \right|$.
S'il est plus grand que 1, le filtre amplifie cette pulsation, s'il est plus petit que 1 il atténue (ou filtre) cette pulsation.
- le **gain logarithmique** ou **gain en décibel** G_{dB} , dont l'unité est le décibel (dB) tel que $G_{dB} = 20 \log \left(\left| \frac{s(\omega)}{e(\omega)} \right| \right)$.

b) Construction d'un gabarit

Avant la mise en place d'un filtre, il faut définir le **cahier des charges**, c'est-à-dire les critères choisis pour le filtrage. Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas, laissant passer uniquement les basses fréquences. On fixe pour objectif que :

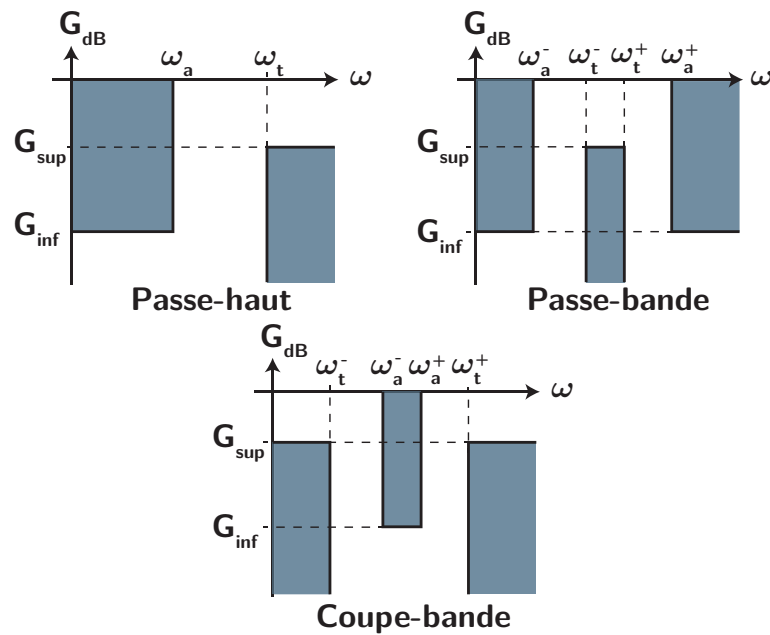
- pour $0 < \omega < \omega_p$ le signal doit être assez peu atténué, ce qui implique un gain en décibel minimal, soit $G_{dB} > G_{sup}$;
- pour $\omega > \omega_a$ le signal doit atténuer suffisamment, ce qui implique un gain maximal de $G_{dB} < G_{inf}$ avec évidemment $G_{inf} < G_{sup}$.

Le gabarit est alors la représentation graphique des zones autorisées ou interdites pour le gain du filtre en fonction de la pulsation (ou la fréquence), soit ici :



c) Exemples de gabarits

De la même façon on peut définir d'autres types de gabarits eu égard à leur fonction :



Voyons maintenant comment construire de tels filtres vérifiant ces gabarits.

IV. Action d'un filtre sur un signal

IV.1 Définitions

a) Fonction de transfert

Définition : fonction de transfert

Pour un système linéaire soumis à un signal d'entrée $\underline{e}(\omega) = E e^{j\omega t}$ sinusoïdal de pulsation ω , fournissant un signal de sortie $\underline{s}(\omega) = S_m e^{j(\omega t + \varphi)}$, on définit la **fonction de transfert** $\underline{H}(\omega)$ comme étant :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(\omega)}{\underline{e}(\omega)} = \frac{S_m}{E} e^{j\varphi} \quad (7.14)$$

Le gain linéaire s'écrit donc $|\underline{H}|$ et le gain en décibel $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|)$.

La fonction de transfert s'écrit sous la forme d'une fraction de deux polynômes complexes de variable ω :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \dots + a_p\omega^p}{b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \dots + b_q\omega^q} \quad (7.15)$$

On dit du filtre caractérisé par cette fonction de transfert qu'il est d'ordre n , avec n le plus grand entier parmi p et q .

Prenons l'exemple d'un circuit RL en régime forcé, où la tension d'entrée correspond au générateur $e(t)$ et la tension de sortie est celle aux bornes de la résistance u_R . D'après ce qui précède :

$$\underline{u}_R = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega} \underline{e} \implies \underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u}_R}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega} \quad (7.16)$$

b) Diagramme de Bode

Afin de quantifier l'effet d'un quadripôle ou d'une association de quadripôles caractérisé par sa fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ et déterminer entre autres s'il répond à un gabarit, il convient de représenter ce qu'on appelle le **diagramme de Bode**.

Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est constitué de deux graphiques :

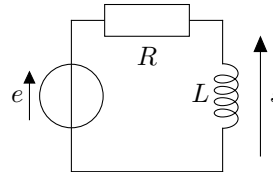
- le diagramme de Bode en amplitude correspondant à la représentation du gain en décibel $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}(\omega)|)$ en fonction de $\log(\omega)$ (ou éventuellement d'une variable réduite $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ s'il intervient une pulsation ω_0 caractéristique, parfois une pulsation propre, parfois une pulsation de coupure, cf. supra.) ;
- le diagramme de Bode en phase où on trace le déphasage $\varphi = \arg(\underline{H}(\omega))$ en fonction de la même variable.

Souvent la variable choisie est la pulsation ω , mais rien n'empêche de raisonner avec la fréquence.

IV.2 Étude d'un filtre

a) Comportement asymptotique

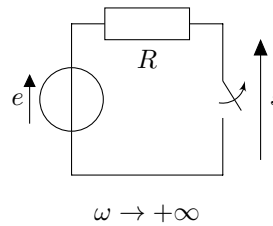
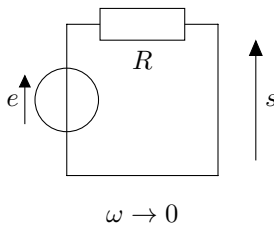
Prenons l'exemple du circuit RL avec sortie sur L .



Exercice

Déterminer la fonction de ce filtre à l'aide du comportement asymptotique des dipôles.

D'un point de vue asymptotique, on peut tracer deux schémas à basse et hautes fréquences en remplaçant la bobine soit par un fil, soit un interrupteur ouvert :



Ainsi pour $\omega \rightarrow 0$, $s = 0$ (fil), et pour $\omega \rightarrow +\infty$ $s = e$ d'après la loi des mailles comme le courant est nul dans le circuit. Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

b) Fonction de transfert

Exercice

Déterminer la fonction de transfert du filtre.

La fonction de transfert s'obtient à l'aide de la relation du pont diviseur de tension : $\underline{s} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} e = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} e$, soit

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_{RL}}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{RL}}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_{RL}}{\omega}} \quad (7.17)$$

en posant $\omega_{RL} = \frac{R}{L}$.

c) Pulsation de coupure

Pulsation de coupure

*

Pour un filtre de type passe-bas ou passe-haut, on définit la **pulsation de coupure à -3 dB** comme étant la pulsation ω_c vérifiant :

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,max} - 3 \Leftrightarrow |\underline{H}|(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad (7.18)$$

* Ici la pulsation caractéristique introduite précédemment est cohérente avec cette définition :
 $|H|(\omega_{RL}) = \left| \frac{1}{1-j} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, avec $H_{\max} = 1$. $\omega_{RL} = \omega_c$ est donc la pulsation de coupure de ce filtre passe-haut.

Il faut être vigilant sur cette définition, car le gain maximal n'est pas toujours de $H_{\max} = 1$, i.e. $G_{dB, \max} = 0$, ce qui peut avoir des conséquences lors du calcul de la pulsation de coupure. Par exemple, si la fonction de transfert s'écrit :



$$\underline{H} = \frac{1}{2 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow H_{\max} = \frac{1}{2} \quad (7.19)$$

$$\text{et } |H|(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}}}, \text{ il vient } \omega_c = 2\omega_0 !$$

d) Calcul et tracé



Exercice

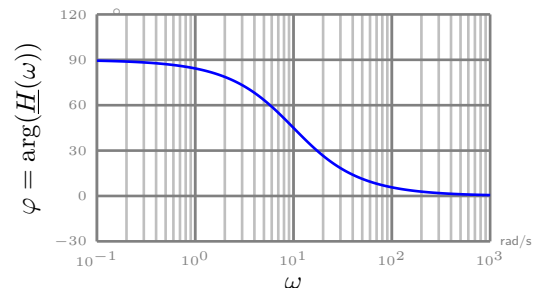
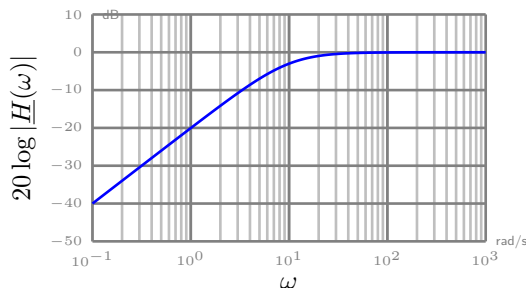
Calculer le gain en décibel et le déphasage à partir de la fonction de transfert.

$$G_{dB} = 20 \log \left(\left| \frac{1}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} \right| \right) = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} \right) = -10 \log \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) \quad (7.20)$$

et le déphasage vaut

$$\varphi = \arg \left(\frac{1}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} \right) = -\arg \left(1 - j\frac{\omega_c}{\omega} \right) = \arctan \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right) \quad (7.21)$$

Ci-dessous sont représentées ces courbes pour $\omega_c = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$:



e) Diagramme de Bode asymptotique

Sans forcément tracer de manière rigoureuse le diagramme de Bode précédent, on peut en donner une allure simplifiée, appelée **diagramme de Bode asymptotique**. On cherche alors à linéariser les expressions de G_{dB} et φ pour différentes gammes de fréquences. Ici on va distinguer deux cas :

- lorsque $\omega \ll \omega_c$, $\underline{H} \simeq \frac{1}{-j\frac{\omega_c}{\omega}} = j\frac{\omega}{\omega_c}$ donc

$$G_{dB} \simeq 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) = 20 \log(\omega) - 20 \log(\omega_c) \quad (7.22)$$

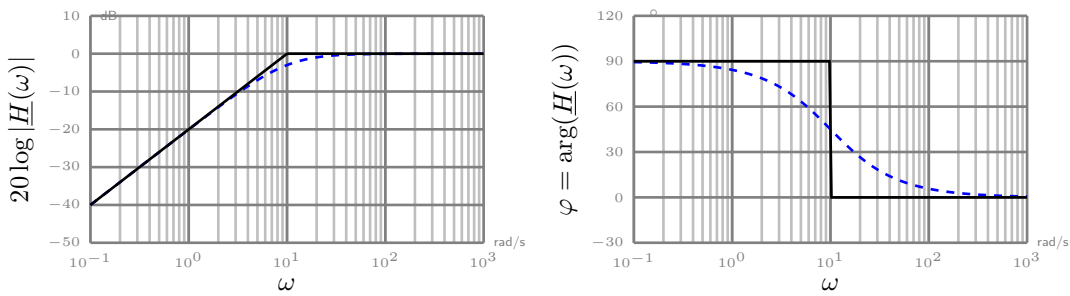
*

correspondant à une droite de pente +20 avec une échelle horizontale logarithmique (c'est-à-dire que la variable horizontale est $\log \omega$). On parle alors d'une pente de +20 dB par décade, car si on multiplie la pulsation par un facteur 10 (une décade), on augmente le gain de 20 dB.

La phase vaut quant à elle $\varphi = \arg \left(j\frac{\omega}{\omega_c} \right) = \frac{\pi}{2}$.

- lorsque $\omega \gg \omega_c$, $\underline{H} \simeq 1$ donc $G_{dB} = 0$ et $\varphi = 0$.

Les expressions limites que l'on a obtenu pour $\omega \ll \omega_c$ et $\omega \gg \omega_c$ permettent de représenter le diagramme asymptotique ci-dessous.



f) Expression du signal en sortie du filtre

Connaissant la fonction de transfert pour une pulsation donnée, on peut exprimer le signal en sortie de filtre en fonction du signal d'entrée $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \psi)$:

$$s(t) = \text{Re}(\underline{s}(t)) = \text{Re}(\underline{H}(\omega) \cdot \underline{e}) = \text{Re}(|\underline{H}(\omega)| e^{j\varphi} E_0 e^{j(\omega t + \psi)}) \quad (7.23)$$

$$= \text{Re}(|\underline{H}(\omega)| E_0 e^{j(\omega t + \psi + \varphi)}) = |\underline{H}(\omega)| E_0 \cos(\omega t + \psi + \varphi) \quad (7.24)$$

$$= |\underline{H}(\omega)| E_0 \cos(\omega t + \psi + \arg(\underline{H}(\omega))) \quad (7.25)$$

Ainsi l'amplitude du signal de sortie est relié au gain linéaire $S_m(\omega) = |\underline{H}(\omega)| E_0$, la fréquence (ou la pulsation) est inchangée par rapport au signal d'entrée, et le déphasage par rapport au signal d'entrée vaut $\arg(\underline{H}(\omega))$.

Si on connaît le gain en décibel, on rappelle que l'obtention du gain linéaire s'obtient en utilisant la fonction réciproque de log, soit $10^{\dots}$: $G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}| \iff |\underline{H}| = 10^{\frac{G_{\text{dB}}}{20}}$.

IV.3 Réponse d'un filtre à un signal périodique quelconque

a) Expression mathématique

On vient de voir l'expression du signal de sortie pour un signal entrant sinusoïdal. En utilisant la **propriété de linéarité des systèmes** étudiés, on peut généraliser à tout signal périodique de la forme

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (7.26)$$

de la manière suivante :

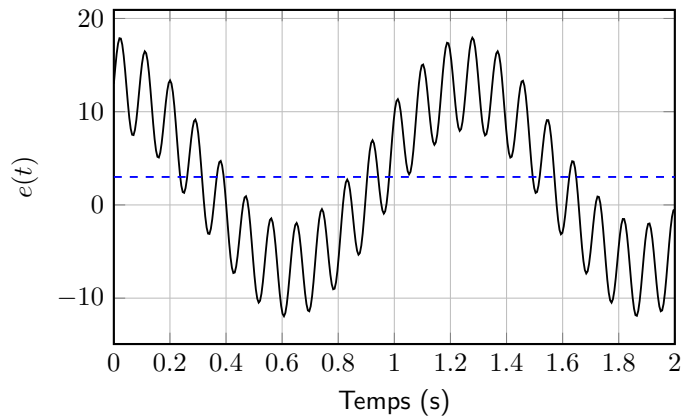
$$s(t) = |\underline{H}(0)| \cos(\arg(\underline{H}(0))) E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} |\underline{H}(n\omega)| E_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \arg(\underline{H}(n\omega))) \quad (7.27)$$

b) Raisonnement graphique

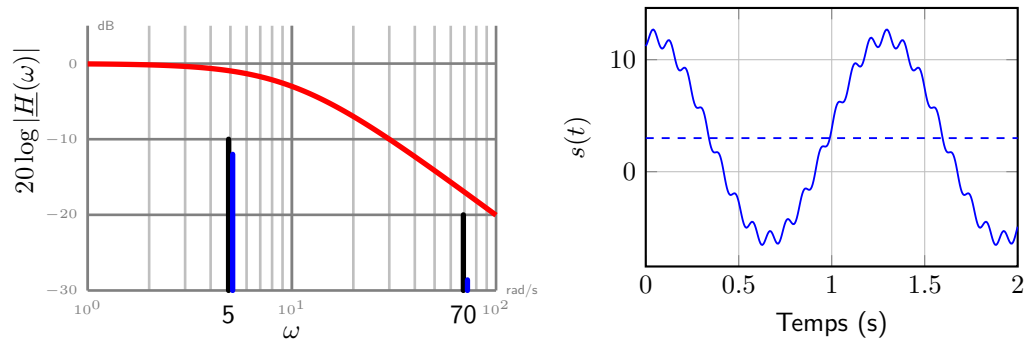
On peut raisonner graphiquement à l'aide de la superposition :

- du spectre en amplitude du signal entrant ;
- du diagramme de Bode en amplitude.

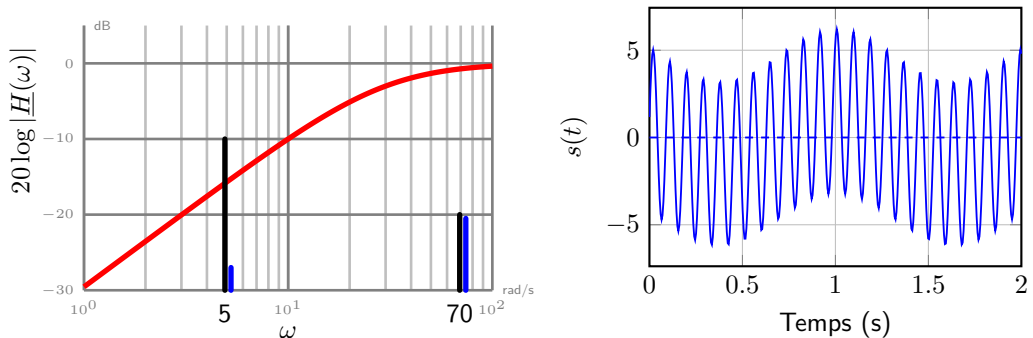
Considérons dans un premier temps la somme de trois signaux $e(t) = 3 + 10 \cos(5t) + 5 \sin(70t)$ avec t en seconde représenté ci-dessous :



- avec un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, le signal en sortie sera majoritairement celui continu auquel s'ajoute celui de pulsation $\omega = 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ très peu modifié, même si ce n'est pas encore parfait pour supprimer la composante haute fréquence ;



- avec un filtre passe-haut de pulsation de coupure $\omega_c = 30 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, le signal en sortie sera majoritairement celui à haute fréquence auquel s'ajoute une partie de celui de pulsation $\omega = 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ atténué et déphasé. Par contre la composante continue a été complètement supprimée. L'allure est donc la suivante :



Il va de soi que pour des cas quelconques, il sera difficile de représenter l'allure du signal, à l'exception des exemples qui suivent.

V. Quelques exemples de filtres

V.1 Filtres d'ordre 1

a) Filtre passe-bas

La fonction de transfert associée à ce filtre est de la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{A}{1 + j\omega\tau} = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{A}{1 + jx} \quad (7.28)$$

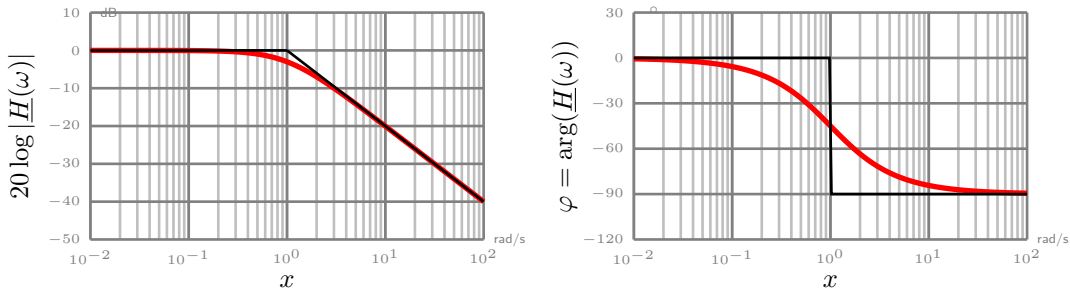
On pose en effet souvent $x = \frac{\omega}{\omega_c} = \omega\tau$ la pulsation réduite avec $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ la pulsation de coupure à -3 dB.

Exemples : circuit RC aux bornes de C, circuit RL aux bornes de R.

Exercice

Déterminer le diagramme de Bode asymptotique :

- pour $\omega \ll \omega_c$, soit $x \ll 1$, $\underline{H}(\omega) \simeq 1$ donc $G_{dB} \simeq 0$ et $\varphi \simeq 0$;
- pour $\omega \gg \omega_c$, $\underline{H}(\omega) \simeq \frac{1}{jx}$ $G_{dB} \simeq -20 \log x$ et $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$. On a donc une droite de pente -20 dB / décade.



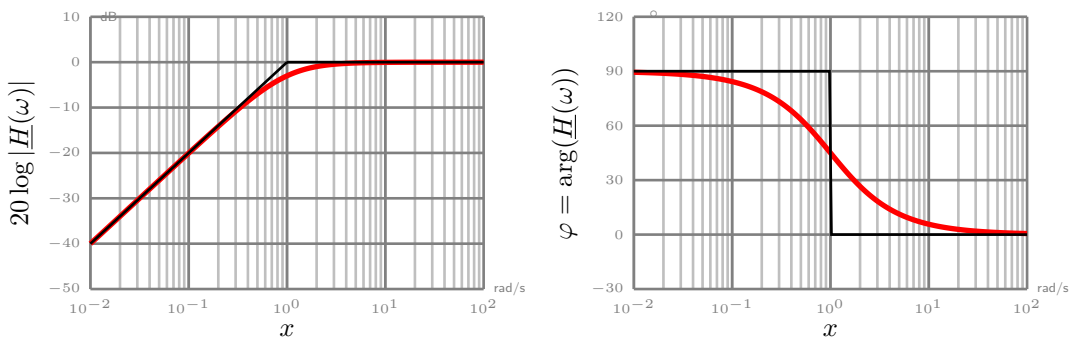
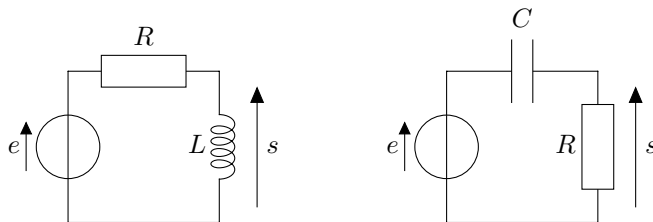
b) Filtre passe-haut

La fonction de transfert associée à ce filtre est de la forme

$$\underline{H}(\omega) = \frac{Aj\omega\tau}{1+j\omega\tau} = \frac{Aj\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{A}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{A}{1+\frac{1}{jx}} \quad (7.29)$$

On pose souvent $x = \frac{\omega}{\omega_c} = \omega\tau$ avec $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ la pulsation de coupure.

Exemples : circuit RL aux bornes de L, circuit RC aux bornes de R.

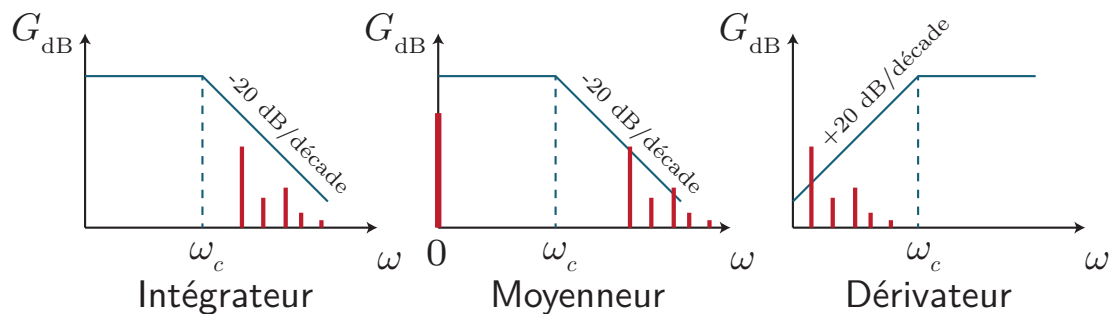


c) Quelques comportements à retenir

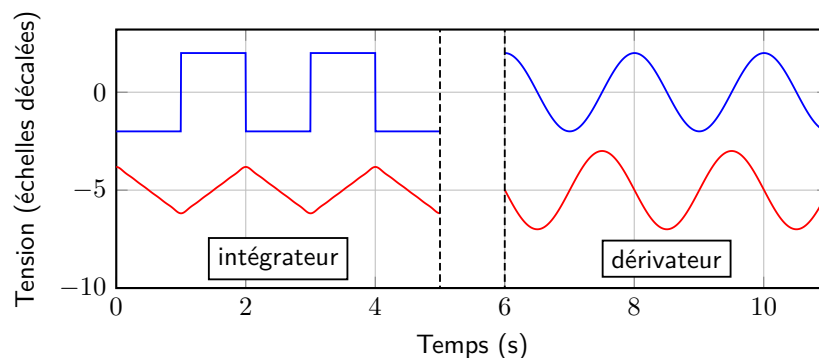
Quelques opérations sur les signaux périodiques sont accessibles avec les deux filtres précédents. On en distingue trois :

*

- Comportement **intégrateur** lorsque $\underline{s} \propto \frac{e}{j\omega}$ car alors $s(t) \propto \int e(t)dt$. On le réalise avec un filtre passe-bas, lorsque la fréquence du fondamental est supérieure à la fréquence de coupure du filtre : toutes les composantes du spectre du signal d'entrée se trouvent dans la pente à -20 dB/décade.
- Moyenueur** lorsque l'on ne garde que la composante continue du signal périodique : on utilise un filtre passe-bas tel que la fréquence du fondamental est très grande devant la fréquence de coupure.
- Comportement **dérivateur** lorsque $\underline{s} \propto j\omega e$ car alors $s(t) \propto \frac{de}{dt}$. Exemple : filtre passe-haut, lorsque la fréquence du fondamental est très petite devant la fréquence de coupure du filtre et que la plupart des composantes du spectre du signal d'entrée se trouvent dans la pente à +20 dB/décade.



Sont illustrés ci-dessous deux comportements, le signal d'entrée étant celui du dessus :



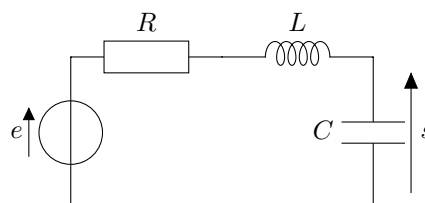
V.2 Filtres du deuxième ordre

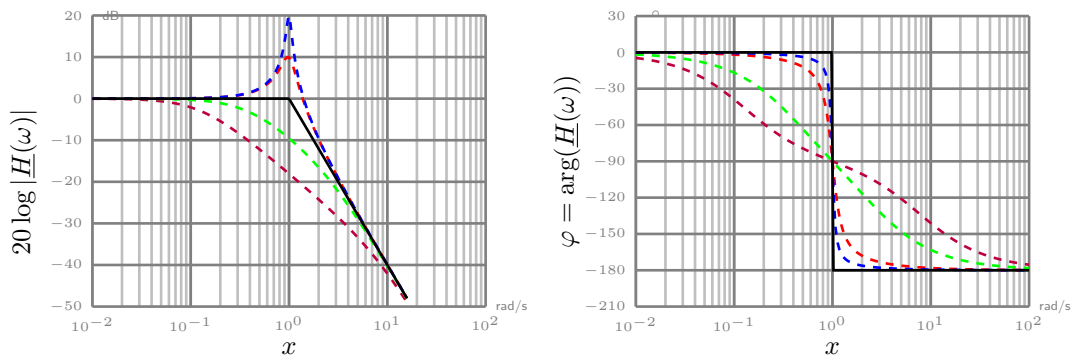
a) Passe-bas

La fonction de transfert associée à ce filtre est de la forme

$$\underline{H}(\omega) = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (7.30)$$

Exemple : circuit RLC avec la sortie aux bornes de C ; système masse-ressort amorti où l'entrée est le support oscillant, et la sortie la position de la masse.





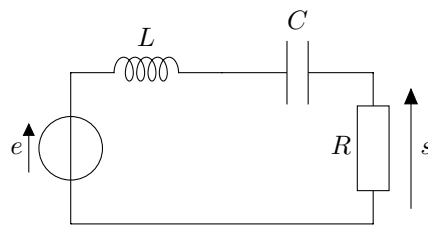
On a déjà rencontré la fonction de transfert dans le cadre de l'étude de la résonance en tension : elle ne se produit que si $Q > 1/\sqrt{2}$.

V.3 Passe-bande

La fonction de transfert associée à ce filtre est $\underline{H}(\omega) = \frac{A}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{A}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$.

On l'a déjà rencontré lors de la résonance en intensité où nous nous étions intéressé à la tension aux bornes de la résistance pour connaître l'intensité complexe.

Exemples : circuit RLC, sortie en R, système masse-ressort amorti où l'entrée est le support oscillant, et la sortie la vitesse de la masse.



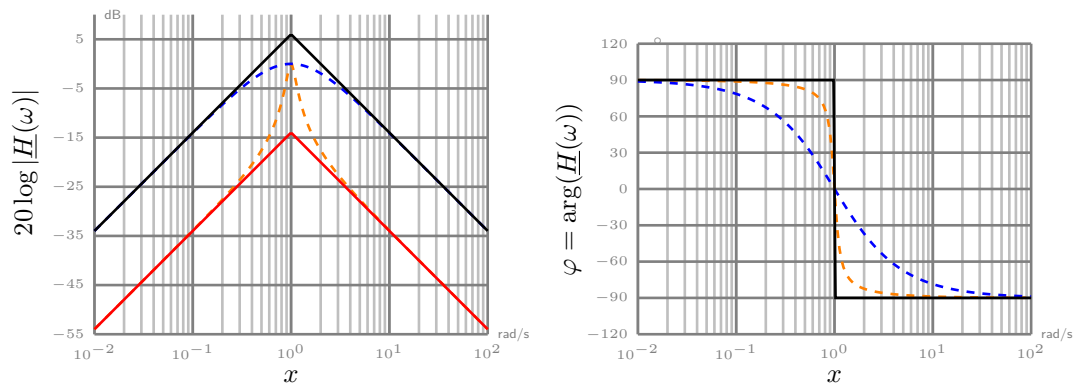
Bande-passante d'un filtre

On définit la bande-passante à -3 dB d'un filtre comme étant l'ensemble des valeurs de ω telles que $G_{dB}(\omega) > G_{dB,max} - 3$ dB, soit encore $|\underline{H}|(\omega) > \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$.

Quelques propriétés à connaître :

- largeur de bande-passante à -3 dB : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ avec ω_0 la pulsation centrale du passe-bande ;
- aux basses fréquences, pour $\omega \ll \omega_0$, on a $\underline{H}(\omega) \simeq \frac{Aj\omega}{Q\omega_0}$, c'est-à-dire un comportement **dérivateur** ;
- * ▪ aux hautes fréquences, pour $\omega \gg \omega_0$, on a $\underline{H}(\omega) \simeq \frac{A\omega_0}{jQ\omega}$, c'est-à-dire un comportement **intégrateur**.

Concernant le tracé asymptotique, on doit distinguer le cas $Q < 1$ ou $Q > 1$. Pour $\omega \ll \omega_0$ et donc $x \ll 1$, $G_{dB}(x \ll 1) \simeq 20 \log\left(\frac{Ax}{Q}\right) = (20 \log A - 20 \log Q) + 20 \log x$. Ainsi selon la valeur de Q l'ordonnée à l'origine de la droite varie : elle vaut $(20 \log A - 20 \log Q)$. La valeur réelle du gain est fixe et vaut : $G_{dB}(x = 1) = 20 \log A$. Ainsi, la position de l'asymptote par rapport à la courbe change si $20 \log Q$ est positif ou négatif. En particulier, si $Q > 1$ l'ordonnée à l'origine en $x = 1$ est négative et la courbe réelle se trouve au-dessus de l'asymptote ; si $Q < 1$ ce sera le contraire, d'où l'allure ci-dessous :

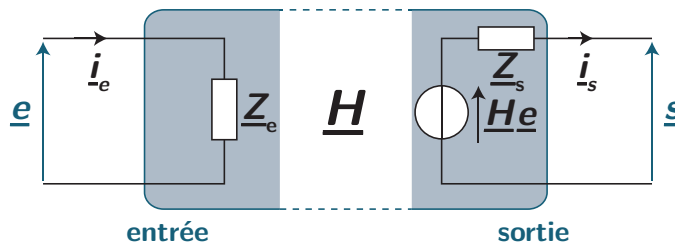


V.4 Association de quadripôles

a) Modélisation d'un quadripôle

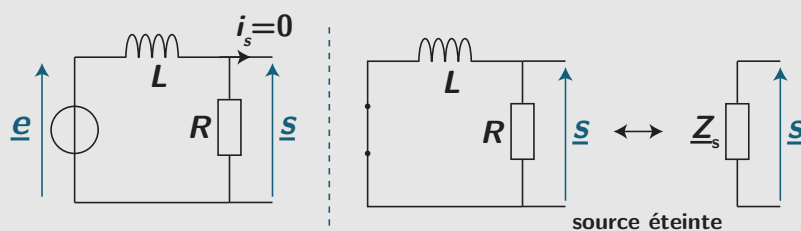
Vu depuis l'extérieur, un quadripôle électrique entrée / sortie peut être vu comme :

- une **impédance d'entrée** $\underline{Z}_e$, calculée à vide, sans brancher de composant sur la sortie du quadripôle ;
- une source réelle d'**impédance de sortie** $\underline{Z}_s$, calculée en court-circuitant l'entrée ($\underline{e} = 0$, on la remplace par un fil), et de **force électromotrice** $\underline{H} \underline{e}$



La fonction de transfert d'un circuit électrique est calculée à vide ($i_s = 0$), c'est-à-dire lorsqu'aucun dipôle n'est connecté au circuit.

Sur l'exemple d'un circuit RL , déterminons les impédances d'entrée et de sortie :



D'un point de vue de l'entrée, l'impédance d'entrée correspond simplement à l'association de deux dipôles en série, donc $\underline{Z}_e = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + jL\omega$.

D'un point de vue de la sortie, **si on court-circuite l'entrée**, les deux dipôles se retrouvent ainsi connectés en dérivation, et l'impédance de sortie traduit cette association : $\underline{Z}_s = \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$.

On a déjà vu l'importance de l'impédance d'entrée lors d'une mesure au voltmètre (chapitre SP5), mais voyons en quoi ces notions sont importantes lors de la mise en cascade.

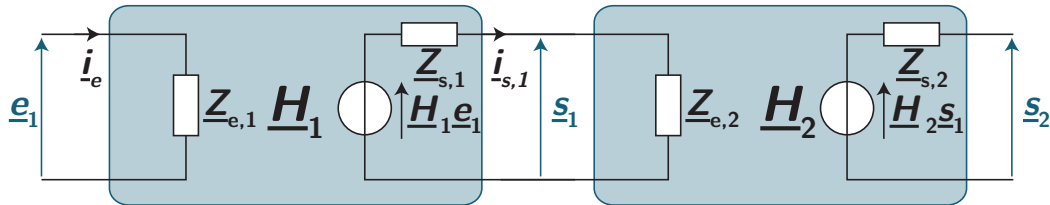
b) Mise en cascade

Lorsqu'on conçoit des filtres complexes, on associe souvent plusieurs quadripôles pour respecter un gabarit. On aimerait bien qu'avec deux quadripôles de fonction de transfert $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$ connectés l'un à l'autre, la fonction de transfert globale soit $\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$. Malheureusement ce n'est pas toujours vrai,

car la fonction de transfert d'un quadripôle est calculée à vide, donc non connecté à un autre circuit, c'est-à-dire qu'il n'y a PAS de courant de sortie : $i_s = 0$.
Qualitativement, on comprend donc que pour que l'on puisse effectuer le produit des fonctions de transfert, il faut minimiser ce courant de sortie.

Association de quadripôles

- * Lorsqu'on relie deux quadripôles de fonction de transfert $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$, la fonction de transfert de l'ensemble s'écrit $\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$ sous réserve que **l'impédance d'entrée du second quadripôle soit très grande devant l'impédance de sortie du premier quadripôle.**



Démonstration

La tension de sortie du premier filtre se déduit avec un pont diviseur de tension

$$\underline{s}_1 = \underline{H}_1 \underline{e}_1 \frac{\underline{Z}_{e,2}}{\underline{Z}_{e,2} + \underline{Z}_{s,1}} \quad (7.31)$$

D'où :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}_2}{\underline{e}_1} = \frac{\underline{s}_2}{\underline{s}_1} \cdot \frac{\underline{s}_1}{\underline{e}_1} = \underline{H}_2 \underline{H}_1 \frac{\underline{Z}_{e,2}}{\underline{Z}_{e,2} + \underline{Z}_{s,1}} \simeq \underline{H}_1 \underline{H}_2 \quad (7.32)$$

à condition que $\frac{\underline{Z}_{e,2}}{\underline{Z}_{e,2} + \underline{Z}_{s,1}} \simeq 1$ soit que $\underline{Z}_{e,2} \gg \underline{Z}_{s,1}$.

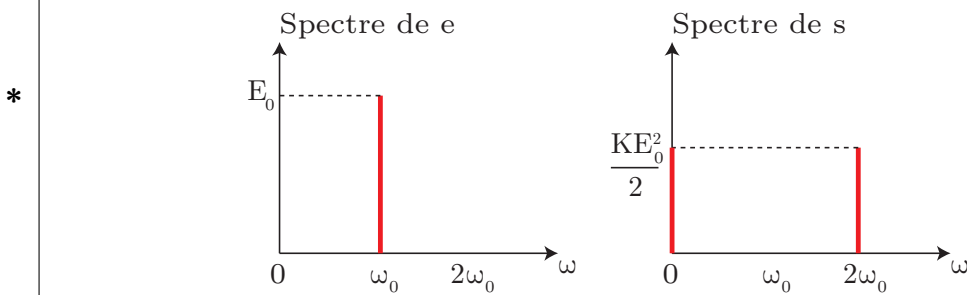
V.5 Cas des systèmes non-linéaires

Un système non-linéaire est un système pour lequel le principe de superposition est mis en défaut. On ne peut alors plus utiliser la notion de fonction de transfert. Citons par exemple le multiplieur de loi entrée-sortie $s(t) = K e_1(t) e_2(t)$ associé à deux entrées e_1 et e_2 , avec K une constante (gain). Un comparateur est un autre exemple de circuit intégré électronique non linéaire, de loi entrée-sortie $s(t) = 5 \text{ V}$ si $e_1(t) > e_2(t)$ et 0 si $e_1(t) < e_2(t)$.

Une caractéristique spectrale des systèmes non-linéaires est l'**enrichissement spectral**. Par exemple pour le multiplieur, si on part d'un signal sinusoïdal $e_1(t) = e_2(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$, le signal de sortie s'exprime :

$$s(t) = K E_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = K E_0^2 \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2} \quad (7.33)$$

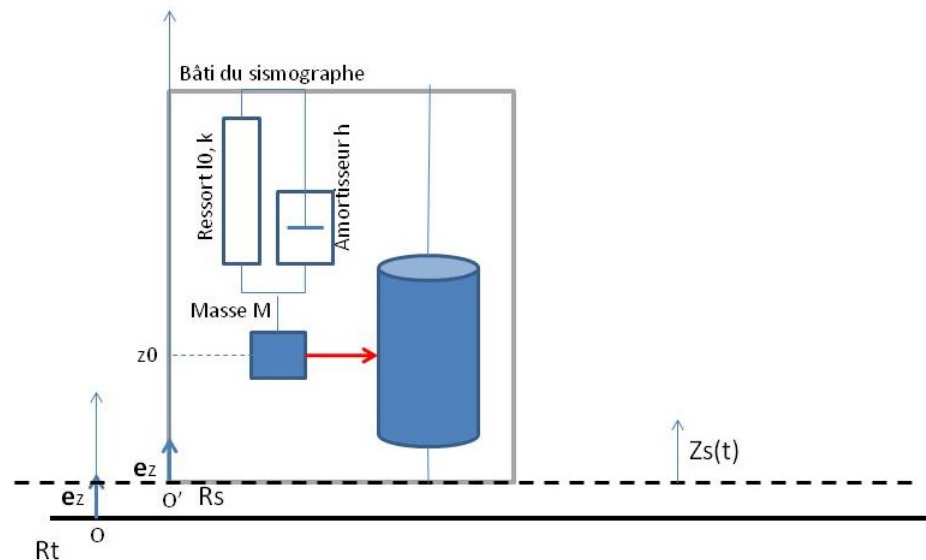
La pulsation ω_0 du signal d'entrée a disparu, alors que deux nouvelles pulsations sont apparues : 0 pour la valeur moyenne et $2\omega_0$.



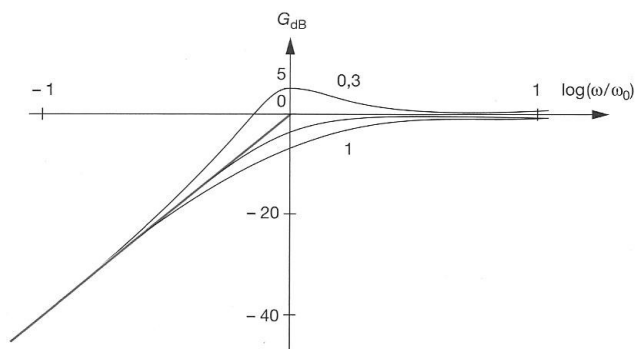
V.6 Filtres mécaniques

Le travail effectué sur les systèmes électriques peut être prolongé sur les systèmes mécaniques. Citons quelques exemples :

- l'amortisseur de voiture, modélisable par un système masse-ressort avec amortissement, est alors un passe-bas du deuxième ordre si on compare l'amplitude d'excitation au niveau de la roue par rapport à celle « reçue » dans l'habitacle. Suivant la valeur du facteur de qualité et de la pulsation propre ω_0 (et donc de la raideur de l'amortisseur et de l'amortisseur hydrauliques), des vibrations pourront plus ou moins se faire sentir ;
- un sismomètre (ou accéléromètre) est un instrument qui enregistre les mouvements du sol. Il en existe de multiples sortes, l'un des plus simples est basé sur une masse oscillante au bout d'un ressort et amortie par frottement fluides. De part les mouvements de la Terre, et donc du bâti, le déplacement de la masse lui sera relié. La mise en équation nécessite de considérer des référentiels non galiléens, hors programme, et l'ajout d'une force complémentaire appelée force d'inertie d'entraînement.



On peut regarder le diagramme de Bode associé au système, en comparant la position de la masse par rapport à celle du bâti :



* | Il s'agit ici d'un filtre passe-haut, l'ordre étant de 2 vu la pente de + 40 dB/décade.

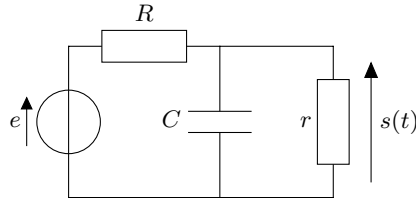
V.7 Simulation numérique de l'effet d'un filtre

Cf. fichiers Python sur le site de la classe.

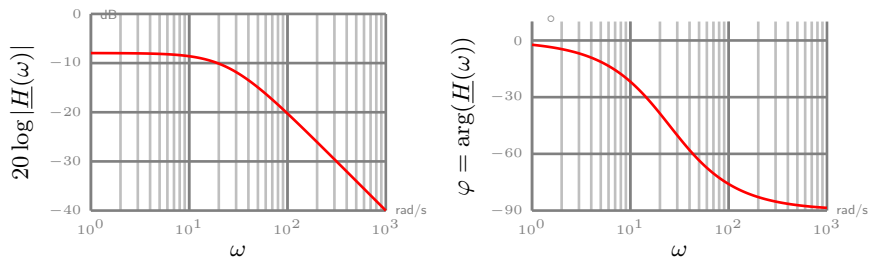
Exercices

7.1 Filtre d'ordre 1

On considère le quadripôle suivant constitué d'une résistance et d'un condensateur de capacité $C = 200 \text{ nF}$ en parallèle avec une résistance r .



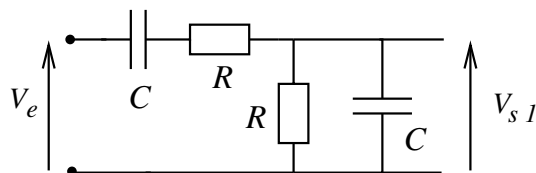
1. Quelle est la nature de ce filtre, sans effectuer de calculs ?
2. Montrer que sa fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ se met sous la forme $\underline{H}(\omega) = \frac{A}{1 + j\omega/\omega_0}$ où l'on précisera l'expression de A et de ω_0 .
3. On donne ci-dessous son diagramme de Bode en phase et en amplitude. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique.



4. Déterminer la valeur des résistances.

7.2 Filtre de Wien

On s'intéresse au circuit ci dessous, appelé filtre de Wien :

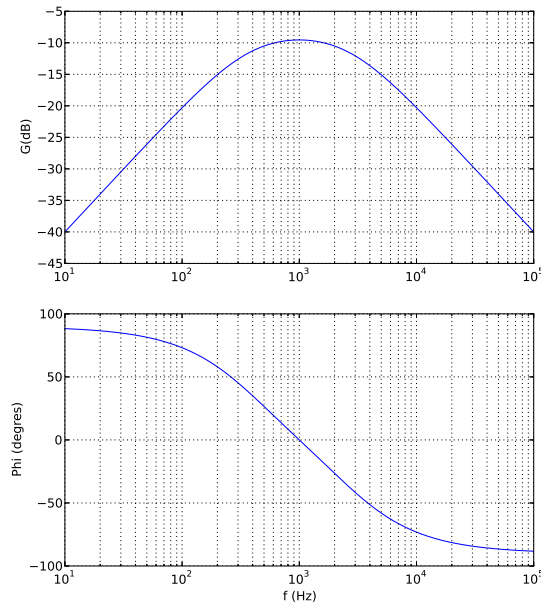


1. En considérant uniquement le circuit électronique, déterminer la nature du filtre.
On admet provisoirement que la fonction de transfert de ce filtre se met sous la forme

$$\underline{H} = \frac{K}{1 + jQ \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)}$$

On donne le diagramme de Bode d'un tel filtre pour $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $C = 159 \text{ nF}$.

2. Dédurre du diagramme les valeurs de K et f_0 .
3. Établir la pente des deux droites asymptotes à hautes fréquences et basses fréquences.
4. Justifier les valeurs du déphasage observées à hautes fréquences, basses fréquences, et pour $f = f_0$.
5. On choisit pour entrée un signal créneau de fréquence $f = 60 \text{ kHz}$, et on constate que la sortie présente une allure en dent de scie. Interpréter ce fait en raisonnant sur la fonction de transfert.
6. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre se met sous le forme annoncée en explicitant K , Q et ω_0 . Vérifier les valeurs trouvées à la question 2.

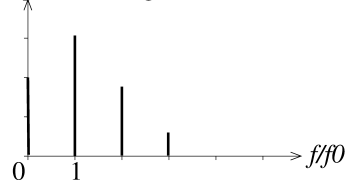


7.3 Linéarité et caractéristiques d'un filtre

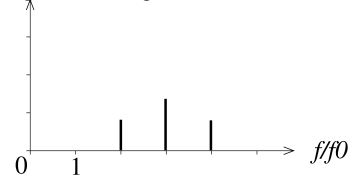
On considère un signal $e(t)$, dont le spectre est donné ci-contre. Ce signal est envoyé à l'entrée de 3 filtres 1, 2 et 3. On donne ci-dessous les spectres obtenus à la sortie de chaque filtre.

1. Préciser pour chaque filtre s'il est linéaire ou non linéaire.
2. Préciser le type de chaque filtre et un ordre de grandeur des fréquences de coupure.

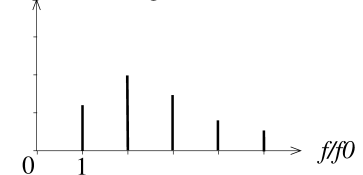
Spectre du signal de sortie 1



Spectre du signal de sortie 2



Spectre du signal de sortie 3



1. Seul le 3e est non-linéaire, car il y a apparition de nouvelles fréquences dans le spectre de sortie.
2. Filtre 1 : passe-bas car la composante continue n'est pas filtrée, les hautes fréquences atténuées, $f_c \simeq 2 - 3f_0$. Filtre 2 : passe-haut ou passe-bande et $f_c \simeq 3f_0$, mais sans doute un ordre élevé ou Q grand pour filtrer aussi efficacement la fréquence f_0 . Filtre 3 : on ne peut rien dire, c'est non-linéaire.

7.4 Étude d'un pH-mètre

Un pH-mètre est composé d'une électrode de verre, qui délivre un signal électrique fonction affine du pH ($v = A + B \cdot pH$) où A et B sont des constantes ajustées dans les étapes d'étalonnage. Du fait de la proximité de dispositifs agitateurs, un signal électrique de fréquence égale à 4 Hz se superpose au signal utile. On utilise donc un filtre passe-bas en vue d'atténuer l'ondulation parasite. Sa fonction de transfert est de la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau}$$

1. Quelle valeur de H_0 choisir, si l'on ne veut pas modifier la tension utile par le filtrage, lorsque la solution présente un pH constant ?
2. Quelle valeur, notée τ_1 , de constante de temps τ permet d'atténuer l'oscillation parasitée d'un facteur 10 ? Faire de même avec un facteur 100 (on notera alors la constante de temps τ_2). Calculer les fréquences de coupure associées.
3. Le pH de la solution peut varier lentement dans le temps avec une fréquence $f \ll 4$ Hz. Quel est l'inconvénient d'utiliser une constante de temps τ élevée ? On illustrera le phénomène en représentant l'allure du signal en sortie pour $\tau = \tau_1$ puis $\tau = \tau_2$ avec $f = 0,2$ Hz.

7.5 Gabarit de filtre passe-bas

Un dispositif de traitement de signaux acoustiques nécessite la séparation de composantes sonores et ultra-sonores. On réalise un filtre passe-bas de fréquence de coupure 20 kHz. L'atténuation dans la bande-passante est limitée à -3 dB et on impose qu'à partir de la fréquence 40 kHz, l'atténuation soit supérieure à -10 dB.

1. Représenter le gabarit du filtre, d'après les indications de l'énoncé.
2. Un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_c = 20$ kHz convient-il ?
3. Même question avec la fonction de transfert

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

où $\omega_c = 2\pi f_c$.

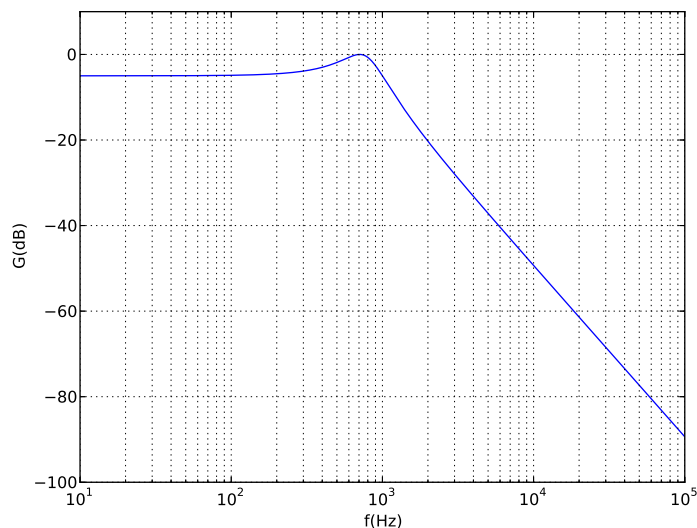
7.6 Récupération d'une fréquence

On récupère lors d'une mesure au radar un signal reçu $e_1(t)$ de fréquence f_1 , à la suite de l'émission d'un signal $e_0(t)$ de fréquence f_0 . On cherche à obtenir expérimentalement l'écart en fréquence Δf sachant $f_1 = f_0 + \Delta f$ avec $\Delta f \ll f_0$. Cela peut être assez facilement mise en œuvre au laboratoire avec des ondes sonores ou ultra-sonores, mais présente de lourds inconvénients si le signal est un train d'impulsions électromagnétiques de fréquence très élevée ($f_0 \approx 10$ GHz). Pour pallier à ce défaut, on doit utiliser une autre méthode de traitement du signal en effectuant deux transformations :

- $e_1(t)$ est d'abord multiplié au signal initial $e_0(t)$. Cette opération est réalisée par un composant nommé multiplieur qui fournit le signal $p(t) = K e_0(t) e_1(t)$.
- $p(t)$ est ensuite modifié par un filtre passe-bas, dont on cherche à déterminer les caractéristiques dans la suite. Le signal $s(t)$ est maintenant celui à la sortie de ce filtre passe-bas.

Pour simplifier, nous allons considérer que les signaux émis par l'émetteur et reçus par le détecteur sont sinusoïdaux : $e_0(t) = e_0 \cos(\omega_0 t)$ et $e_1(t) = e_1 \cos(\omega_1 t + \varphi)$.

1. Montrer que $p(t)$ est la somme de deux signaux sinusoïdaux dont on précisera les fréquences. Montrer que l'une de ces fréquences est très supérieure à l'autre (on les notera f_- et f_+ dans la suite). Représenter graphiquement l'allure du spectre de p .
2. On souhaite conserver uniquement la composante de fréquence la plus faible de p . Pour cela, on utilise un filtre passe-bas. On envisage tout d'abord un filtre d'ordre 2 - nommé filtre de Tchebychev - dont on donne le diagramme de Bode, ainsi que le carré du module de la fonction de transfert :



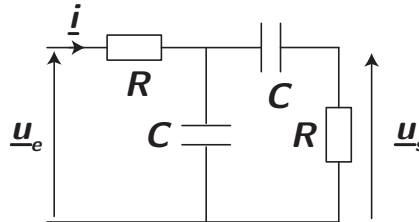
$$|\underline{H}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right)^2}$$

- (a) En utilisant le diagramme, déterminer la valeur de ε .

- (b) Déterminer la valeur de la pente de l'asymptote à haute fréquence via le diagramme, et comparer à la valeur théorique.
- (c) On souhaite que le filtre vérifie les deux conditions suivantes : les signaux inférieurs à 1 kHz doivent conserver une amplitude au moins égale à $1/3$ de leur amplitude initiale, et les signaux supérieurs à 20 kHz doivent être atténués d'un facteur au moins 5000. Ce filtre permet-il cela ? On répondra à cette question en représentant graphiquement le gabarit du filtre sur le document réponse. Il est demandé de justifier les tracés.

7.7 Cascade de filtres

En vue de réaliser un filtre passe-bande, on associe en cascade deux filtres RC (cf schéma ci-dessous). On pose $\tau = RC$.



1. Préciser la nature et l'ordre de chacun des filtres RC.
2. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre se met sous la forme

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

avec x de la forme ω/ω_0 . Préciser la valeur de ω_0 , H_0 et Q . On pourra d'abord chercher la tension aux bornes de l'association C et $(C$ et R en série).

3. Quelle est l'expression de la bande-passante en fonction de R et C ?
4. Déterminer le diagramme de Bode asymptotique et justifier le rôle du filtre.
5. Quelles fonctions de transfert obtient-on pour chacun des étages pris isolément, noté $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$?
6. Que donne le produit de ces deux fonctions de transfert ? Commenter et essayer de déterminer une explication.
7. On introduit un signal triangulaire de période T . Préciser l'allure du signal en sortie du filtre selon que $T \gg 2\pi\tau$ ou $T \ll 2\pi\tau$.