

Signaux électriques dans l'ARQS

Sommaire

1.1 Courant et potentiel électrique	2
1.1.1 Charge et courant électrique	2
1.1.2 Utilisation de grandeurs continues	3
1.1.3 Origines physiques du courant	3
1.2 Circuits électriques	4
1.2.1 Notion de circuit électrique	4
1.2.2 Approximation des régimes quasi-stationnaires	4
1.2.3 Lois de Kirchhoff	5
1.3 Dipôles	6
1.3.1 Généralités	6
1.3.2 Résistance	7
1.3.3 Sources	7
1.4 Étude d'un circuit	8
1.4.1 Méthode "brute"	8
1.4.2 Méthodes de simplification	9
1.4.3 Résistance d'entrée d'appareils de mesure	11

Questions de cours :

- Présenter le phénomène lié à l'apparition d'un courant électrique : origine physique, définition de l'intensité du courant électrique. Potentiel et tension, notion de masse d'un circuit.
- Convention générateur et récepteur. Présenter la notion de puissance reçue par un dipôle. Discuter du signe.
- Présenter les sources idéales de tension et de courant, puis le modèle de Thévenin.
- Présenter l'Approximation des Régimes Quasi-stationnaires et donner un exemple vérifiant cette approximation.
- Énoncer et démontrer les deux lois d'association de résistances.
- Présenter le montage du pont diviseur de tension, et démontrer la formule classique pour un tel pont.
- Présenter le montage du pont diviseur de courant, et démontrer la formule classique pour un tel pont.

Capacités exigibles du BO :

- Justifier que l'utilisation de grandeurs électriques continues est compatible avec la quantification de la charge électrique.
- Exprimer l'intensité du courant électrique en termes de débit de charge.
- Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence.
- Relier la loi des nœuds au postulat de la conservation de la charge.
- Utiliser la loi des mailles. (Ex. 1 à 8)
- Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur. (Ex. 1 à 8)
- Citer les ordres de grandeur des intensités et des tensions dans différents domaines d'application.
- Utiliser les relations entre l'intensité et la tension. (Ex. 1 à 8)
- Citer des ordres de grandeurs pour une résistance.
- Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance. (Ex. 5)
- Modéliser une source en utilisant la représentation de Thévenin. (Ex. 4, 5)
- Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente. (Ex. 1, 2, 3)
- Établir et exploiter les relations des diviseurs de tension ou de courant (Ex. 1, 2, 3, 4, 5, 8)
- Évaluer une résistance d'entrée ou de sortie à l'aide d'une notice ou d'un appareil afin d'appréhender les conséquences de leurs valeurs sur le fonctionnement d'un circuit (TP).
- Étudier l'influence des résistances d'entrée ou de sortie sur le signal délivré par un GBF, sur la mesure effectuée par un oscilloscope ou un multimètre (TP).

I. Courant et potentiel électrique

I.1 Charge et courant électrique

a) Porteurs de charges

Bien que la matière soit globalement électriquement neutre, on la sait depuis le XVII^e siècle et les travaux de Coulomb composée d'éléments possédant une charge électrique. Une charge électrique se mesure en Coulomb (C) et est **quantifiée** : elle est un multiple entier de la charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Outre les électrons de charge $-e$ et les protons de charge $+e$, d'autres porteurs de charges sont observables à l'échelle microscopique : un ion en solution aqueuse ou dans un plasma ; une lacune au sein d'un semi-conducteur (elle résulte d'une perte d'électron par un atome au sein d'un réseau cristallin, laissant derrière lui une charge positive).

À l'échelle microscopique, ces porteurs de charges ont un mouvement aléatoire et désordonné appelé mouvement brownien : on parle d'agitation thermique. En moyenne, la position des porteurs est fixe.

b) Courant de charges et intensité

Cependant on peut rencontrer des cas où le déplacement de porteurs de charge suit un mouvement d'ensemble, ordonné : on parle alors de courant de charge, ou **courant électrique**.

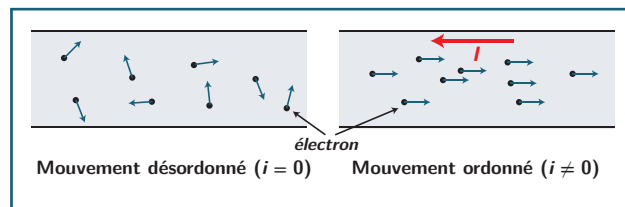
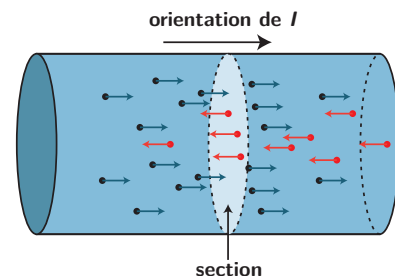


Figure 1.1 – Représentations du mouvement microscopique d'électrons dans un métal. À droite, la flèche indique le sens où le courant est positif.

Par convention, le sens du courant est dans le **sens de déplacement des charges positives**. On introduit alors l'**intensité du courant électrique** comme un **débit de charge** à travers la section d'un conducteur.

* Après avoir choisi **arbitrairement** une orientation pour le conducteur, on compte la quantité de charges traversant cette section $\Delta q = \Delta q_1 - \Delta q_2$, Δq_1 (respectivement Δq_2) étant la charge traversant la section S dans le sens choisi (dans le sens opposé) pendant Δt , alors $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ exprimé en ampère (A).



Le sens d'orientation choisi pour I est arbitraire : s'agissant d'une grandeur algébrique, son signe peut donc être négatif.

Étant donné que le débit n'est pas forcément constant au cours du temps, on définit de manière plus générale le courant en prenant l'expression précédente avec la limite $\Delta t \rightarrow 0$, ce qui amène à une dérivée :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (1.1)$$

On écrit souvent en électrocinétique les grandeurs constantes en majuscule I et celles susceptibles de varier au cours du temps en minuscule i .

c) Mesure de l'intensité d'un courant électrique

On utilise un **ampèremètre** pour mesurer un courant au sein d'un conducteur, placé en **série** avec le conducteur. Quelques ordres de grandeur sont à retenir :

Domaine	Ordre de grandeur des courants
Activités neuronales	quelques μA
Électronique de signal	quelques mA
Électronique de puissance (appareils électroménagers)	quelques A (jusqu'à 30 A environ)
Électrotechnique (fonctionnement de gros moteurs d'usine)	quelques 100 A
TGV	500 à 1000 A
Eclairs d'orage	jusque 50 kA pendant de brefs instants

I.2 Utilisation de grandeurs continues

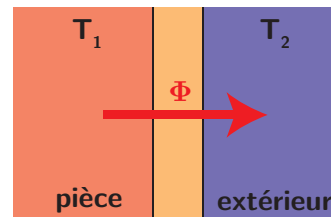
On emploie dans tout ce chapitre des grandeurs électriques continues, alors même que l'on a vu que le courant était un débit de charge, et ces charges sont quantifiées. On s'attend donc théoriquement à ce que le courant soit une grandeur discontinue. Cependant, la petitesse de la charge électrique nous permet de considérer le courant comme une grandeur continue.

En effet, considérons un courant très faible de $I = 1\text{ nA}$ pendant une durée de temps très courte de $\tau = 1\text{ }\mu\text{s}$, la charge circulant dans le conducteur vaut $\delta q = I\tau \simeq 10^{-15}\text{ C} \gg e$. Elle est donc très grande relativement au quantum de charge. À partir du moment où les mesures de courant sont faites à une échelle spatiale et temporelle très grande, on peut donc négliger la quantification de la charge, c'est-à-dire considérer que la charge et donc le courant sont des grandeurs continues.

I.3 Origines physiques du courant

a) Analogie thermique

Faisons un petit détour thermodynamique, où on parle de flux thermique Φ et de température T . Pour qu'un transfert thermique existe entre deux milieux, par exemple une pièce de la maison et l'extérieur, il faut une différence de température. On sait même que le flux thermique est dirigé des zones de forte température vers celles de faible température.



Sans cette différence de température, il ne se passe rien.

b) Potentiel électrique et tension

Par analogie, un excès de charges électriques mène à un courant électrique, les charges se mettant alors en mouvement pour **rétablir la neutralité électrique**.

En effet, la séparation de charges crée un champ électrique $\vec{E}$, ce dernier exerçant une force sur les particules chargées.

- * A l'instar de l'exemple précédent, et pour quantifier cette séparation de charges, on définit (pour cette année de manière arbitraire) la notion de **potentiel électrique** V (dont l'unité est le volt V). Un courant électrique apparaît dans le cas où le potentiel n'est pas uniforme dans ce conducteur. Toujours par analogie, c'est bien la différence entre les états électriques en deux points qui est physiquement importante, c'est-à-dire la **différence de potentiel**. On introduit alors la notion de **tension électrique** entre deux points A et B comme
- *

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad (1.2)$$

On remarque qu'en décalant tous les potentiels d'une quantité V_0 , les tensions restent inchangées :

$$U_{AB} = (V_A + V_0) - (V_B + V_0) = V_A - V_B \quad (1.3)$$

Par conséquent, on peut choisir V_0 de manière à annuler arbitrairement le potentiel d'un point du circuit. Ce point est appelé la **masse du circuit**. Il ne joue aucun rôle particulier, mais permet de simplifier les calculs.

Signalons tout de même qu'un courant peut exister sans différence de potentiel dans des matériaux bien spécifiques : les supraconducteurs, sources de nombreuses recherches actuelles.

D'autres origines seront étudiées dans l'année : induction et systèmes électro-chimiques

c) Mesure d'une tension

On utilise un **voltmètre** pour mesurer une différence de potentiel entre deux points. Il doit être placé en **dérivation** dans le circuit, c'est-à-dire branché aux deux bornes des deux points où l'on souhaite mesurer la différence de potentiel. Il est conçu pour ne pas perturber le circuit, c'est-à-dire qu'idéalement **aucun courant ne le traverse**. La formule précédente montre qu'en inversant le sens du branchement du voltmètre, la tension indiquée change de signe : la tension est elle aussi une grandeur algébrique. Citons quelques ordres de grandeur :

Domaine	Ordre de grandeur des tensions
Electronique de signal	quelques centaines de mV
Tension domestique nominale	230 V
TGV	environ 25 kV
Eclairs d'orage	jusque 500 MV

II. Circuits électriques

II.1 Notion de circuit électrique

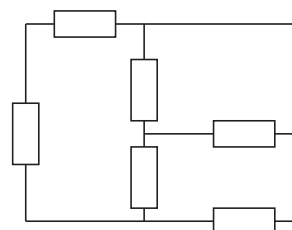
Des composants électriques peuvent être reliés entre eux pour former un **circuit électrique**. On va introduire un peu de vocabulaire pour le décrire :

- une **maille** est un circuit électrique formant un contour fermé ne repassant pas deux fois par le même point ;
- un **nœud** est un point commun à au moins trois composants ;
- une **branche** est une portion de circuit reliant deux nœuds consécutifs.



Exercice

Sur l'exemple ci-contre, dénombrer le nombre de mailles, de nœuds et de branches.
On dénombre trois nœuds, cinq branches et sept mailles.



II.2 Approximation des régimes quasi-stationnaires

a) Vitesses mises en jeu

Au sein d'un conducteur, il faut distinguer plusieurs vitesses associées aux porteurs de charges :

- la **vitesse d'agitation thermique** de l'ordre de $10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ à température ambiante
- la **vitesse de dérive** correspondant à la vitesse moyenne du mouvement ordonné : elle est de l'ordre de $1 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$;
- la vitesse de propagation de l'information, correspondant à la vitesse à laquelle une onde électromagnétique se propage dans le conducteur, « informant » par là-même les porteurs de charge qu'il faut se mettre en mouvement ou s'arrêter. Elle est inférieure à la vitesse de la lumière, de l'ordre de $2\cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Pour visualiser la situation, on peut considérer un vérin sur lequel on appuie très doucement : le déplacement du piston est lent (vitesse de dérive), mais pour autant l'information sur le mouvement se répercute "instantanément" de l'autre côté du vérin (vitesse de l'information).

Retenons donc que $v_{\text{dérive}} \ll v_{\text{agitation}} \ll v_{\text{information}}$

b) ARQS

En régime stationnaire, le courant est par définition indépendant du temps, il est le même dans toute section d'un conducteur électrique. En régime variable, ce résultat *a priori* ne s'applique plus puisque

les variations du signal se propagent à la vitesse de l'information le long des conducteurs, et mettent donc un certain temps pour parcourir le circuit. Sous certaines conditions, il est néanmoins possible de négliger ce temps de propagation devant les autres durées, ce qui simplifie le problème.

Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

L'**approximation des régimes quasi-stationnaires** (ARQS) consiste à pouvoir **négliger le temps de propagation d'un signal τ devant son temps caractéristique d'évolution T** . Si par exemple l'intensité du courant est sinusoïdale de période temporelle T , le temps de propagation d'une période vaut $\tau = \ell/c_m$ avec ℓ la taille typique du circuit et c_m la célérité des ondes électromagnétiques dans le conducteur. La condition définissant l'ARQS s'écrit

*

$$\tau = \frac{\ell}{c_m} \ll T \Leftrightarrow \ell \ll c_m T = \lambda \quad (1.4)$$

λ étant la longueur d'onde des ondes de tension et d'intensité dans le conducteur. En pratique, $c_m \simeq 2 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La conséquence de l'ARQS est que l'intensité électrique est indépendante de la position dans toute section d'un conducteur électrique.

Regardons la validité de ce critère sur quelques exemples :

Exercice

Vérifier que dans les conditions de TP, avec des câbles de 1 m et des fréquences de l'ordre de 1 kHz, cette condition est respectée. Pour quelle fréquence ne l'est-elle plus ?

Pour des fréquences $f \sim 1 \text{ kHz}$, $\tau \sim 5 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ et $T \sim 10^{-3} \text{ s}$, la condition est vérifiée. La limite de validité de ce régime est atteinte pour une fréquence de 200 MHz.

- La fréquence réglementaire du réseau national est 50 Hz. L'ARQS est donc valide jusqu'à une distance de l'ordre de 4000 km, distance comparable à la taille de la France
- Les signaux radio FM arrivant sur une antenne ont une fréquence comprise entre 87,5 MHz et 108 MHz. L'ARQS est valide jusqu'à une distance de l'ordre du mètre comparable à la taille d'une antenne. Des effets sortant du cadre de cette approximation peuvent être observés, tels que l'apparition d'un courant au sein de l'antenne alors qu'elle constitue un circuit ouvert.

Dans les faits les lignes électriques peuvent atteindre des longueurs importantes et il faut compenser le déphasage induit par la propagation

II.3 Lois de Kirchhoff

Loi des branches

Au sein d'une branche d'un circuit, l'intensité I est uniforme.

Loi des mailles

Dans une maille d'un circuit, la somme algébrique des tensions composant cette maille est nulle

$$\sum_i U_i = 0 \quad (1.5)$$

Pour l'appliquer il suffit d'orienter arbitrairement la maille et compter positivement les tensions orientées dans le même sens que la maille, et négativement les autres.

Elle provient de la définition d'une tension :

$$V_A - V_A = 0 = V_A - V_B + V_B - V_C + \dots + V_Z - V_A = U_{AB} + U_{BC} + \dots + U_{ZA}$$

Loi des nœuds

Au niveau d'un nœuds, les intensités des courants électriques entrants et sortants sont égales :

$$\sum_{\text{entrant}} I_e = \sum_{\text{sortant}} I_s$$

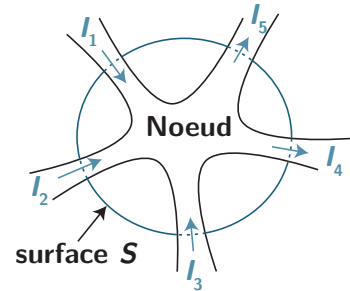
(1.6)

Cette dernière loi est une conséquence de la **conservation de la charge** : une charge électrique ne peut être ni créée, ni détruite, seulement échangée. Considérons un nœud du circuit et effectuons un bilan de charges dans un volume V délimité par une surface fermée S entourant le nœud. Il n'y a pas de variation de charges, donc la charge reçue dans la surface fermée ne varie pas pendant un instant infinitésimal dt . Ainsi :

$$\frac{dq}{dt} = 0 = \frac{dq_{\text{entrant}}}{dt} - \frac{dq_{\text{sortant}}}{dt} = \sum_{\text{entrant}} I_e - \sum_{\text{sortant}} I_s$$

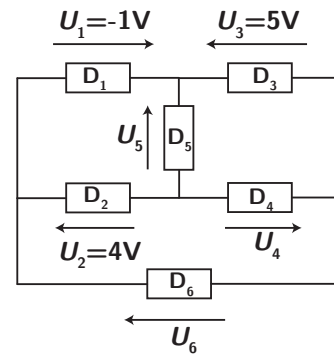
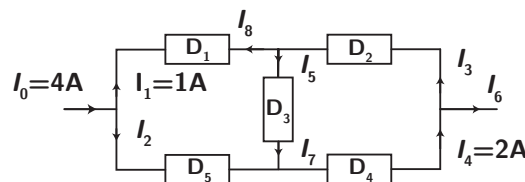
(1.7)

et donc $\sum_{\text{entrant}} I_e = \sum_{\text{sortant}} I_s$.



Exercice

Pour les circuits ci-dessous, déterminer les grandeurs inconnues :



$I_2 = 3 \text{ A}$, $I_3 = -2 \text{ A}$, $I_5 = -1 \text{ A} = I_7$, $I_6 = 4 \text{ A}$, $I_8 = -1 \text{ A}$.
 $U_5 = 3 \text{ V}$, $U_4 = -2 \text{ V}$ et $U_6 = 6 \text{ V}$.

III. Dipôles

Voyons maintenant le comportement de composants usuels rencontrés en électrocinétique, qui seront ensuite connectés entre eux pour former un circuit. Dans toute la suite on va s'intéresser à des **dipôles**, composants présentant deux bornes (d'autres types de composants pourront néanmoins être rencontrés en TP).

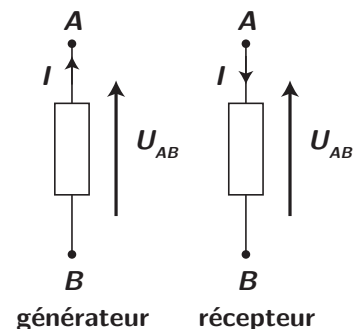
III.1 Généralités

a) Conventions d'orientation

Avant toute chose, précisons les conventions de fléchage de courant et tension aux bornes d'un dipôle. Concernant la tension U_{AB} , on l'indique par une flèche allant de B vers A . Puis, selon le sens du courant, on distingue deux conventions :

*

- **convention générateur** lorsque tension et courant sont fléchés dans le même sens ;
- **convention récepteur** lorsque tension et courant sont fléchés en sens opposé.





La convention choisie ne détermine nullement le fonctionnement réel, qui sera éventuellement dépendant des autres composants d'un circuit électrique.

b) Aspects énergétiques

Afin de justifier la dénomination de ces conventions, on s'intéresse au sens des échanges énergétiques entre le dipôle et l'extérieur.

Définition : puissance électrique

Pour un dipôle électrique entre deux points A et B parcouru par un courant I , on quantifie les échanges énergétiques avec le reste du circuit électrique par la **puissance reçue** $\mathcal{P}_{\text{reçue}}$ (en watts W) et définie **en convention récepteur** par :

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}} = U_{AB}I \quad (1.8)$$

Si $\mathcal{P}_{\text{reçue}} > 0$ le dipôle reçoit effectivement de la puissance, sinon si $\mathcal{P}_{\text{reçue}} < 0$ il en fournit. On peut également définir la puissance fournie par le dipôle en convention récepteur par :

$$\mathcal{P}_{\text{fournie}} = -U_{AB}I = -\mathcal{P}_{\text{reçue}} \quad (1.9)$$

$\mathcal{P}$ est une grandeur algébrique comme U_{AB} et I . Une puissance reçue négative s'interprète comme une puissance fournie positive, et vice versa.

Remarque : un dipôle peut également convertir de l'énergie électrique en une autre forme d'énergie : thermique, mécanique, optique, chimique,...

III.2 Résistance

On appelle **conducteur ohmique** tout dipôle vérifiant la loi d'Ohm en **convention récepteur**

$$u = Ri \quad (1.10)$$

avec R la résistance du dipôle, exprimé en ohm (symbole Ω). Il s'agit donc d'un **dipôle linéaire**. Sa valeur va de $2\frac{e^2}{h}$ (quantum de conductance à l'échelle microscopique) jusqu'à des valeurs infiniment grandes (en comparaison, le polystyrène possède une résistance 10^{27} fois plus grande que le cuivre..), en passant par des valeurs typiques atteignables en TP entre 1Ω et $1M\Omega$

Les métaux sont des exemples de conducteurs ohmiques présents dans la vie quotidienne, utilisés dans les câblages, les ampoules à incandescence, les plaques chauffantes.

D'un point de vue énergétique, la puissance reçue par un conducteur ohmique vaut en convention récepteur

$$P = ui = Ri^2 = \frac{u^2}{R} > 0 \quad (1.11)$$

Toute cette puissance est dissipée par transfert thermique : on parle d'effet Joule.

On introduit également la **conductance** G , utilisé en chimie, telle que $G = \frac{1}{R}$ exprimée en siemens (symbole S).

III.3 Sources

a) Sources idéales de tension et courant

On distingue deux types de sources idéales :

- une **source idéale de tension**, dont la tension à ses bornes appelée **force électromotrice** (fém) est maintenue constante quel que soit le courant qui la traverse ;
- une **source idéale de courant**, dont l'intensité du courant, appelée **courant de court-circuit**, qui la traverse est maintenue constante quelle que soit la tension à ses bornes.



Quelques précautions à prendre : on ne peut pas court-circuiter une source de tension, car on impose alors une tension aux bornes d'une résistance quasi-nulle donc d'après la loi d'Ohm il en résulterait une intensité très élevée ; et on ne peut pas laisser une source de courant en circuit ouvert. Néanmoins dans les faits, les sources ne sont pas idéales.

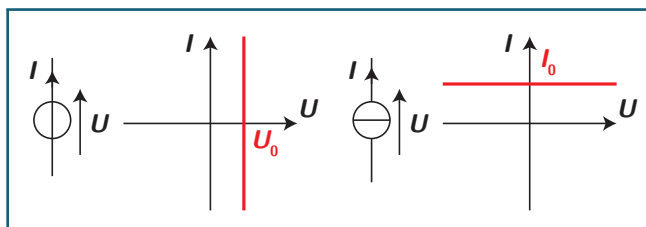


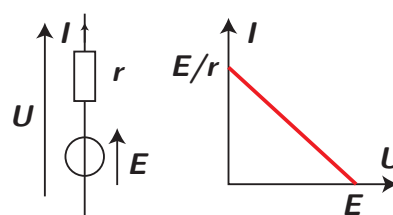
Figure 1.2 – Source idéale de tension (à gauche) et de courant (à droite) et leurs caractéristiques

Enfin, on peut associer des sources entre elles :

- association en série de générateurs de tension : la fém totale est la somme des fém individuelles ;
- association en dérivation de générateurs de courant : le courant total est alors la somme des courants individuels ;

b) Modèle de Thévenin

Une pile électrochimique ou un générateur de tension continue ne peuvent pas toujours être modélisés comme une source de tension idéale. On peut affiner le modèle en considérant l'association d'une source idéale de tension de fém E en série avec une résistance r appelée **résistance interne** : c'est le **modèle de Thévenin**. Généralement $r \sim 50 \Omega$ pour les générateurs basses fréquences (GBF).



* La tension aux bornes du générateur réel est alors **en convention générateur** :

$$U = E - rI \quad (1.12)$$

E est également appelée tension à vide (lorsque le générateur ne débite pas de courant) ; l'intensité maximale que peut délivrer ce générateur est $I_{\max} = \frac{E}{r}$.

Dipôle linéaire

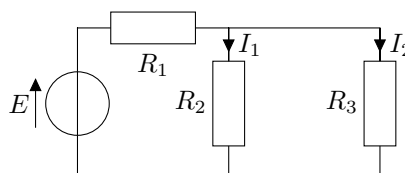
Le générateur ainsi présenté est appelé dipôle linéaire, dans la mesure où la relation entre le courant le traversant et la tension à ses bornes est affine.

IV. Étude d'un circuit

IV.1 Méthode "brute"

Lorsqu'on étudie un circuit, une première façon de pouvoir prévoir des grandeurs électriques (courants ou tensions) consiste à écrire toutes les relations possibles en termes de loi des nœuds et des mailles. Typiquement, avec un circuit contenant deux mailles, on pourra écrire deux lois des mailles et une loi des nœuds pour pouvoir conclure.

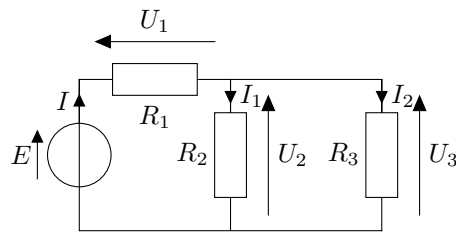
Prenons l'exemple d'un circuit contenant trois résistances :



Exercice

Après avoir fléché les courants et les tensions, écrire les lois des mailles, les relations courant-tension connues et exprimer les courants et les tensions en fonction des résistances et de E uniquement.

On commence par flécher les composants (en convention récepteur !) et courants :



- On écrit la loi des noeuds : $I = I_1 + I_2$ (1) ;
- puis les lois des mailles : $E = U_1 + U_2$ (2), $E = U_1 + U_3$ et $U_2 = U_3$ (3) : on constate que la deuxième n'apporte pas plus d'information que les deux autres, elle fait doublon, on n'en tiendra pas compte ;
- enfin les relations courant-tension sont $U_1 = R_1 I$ (4), $U_2 = R_2 I_1$ (5) et $U_3 = R_3 I_2$ (6).

On a six équations, et six inconnus, cela semble soluble.

Il faut ensuite les combiner intelligemment. On peut soit travailler avec les courants (en remplaçant toutes les tensions, sauf E , avec les relations courant-tension), ou avec les tensions (en remplaçant tous les courants à l'aide des relations courant-tension aussi). Exprimons les tensions :

- En injectant (4) à (6) dans (1) : $\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3}$ (7) ;
- Avec (7) et (3) on ne garde qu'une relation entre U_1 et U_2 : $\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2}{R_3}$ soit $U_1 = U_2 R_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$;
- On injecte U_1 dans (2) : $E = U_2 R_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + U_2$ conduisant à :

$$U_2 = \frac{E}{1 + R_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)} \quad (1.13)$$

Une fois que l'on a U_2 en fonction de E et des résistances, on retrouve U_1 , puis les trois courants grâce aux relations (4) à (6).

IV.2 Méthodes de simplification

a) Associations de résistances

Dans le cas où l'on a plusieurs résistances dans un circuit électrique, il peut être utile de savoir les combiner.

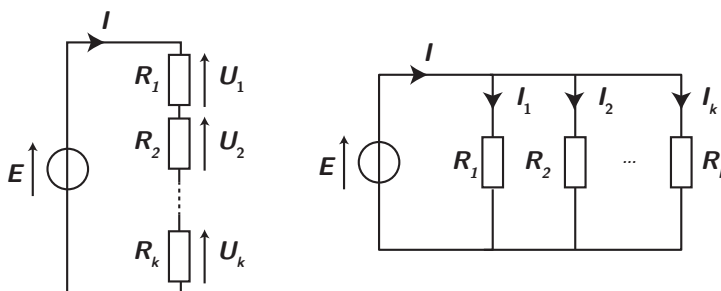
Association de résistances

- Une association en série de résistances $\{R_i\}$ peut être remplacée par une résistance équivalente de valeur

$$R_{eq} = \sum_i R_i ;$$

- Une association en parallèle de résistances $\{R_i\}$ peut être remplacée par une résistance équivalente de valeur R_{eq} vérifiant

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i} ;$$





Démonstration

Des résistances en série sont traversées par la même intensité : la tension aux bornes de l'ensemble des résistances s'écrit donc $U_t = U_1 + U_2 + \dots = R_1 I + R_2 I + \dots = (R_1 + R_2 + \dots) I = R_{eq} I$.
Tout se passe comme si l'on avait une seule résistance vérifiant $R_{eq} = \sum_i R_i$.

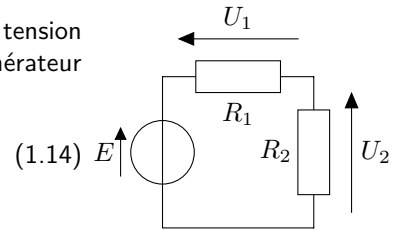
* Des résistances en dérivation (parallèle) ont la même tension à leurs bornes. On vérifie donc $U = R_1 i_1 = R_2 i_2 = \dots$, tandis que le courant total qui traverse l'ensemble des résistances vaut d'après la loi des nœuds $I = I_1 + I_2 + \dots = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \right) = \frac{U}{R_{eq}}$: tout se passe comme si l'on avait une seule résistance vérifiant $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$.

b) Application aux ponts diviseurs

Une application courante de ces associations concerne les **ponts diviseurs** de tension ou de courant, qu'il faut maîtriser.

Le **pont diviseur de tension** : pour une association en série, la tension aux bornes d'une des résistances est inférieure à la tension du générateur et vaut

$$U_i = \frac{R_i}{R_1 + R_2} E \quad (1.14)$$

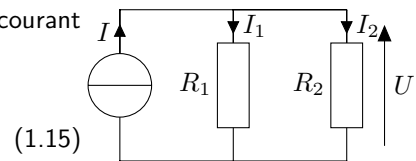


Démonstration

* Le courant traversant le circuit est tel que $E = R_{eq} I = (R_1 + R_2) I$, soit $I = \frac{E}{R_1 + R_2}$. La tension aux bornes de chaque résistance vaut alors $U_i = R_i I = \frac{R_i}{R_1 + R_2} E$.

Le **pont diviseur de courant** : pour une association en parallèle, le courant traversant l'une des résistances est inférieur au courant entrant et vaut

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \quad (1.15)$$



Démonstration

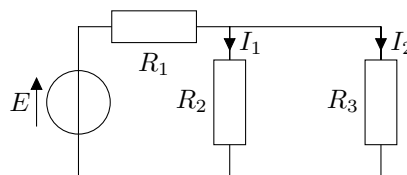
* La tension aux bornes des résistances est la même, comme elles sont en parallèle. Donc $U = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_{eq} I$. Donc $I_2 = \frac{R_{eq}}{R_1} I = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) R_1} I = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$.



Vérifiez bien les conditions d'application de ces formules. Dans le cas d'une association en série de résistances, si l'une des résistances est reliée à une de ses bornes à une autre branche où peut circuler un courant, ce n'est plus valable car alors elle n'est plus traversée par le même courant que les autres résistances.

c) Application

Reprenons l'exemple d'un circuit contenant trois résistances :

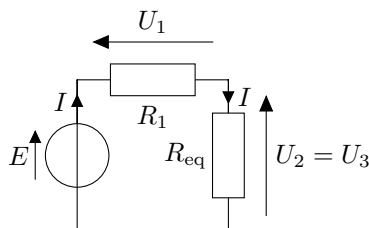




Exercice

À partir des regroupements de résistances et des ponts diviseurs, retrouver la tension U_2 plus rapidement (en fonction de E et des résistances) et comparer.

On commence par regrouper les deux résistances en parallèle :



On a $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. On reconnaît un pont diviseur de tension où :

$$U_2 = \frac{ER_{eq}}{R_{eq} + R_1} = \frac{E}{1 + \frac{R_1}{R_{eq}}} = \frac{E}{1 + R_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)} \quad (1.16)$$

Le résultat est donc bien conforme à ce que l'on avait obtenu précédemment.

IV.3 Résistance d'entrée d'appareils de mesure

Pour un système électrique quelconque, typiquement un quadripôle (deux entrées, deux sorties), l'entrée peut se comporter comme un dipôle linéaire, que l'on appelle **résistance d'entrée**. De même en sortie, on peut aussi définir une **résistance de sortie**.

Une application très importante est liée aux instruments de mesure, typiquement le voltmètre. On peut le modéliser comme un appareil ayant une résistance d'entrée très grande (typiquement $1\text{ M}\Omega$) de telle sorte qu'un très faible courant circule dans la résistance. Néanmoins il peut être imprudent de mesurer une tension aux bornes d'une résistance de forte valeur.

Dans l'exemple ci-dessous, $E = 10\text{ V}$ et $R_1 = R_2 = 100\text{ k}\Omega$. On cherche à vérifier les relations de pont diviseur de tension.

On étudiera en TP la notion de résistance d'entrée ou de sortie sur des appareils courants.

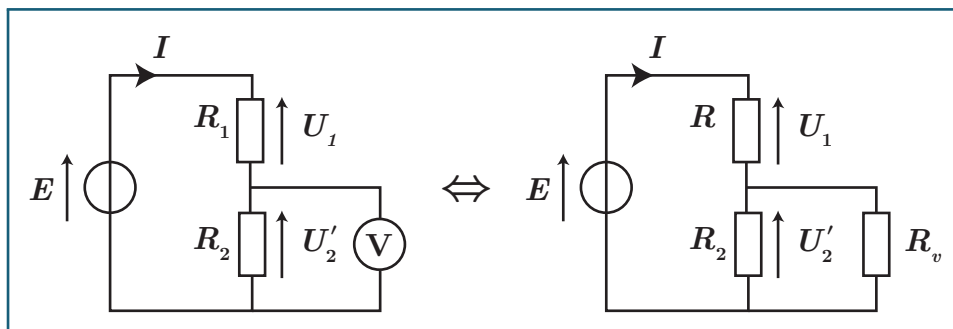


Figure 1.3 – Mesure au voltmètre d'une tension d'un diviseur de tension avec le schéma électrique équivalent (à droite)



Exercice

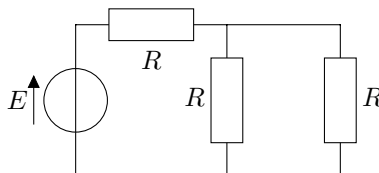
Prévoir la valeur de U_1 et de U_2 dans l'hypothèse que le voltmètre n'a aucune influence sur le circuit. En considérant ensuite que le voltmètre possède une résistance d'entrée de $1\text{ M}\Omega$, déterminer l'erreur relative commise en réalité sur la mesure.

Avec $R_1 = R_2 = 100\text{ k}\Omega$, on s'attend à ce que $U_1 = U_2 = \frac{E}{2} = 5,00\text{ V}$. Puis en prenant compte de la résistance du voltmètre, en notant $R_{eq} = R_2 + R_v$, $U_2' = \frac{R_{eq}}{R + R_{eq}} E = 4,76\text{ V}$, soit une erreur de 5% qui est inacceptable.

Exercices

1.1 Circuit résistif (1)

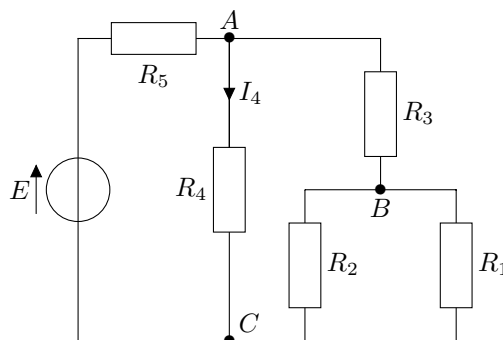
Étudions un circuit composé de trois résistances identiques :



1. Déterminer les courants et tensions dans le circuit en fonction de E et de R .
2. À votre avis, la résistance seule reçoit-elle plus ou moins de puissance si on enlève une des deux résistances en parallèle ? Vérifiez-le par le calcul.

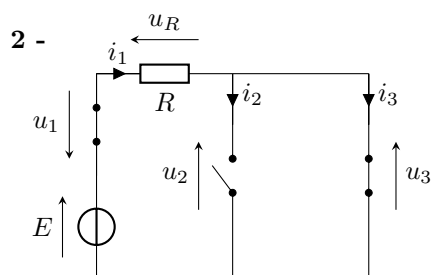
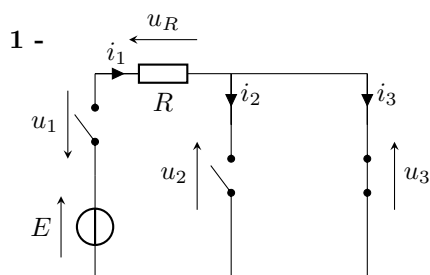
1.2 Circuit résistif (2)

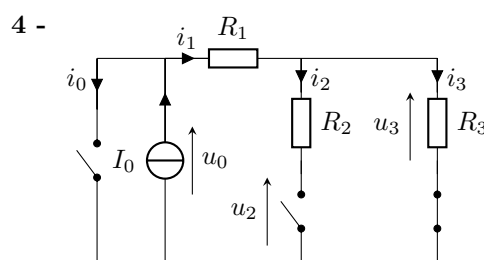
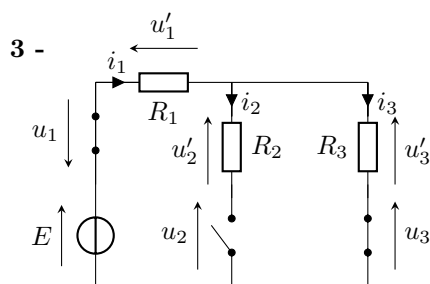
Dans le circuit suivant, calculer U_{BC} , U_{CA} et I_4 . On précise que $R_1 = 12\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$, $R_4 = 40\ \Omega$, $R_5 = 50\ \Omega$ et $E = 10\text{ V}$.



1.3 Circuits résistifs (3)

Déterminer toutes les intensités et tensions indiquées dans les circuits ci-dessous en fonction des forces électromotrices ou courants de court-circuit des générateurs et des résistances. On précise qu'un interrupteur fermé est équivalent à un fil, donc de tension nulle à ses bornes, mais un interrupteur ouvert peut avoir une tension non nulle à ses bornes.



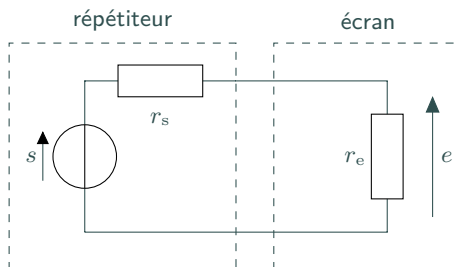


1.4 Répétiteur vidéo

Dans le domaine de la transmission de signaux vidéos, la norme impose d'utiliser des résistances d'entrée et de sortie égales à 75Ω . Cela permet d'imposer que l'amplitude crête-à-crête des signaux garde sa valeur nominale de 1 V, nécessaire à une bonne transmission de l'information. On considère dans cet exercice un répétiteur, c'est-à-dire un bloc fonctionnel reproduisant en parallèle sur plusieurs sorties un signal identique à celui qu'il reçoit dans sa voie d'entrée. Le schéma équivalent à chacune des voies de sortie se compose d'une source idéale de tension s et d'une résistance interne valant 75Ω .

1. Proposer un schéma équivalent à la voie de sortie d'un répétiteur connecté à un écran de résistance d'entrée 75Ω .
2. En déduire la valeur à donner à s afin que la tension à l'entrée de l'écran ait pour amplitude 1 V.
3. Pour tester le bon fonctionnement d'une des voies du répétiteur, un réparateur débranche la sortie correspondante et la connecte à un voltmètre. Quelle est la valeur de tension mesurée ? Comment procéder pour observer une tension d'amplitude égale à celle de la tension d'entrée de l'écran ?

-
1. Il s'agit simplement d'un générateur de Thévenin de tension s et de résistance interne $r_s = 75\Omega$.
 2. On branche le répétiteur à un système dont la résistance vaut également r_s . On a donc le circuit équivalent :

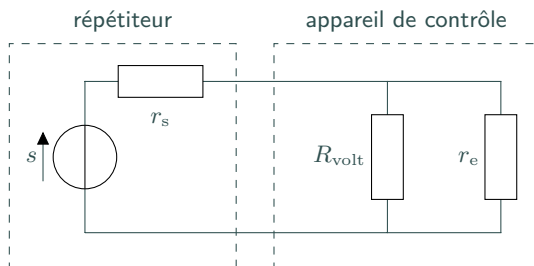


On a donc un pont diviseur de tension où $e = \frac{r_e}{r_e + r_s} s = \frac{s}{2}$. Il faut donc que $s = 2\text{ V}$ pour que $e = 1\text{ V}$.

3. L'étage d'entrée du voltmètre se modélise lui aussi par une résistance d'entrée R_{volt} , mais cette fois $R_{\text{volt}} \gg r_s$. La relation du diviseur de tension donne alors :

$$e = \frac{R_{\text{volt}}}{R_{\text{volt}} + r_s} s \simeq s \quad (1.17)$$

Pour observer une tension d'amplitude égale à celle de la tension d'entrée de l'écran, il faut que l'appareil de contrôle présente une résistance d'entrée égale à celle de l'écran. Comme $R_{\text{volt}} \gg r_e$, placer une résistance r_e en parallèle de R_{volt} comme le schéma ci-dessous convient :



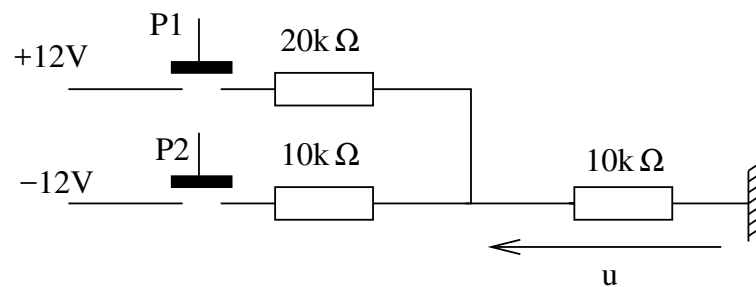
1.5 Bilan de puissance

On considère un lampe de poche contenant une pile de fém $E = 1,5 \text{ V}$ et de résistance interne $r = 5 \Omega$ alimentant l'ampoule modélisée comme une résistance de valeur $R = 1,7 \Omega$.

1. Dessiner le schéma électrique du circuit en utilisant les conventions usuelles. On notera U la tension aux bornes de la résistance et I le courant dans le circuit.
2. Déterminer les expressions de U et I en fonction de E et des résistances.
3. Calculer les puissances dissipées par effet Joule.
4. Réaliser un bilan de puissance pour l'ensemble du circuit.
5. Déterminer enfin le rendement du circuit, défini comme $\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fournie}}}$.
6. Déterminer quelle devrait être la valeur de R pour que la puissance utile soit maximale. On rappelle que pour déterminer l'extremum d'une fonction, il faut évaluer sa dérivée à 0.
7. Quel est le rendement associé ? Pourrait-on l'augmenter ? Si oui, quelle serait la conséquence ?
8. Si on branche une deuxième ampoule de résistance $R' = 2,8 \Omega$ en dérivation de la première, quelle est la puissance reçue par chaque ampoule ?
9. ** On dispose de 4 résistances de 10Ω , 20Ω , 30Ω et 40Ω . Proposer le schéma d'un radiateur électrique dissipant une puissance maximale en utilisant ces quatre résistances et une source de tension de fém 20 V de résistance interne 20Ω .

1.6 Boutons poussoirs

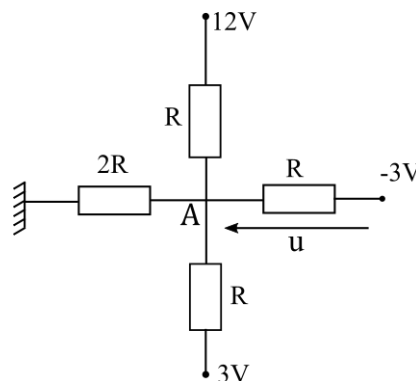
On considère le montage suivant, constitué de deux boutons poussoirs et alimentées par deux lignes d'alimentation de potentiels constants $+12\text{V}$ et -12V (par rapport à la masse). Déterminer la valeur de la tension u indiquée sur le schéma dans chacun des quatre cas suivants :



P1	P2	$u(\text{V})$
Ouvert	Ouvert	
Ouvert	Fermé	
Fermé	Ouvert	
Fermé	Fermé	

Aide : pour le dernier cas, il est recommandé d'appliquer la loi des nœuds.

1.7 Carrefour électrique



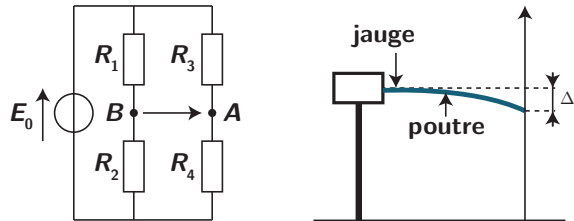
On considère le circuit ci-dessus. Les sources de tension sont idéales.

1. Quel signifie précisément « les sources de tensions sont idéales » ?
2. En appliquant la loi des nœuds en A, établir que le potentiel électrique au point A vaut $V_A = 3,43 \text{ V}$.
3. En déduire la valeur numérique de la tension u .

1.8 Jauge de contrainte

Une jauge de déformation se présente sous la forme d'un fil fin qui, sous l'effet d'une contrainte, se déforme. La déformation de ce fil engendre une variation de la résistance du fil. C'est cette variation de résistance que l'on cherche à caractériser.

Le pont diviseur de tension n'étant pas ici le circuit le plus adapté à la mesure de résistance, on lui préfère un **pont de Wheatstone**, dont le circuit est représenté ci-dessous.



Il comporte un générateur parfait de tension $E_0 = 10 \text{ V}$ et de quatre résistances, dont R_1 la jauge de contrainte.

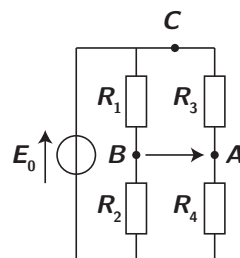
1. Par la méthode de votre choix, déterminer l'expression de $U = V_A - V_B$ en fonction de E et des résistances.
2. Montrer que pour une valeur particulière de la résistance R_3 , le pont est dit "équilibré", c'est-à-dire que $U = 0$. On l'exprimera en fonction de R_1 , R_2 et R_4 . En pratique R_3 est une résistance variable (potentiomètre).

Avant toute mesure, on commence par équilibrer le point avec une jauge de contrainte non déformée de résistance R_0 . Le pont est initialement équilibré à l'aide de R_3 . Lors de l'application d'une contrainte sur la jauge, cette dernière voit sa résistance varier de ΔR : $R_1 = R_0 + \Delta R$.

3. Montrer que la tension U peut se mettre sous la forme $U = \frac{R_2 \Delta R}{(R_0 + R_2)(R_0 + \Delta R + R_2)} E_0$. Simplifier sachant que $R_0 \simeq R_2$ et $\Delta R \ll R_0$.

On place cette jauge de contrainte sur une poutre de longueur $L = 10 \text{ cm}$, d'épaisseur $e = 0,1 \text{ mm}$ et dont l'extrémité peut se déplacer d'une hauteur Δz sous l'effet d'une contrainte, comme représenté sur le schéma précédent. On introduit alors le facteur de jauge K (valant pour notre capteur $K = 2,0$) par $\frac{\Delta R}{R_0} = K \frac{\Delta \ell}{\ell}$ avec $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ l'allongement relatif de la jauge. Les théories de physique des matériaux donnent $\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{3e}{2L^2} \Delta z$.

4. Montrer que la tension mesurée au voltmètre peut être reliée à la variation de la position de l'extrémité de la poutre sous la forme $U = \alpha \Delta z$ avec α une grandeur à exprimer en fonction des paramètres du problème.
5. Exprimer la sensibilité du capteur définie par $S = \left| \frac{dU}{d\Delta z} \right|$ et calculer la valeur numérique. Commenter.



1. Les résistances R_1 et R_3 ont un potentiel commun que l'on appelle V_C . Ainsi, à l'aide d'un pont diviseur de tension, comme R_1 et R_2 sont en série, il vient $V_C - V_B = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_0$ et de même $V_C - V_A = \frac{R_3}{R_3 + R_4} E_0$, il vient en

retranchant les deux équations que $U = V_A - V_B = (V_C - V_B) - (V_C - V_A) = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) E_0$

Rq : Il est aussi possible d'exprimer U en fonction des tensions aux bornes des résistances R_2 et R_4 , on aboutit de la même manière à : $U = \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) E_0$.

2. Si on veut que $U = 0$, il faut donc que $\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$ soit $R_1 R_3 + R_1 R_4 = R_1 R_3 + R_2 R_3$ impliquant

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \text{ puis } R_3 = \frac{R_1 R_4}{R_2}.$$

3. Repartons de l'expression de U , sachant que le pont est équilibré pour $R_1 = R_0$, soit $R_0 R_4 = R_2 R_3$:

$$U = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) E_0 = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} E_0 = \frac{\Delta R R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} E_0$$

à l'aide de $R_2 R_3 = R_0 R_4$. Puis :

$$U \simeq \frac{\Delta R R_4}{(R_0 + R_2)(R_3 + R_4)} E_0 \simeq \frac{\Delta R R_2}{(R_0 + \Delta R + R_2)(R_3 + R_4) \frac{R_2}{R_4}} E_0 \simeq \frac{\Delta R R_2}{(R_0 + \Delta R + R_2) \left(\frac{R_3 R_2}{R_4} + R_2 \right)} E_0$$

$$U = \frac{R_2 \Delta R}{(R_0 + \Delta R + R_2)(R_0 + R_2)} E_0$$

Sachant que $R_0 \simeq R_2$, il vient $U \simeq \frac{R_0 \Delta R}{(R_0 + R_2)^2} E_0 \simeq \frac{R_0 \Delta R}{4 R_0^2} E_0 \simeq \frac{\Delta R}{4 R_0} E_0$

4. Il suffit d'utiliser l'ensemble des relations du sujet : $U = \frac{\Delta R}{4 R_0} E_0 = K \frac{\Delta \ell}{\ell} \frac{E_0}{4} = \frac{3 K e E_0}{8 L^2} \Delta z$ conforme à l'énoncé si l'on pose $\alpha = \frac{3 K e E_0}{8 L^2}$.

5. La sensibilité vaut donc $S = |\alpha| = \alpha = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} = 75 \text{ mV} \cdot \text{mm}^{-1}$. Il est donc tout à fait possible de mesurer des écarts de l'ordre d'une fraction de millimètre à l'aide d'un voltmètre, le système est bien dimensionné.