–OS5–

Des oscillateurs libres électriques et mécaniques

Contents

5.1 Signaux sinusoïdaux **3**
- 5.1.1 Rappels 3
- 5.1.2 Définition 3
- 5.1.3 Lien entre la pulsation, la période et la fréquence 4

5.2 L'oscillateur harmonique **4**
- 5.2.1 Le circuit LC 4
- 5.2.2 L'oscillateur mécanique 5
- 5.2.3 Résolution de l'équation d'un oscillateur harmonique 7
- 5.2.4 Analyse de l'évolution temporelle 8
- 5.2.5 Approche énergétique 8

5.3 Oscillateurs amortis **9**
- 5.3.1 Observations expérimentales d'un circuit RLC 9
- 5.3.2 Mise en équation 10
- 5.3.3 Résolution 11
- 5.3.4 Différents régimes de fonctionnement 12
- 5.3.5 Analogie électromécanique 14

Questions de cours :

- Présenter le signal sinusoïdal : forme mathématique en définissant les différents termes, lien entre période, pulsation et fréquence.
- Présenter l'oscillateur harmonique sur l'exemple du circuit LC : équation différentielle, pulsation propre, résolution dans le cas d'un condensateur initialement chargé sous une tension E_0.
- Présenter le circuit RLC série : équation différentielle, mise sous forme canonique, identification de la pulsation propre et du facteur de qualité.
- Donner la forme canonique d'une équation différentielle d'un oscillateur amorti. En régime pseudo-périodique, établir l'expression de la pseudo-période T et justifier qu'on puisse la confondre avec la période propre de l'oscillateur non amorti en précisant dans quel cadre.
- Après avoir rappelé la solution d'une ED d'un oscillateur amorti en régime pseudo-périodique, la résoudre entièrement avec des conditions initiales au choix du khôlleur.
- Distinguer les différents régimes de fonctionnement d'un oscillateur amorti soumis à un échelon de tension selon la valeur du facteur de qualité : donner la forme des solutions, effectuer une représentation graphique, et indiquer pour chaque cas un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
- Démontrer que dans le cas d'un oscillateur amorti en régime pseudo-périodique, Q est l'ordre de grandeur du nombre de pseudo-périodes observables pendant le régime transitoire.
- Déterminer l'équation différentielle d'un oscillateur mécanique amorti. Présenter l'analogie électromécanique entre le système masse-ressort et le circuit RLC.

Capacités exigibles du BO :

- Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. (Ex. 1, 7, 8, 9)
- Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. (Ex. 2 et 6)
- Réaliser un bilan énergétique. (Ex. 3)
- Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. (Ex. 2)
- Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. (Cours)
- Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. (Ex. 3, 4, 5, 11)
- Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. (Ex. 2, 3, 4, 5, 11)
- Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. (Ex. 3 à 5)
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.
- Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.
- Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.
- Réaliser un bilan énergétique.

Manipulations de cours :

- Circuit RLC série ;
- oscillateur masse-ressort dans l'air ou l'eau.

On a considéré dans les chapitres précédents des circuits électriques ne comportant que des condensateurs et/ou des bobines, mais jamais les deux composants au sein d'une seule maille. Des comportements nouveaux vont être observés lorsque les utilise conjointement. On étudiera deux cas limites : le cas idéal où l'absence de dissipation conduit à un oscillateur harmonique et le cas réel tenant compte de la dissipation, où différents comportements pourront être observés. Il sera alors possible de mettre en évidence de grandes similitudes entre des circuits électriques et des oscillateurs mécaniques.

I. Signaux sinusoïdaux

I.1 Rappels

Rappels : tracés de $\cos(t)$, $\sin(t)$, $\cos(2*t)$, $\cos(3*t)$.

I.2 Définition

Définition

Un signal sinusoïdal s'écrit de la forme la plus générale comme :

$$s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi) \tag{5.1}$$

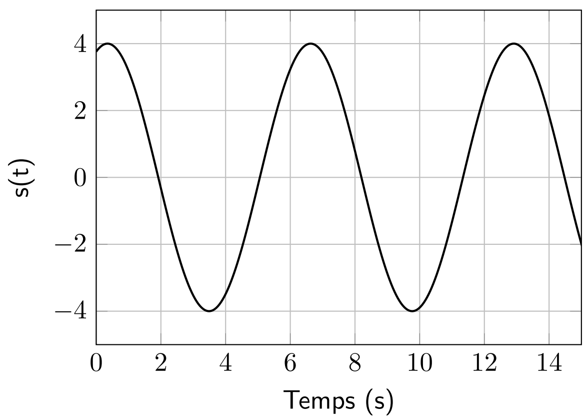
avec :

- s_0 l'**amplitude** ;
- ω la **pulsation** ;
- φ la **phase** à $t = 0$, encore appelée **phase à l'origine** (des temps) ;
- $\omega t + \varphi$ est simplement appelée la **phase**.

Un choix de l'origine des temps permet souvent de faire en sorte que $\varphi = 0$ dans des problèmes physiques.

Ne pas confondre l'amplitude avec l'**amplitude crête-à-crête** correspondant à la différence entre la valeur minimale et maximale que peut prendre s, c'est-à-dire $2s_0$.

Sa représentation graphique en fonction du temps est alors de la forme :



Manipulation

Animation : `http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/general/sinus.php`

Il existe deux autres formes utilisées à connaître :

$$s(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad s_0 = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{ou} \quad s(t) = s_0 \sin(\omega t + \psi) \tag{5.2}$$

En effet, à l'aide des relations trigonométriques, $s(t) = s_0 (\cos\omega t \cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi)$ et donc :

$$A = s_0 \cos\varphi \quad \text{et} \quad B = -s_0 \sin\varphi \tag{5.3}$$

conviennent et l'on a également $s_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$; d'autre part $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ donc $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$ permet le passage à la seconde forme.

I.3 Lien entre la pulsation, la période et la fréquence

On peut exprimer le lien entre fréquence ν, période T et pulsation ω, pour un tel signal. En effet, on peut déjà poser que $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$.

* On sait que la fonction $\cos(x)$ est $2\pi-$périodique. Si on part de $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)$, au bout de $t = T$, la phase doit avoir été augmentée de 2π comme. Donc $\omega T + \varphi = 2\pi + \varphi$, soit

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu} \tag{5.4}$$

On peut alors écrire un signal sinusoïdal en fonction de T, ν ou ω :

$$\boxed{s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi) = s_0 \cos(2\pi\nu t + \varphi) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right)} \tag{5.5}$$

Exercice

Sur le signal du graphique précédent, déterminer ses caractéristiques : amplitude, pulsation, période, fréquence, phase à l'origine des temps.

On part de $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)$. $s_0 = 4$ (ne pas confondre avec l'amplitude crête-à-crête !!) ; période mesurée par les passages autour de 0 :

$$2T = 14{,}5 - 1{,}9 \simeq 12{,}6\,\mathrm{s} \Longrightarrow T = 6{,}3\,\mathrm{s} \tag{5.6}$$

Donc $\nu = \frac{1}{T} = 0{,}16\,\mathrm{Hz}$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} \simeq 1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Pour la phase à l'origine enfin, s s'annule <u>en décroissant</u> la première fois pour $t_1 \simeq 1{,}9\,\mathrm{s}$:

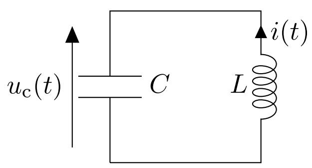
$$\cos(\omega t_1 + \varphi) = 0 \Longleftrightarrow \omega t_1 + \varphi = +\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega t_1 = -0{,}33\,\mathrm{rad} = -20° \tag{5.7}$$

II. L'oscillateur harmonique

II.1 Le circuit LC

a) Expérience

On étudie le circuit suivant constitué de l'association série d'un condensateur de capacité $C = 100\,\mathrm{nF}$ et d'une bobine d'inductance $L = 150\,\mathrm{mH}$. Par un dispositif non décrit ici, on a initialement chargé le condensateur sous une tension $E_0 = 1\,\mathrm{V}$ et on mesure la tension aux bornes du condensateur, et l'intensité traversant les composants. À $t = 0$, on relie le condensateur à la bobine.



On observe alors les résultats suivants :

On constate que ces deux grandeurs mesurées sont sinusoïdales, de même fréquence, en quadrature de phase. L'amplitude de la tension correspond à la tension E_0.

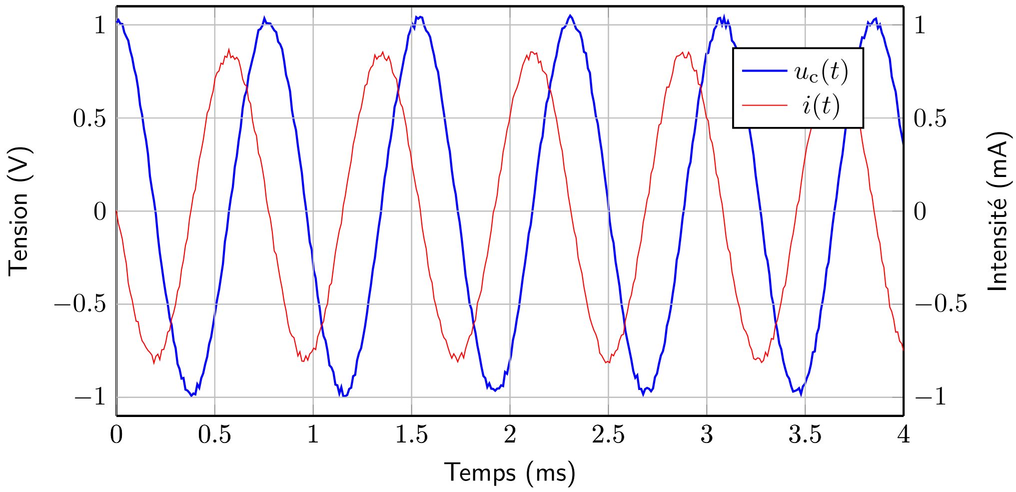


Figure 5.1 – Évolution au cours du temps de la tension aux bornes du condensateur et du courant dans le circuit

b) Équation différentielle

Pour comprendre un tel comportement, il nous faut dans un premier temps établir l'équation sur $u_c(t)$. On applique la loi des mailles :

$$u_c(t) + u_L(t) = 0 = u_c(t) + L\frac{di}{dt} \tag{5.8}$$

Or la relation courant-tension pour le condensateur en convention récepteur est $i(t) = C\frac{du_c}{dt}$, d'où :

*

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c(t) = 0 \iff \boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c(t) = 0} \tag{5.9}$$

D'un point de vue de l'homogénéité, on peut tout de suite constater que $\left[\frac{1}{LC}\right] = T^{-2}$, d'où l'on pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Définition

On appelle **oscillateur harmonique** un système dont la variable $f(t)$ le décrivant vérifie l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{d^2f}{dt^2} + \omega_0^2 f = \text{cste}} \tag{5.10}$$

où le membre de droite est une constante quelconque. ω_0 est alors appelé **pulsation propre** et a comme dimension l'inverse d'un temps.

Le circuit LC série constitue alors bien un oscillateur harmonique. La résolution de cette équation va permettre de comprendre cette appellation.

II.2 L'oscillateur mécanique

a) Force de rappel élastique

Lorsqu'on accroche une masse à un ressort, le fait de tendre ou comprimer le ressort par rapport à sa longueur naturelle génère une force, dite de rappel élastique, sur la masse. Cette dernière se caractérise par deux paramètres :

- la **raideur** du ressort k, exprimée en $\mathrm{N\,m^{-1}}$. Plus elle est élevée, plus le ressort est rigide. À l'inverse, un ressort de raideur faible est souple ;
- la **longueur à vide** ℓ_0. C'est la longueur naturelle du ressort, lorsqu'il n'est ni contracté ni étiré.

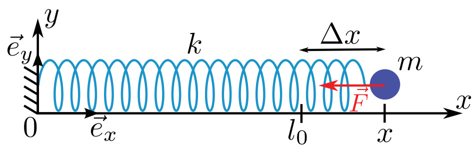
Force de rappel élastique ♡

Soit $\ell(t)$ la longueur du ressort à l'instant t. La **force de rappel élastique $\vec{F}$** que le ressort exerce sur la masse attachée à son extrémité admet pour norme :

$$\boxed{F = k\,|\ell(t) - \ell_0|} \tag{5.11}$$

et pour direction l'axe du ressort. Le sens est enfin donné par le sens physique : si le ressort est comprimé, la force est telle que le ressort pourrait reprendre sa longueur naturelle.

Cette expression est intuitive : la force tend à ramener le ressort à sa position naturelle et ce d'autant plus que la raideur k et **l'allongement $\Delta\ell$** sont importants.



Pour connaître l'expression vectorielle, il convient donc d'utiliser son sens physique : considérons par exemple que le ressort est détendu et horizontal, alors $\ell(t) > \ell_0$, et le ressort va chercher à retrouver sa longueur initiale en exerçant une force dirigée selon $-\vec{e_x}$, d'où un signe $-$ car $(\ell(t) - \ell_0) > 0$:

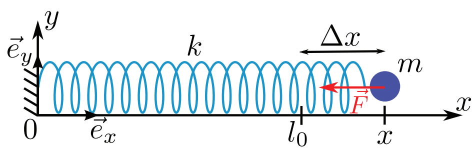
$$\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e_x} \tag{5.12}$$

Exercice

Considérons un amortisseur de voiture accroché d'une part à l'essieu de la roue, et d'autre part à la carcasse de la voiture.. On considère un axe vertical orienté vers le haut. Préciser l'expression vectorielle de la force exercée par le ressort sur la carcasse, et celle exercée sur la roue.

En prenant pour origine du repère le sol, $\vec{F}_{\text{carcasse}} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e_z}$, et $\vec{F}_{\text{roue}} = +k(\ell - \ell_0)\vec{e_z}$.

b) Mise en équation de l'oscillateur harmonique mécanique



Considérons l'expérience suivante : une masse m est attachée à un ressort et est libre de se déplacer horizontalement, et pour simplifier selon une seule direction. Nous allons négliger les frottements de la masse sur le sol : la réaction du support est donc verticale. Dans toute la suite, on étudie le système $\{$**masse**$\}$ dans le **référentiel du laboratoire considéré comme galiléen**.

Exercice

En déduire l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ de la masse. Système : masse Référentiel : terrestre supposé galiléen Bilan des forces : poids $\vec{P}$, réaction normale du support $\vec{N}$, force de rappel élastique $\vec{F}$. Cinématique : coordonnées cartésiennes, $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x}$. LQM :$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$

En projetant la relation selon l'horizontale, on a alors :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k(x - \ell_0) \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0} \tag{5.13}$$

On pose donc $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ la pulsation propre du système, qui suit l'équation d'un oscillateur harmonique.

On constate ainsi que les deux systèmes sont régis par la même équation : une analogie semble donc possible entre la tension aux bornes du condensateur, et la position de la masse.

II.3 Résolution de l'équation d'un oscillateur harmonique

Dans la suite, on présente la méthode la plus générale associée à l'équation du type

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 f(t) = \omega_0^2 f_0 \tag{5.14}$$

Première étape : équation sans second membre
Il s'agit ici de trouver la solution générale de l'équation sans second membre

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega_0^2 f = 0 \tag{5.15}$$

On admet que la solution peut s'écrire sous 3 formes équivalentes :

$$\begin{cases} f_{\mathrm{ssm}}(t) = A\ \cos(\omega_0 t) + B\ \sin(\omega_0 t) & (5.16) \\ f_{\mathrm{ssm}}(t) = C\ \cos(\omega_0 t + \varphi) & (5.17) \\ f_{\mathrm{ssm}}(t) = D\ \sin(\omega_0 t + \psi) & (5.18) \end{cases}$$

Les constantes A, B, C, D, φ et ψ étant à déterminer par la suite. Toutes ces formes mènent au même résultat final mais, suivant les cas, les calculs peuvent être notablement simplifiés par un choix astucieux. Nous prendrons ici la première, et ainsi

$$\boxed{f_{\mathrm{ssm}}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)} \tag{5.19}$$

Deuxième étape : solution particulière
Nous cherchons une solution simple vérifiant (5.14). Lorsque le second membre est une constante, il convient de chercher une solution constante. Ici :$0 + \omega_0^2 f_{\mathrm{p}} = \omega_0^2 f_0$ conduit à $\boxed{f_p = f_0}$.

Troisième étape : conditions initiales (C.I.)
La solution générale de l'équation est alors la somme des deux solutions précédentes :

$$f(t) = f_{\mathrm{ssm}}(t) + f_{\mathrm{p}}(t) = f_0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \tag{5.20}$$

Il est temps de déterminer les constantes en utilisant les **conditions initiales**. L'équation différentielle étant d'ordre 2, il est nécessaire de connaître deux conditions initiales, par exemple :

$$\begin{cases} f(t{=}0) = f_0 + a & (5.21) \\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0 & (5.22) \end{cases}$$

Écrivons l'expression de $f(t)$ et de sa dérivée au temps initial :

$$\begin{cases} f(t{=}0) = A\cos(0) + B\sin(0) + f_0 \Longleftrightarrow A + f_0 = f_0 + a & (5.23) \\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t=0) = -A\omega_0\sin(0) + B\omega_0\cos(0) = B\omega_0 = 0 & (5.24) \end{cases}$$

Ces deux systèmes d'équations mènent à $A = a$ et $B = 0$, ce qui termine la résolution de cette équation :

$$\boxed{f(t) = f_0 + a\cos(\omega_0 t)} \tag{5.25}$$

Exercice

En reprenant l'exemple du circuit LC, exprimer la tension $u_{\mathrm{c}}(t)$, puis en déduire l'expression de l'intensité du courant.

L'équation étant sans second membre, on peut écrire la forme des solutions : $u_{\mathrm{c}}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. On cherche A et B à l'aide des conditions initiales liées à la continuité de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité traversant la bobine :

$$u_{\mathrm{c}}(t=0^+) = u_{\mathrm{c}}(t=0^-) = E_0 = A \quad \text{et} \quad i(t=0^+) = i(t=0^-) = 0 = -B\omega_0 \tag{5.26}$$

d'où

$$u_{\mathrm{c}}(t) = E_0\cos(\omega_0 t) \Longrightarrow i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = -C\omega_0 E_0\sin(\omega_0 t) \tag{5.27}$$

II.4 Analyse de l'évolution temporelle

Exercice

Sur un graphique, tracer l'allure des signaux temporels $u_c(t)$ et $i(t)$. Indiquer pour chacun des signaux l'amplitude, la période, la fréquence, la pulsation, la phase (on prendra pour référence un signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$), de manière littérale.

La solution obtenue est bien conforme aux mesures expérimentales : les deux signaux sont sinusoïdaux, les amplitudes sont cohérentes (E_0 pour la tension, $C\omega_0 E_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}E_0 \simeq 0{,}81$ mA). La période du signal sinusoïdal vérifie :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} = 0{,}77\text{ ms} \tag{5.28}$$

tandis que graphiquement, $5T_{\text{exp}} \simeq 3{,}8$ ms donc $T_{\text{exp}} = 0{,}76$ ms.

La pulsation vaut $\omega = \omega_0$ pour les deux signaux, le déphasage est nul pour le signal de la tension, et vaut $\frac{\pi}{2}$ car $\cos(\omega_0 t + \pi/2) = -\sin(\omega_0 t)$.

II.5 Approche énergétique

On a vu dans le chapitre précédent que les deux dipôles pouvaient stocker de l'énergie. On peut les exprimer :

$$\mathcal{E}_{\text{C}} = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}CE_0^2\cos^2(\omega_0 t) \tag{5.29}$$

pour l'énergie stockée dans le condensateur, et d'autre part pour la bobine :

$$\mathcal{E}_{\text{L}} = \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2}LC^2\omega_0^2E_0^2\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}CE_0^2\sin^2(\omega_0 t) \tag{5.30}$$

Leur représentation graphique permet de traduire les échanges énergétiques entre les deux dipôles :

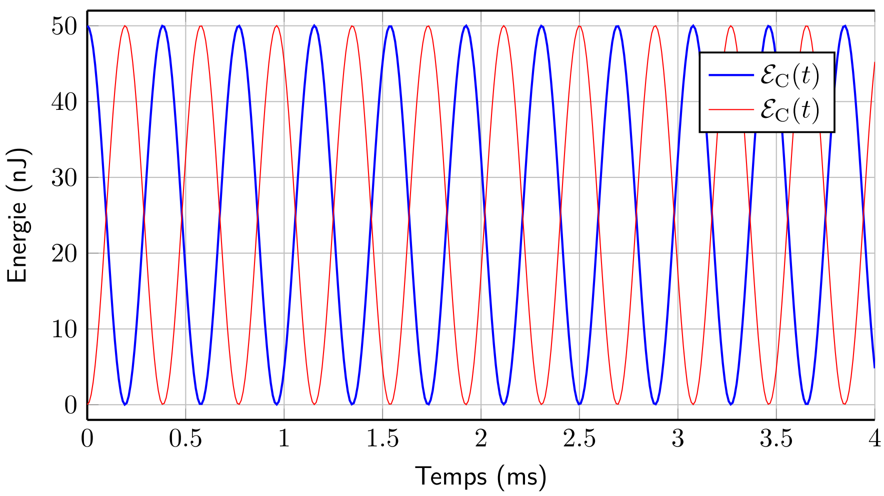


Figure 5.2 – Évolution au cours du temps de l'énergie stockée dans le condensateur et dans la bobine

On observe donc qu'il y a continuellement un transfert d'énergie du condensateur vers la bobine et inversement, sans atténuation. On note enfin que $\mathcal{E}_{\text{C}} + \mathcal{E}_{\text{L}} = \frac{1}{2}CE_0^2 = \text{cste}$. L'énergie totale dans le circuit est donc constante.

Néanmoins, sur un temps plus long, il s'avère que la modélisation est imparfaite, et l'énergie totale dans le circuit diminue, liée à la résistance électrique de la bobine.

De la même manière, l'oscillateur mécanique ne présente ni frottement ni échange thermique et on s'attend donc à ce que l'énergie mécanique se conserve. Nous allons vérifier ce résultat sur la solution $x(t) = \ell_0 + a\cos(\omega_0 t)$ en étudiant les deux formes d'énergie (cinétique et potentielle) du système.

L'énergie cinétique de l'oscillateur est donnée par la formule $\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$ soit ici $E_c = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t)$ car $v(t) = \dot{x}(t) = -a\omega_0\sin(\omega_0 t)$. Cette énergie n'est pas constante et évolue de manière sinusoïdale à la fréquence double de celle d'oscillation (sa valeur maximale étant rencontrée lorsque la masse passe par sa position d'équilibre $x = \ell_0$, soit deux fois par période).

L'énergie potentielle de pesanteur de la masse n'évolue pas puisque celle-ci reste au niveau du sol. En revanche, nous verrons en mécanique que la force exercée par le ressort sur la masse dérive d'une **énergie potentielle élastique** dont l'expression, dépendant de l'allongement $\Delta\ell = \ell(t) - \ell_0$, est :

$$\boxed{E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2} \tag{5.31}$$

soit en injectant la solution :

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega_0 t) \tag{5.32}$$

Exercice

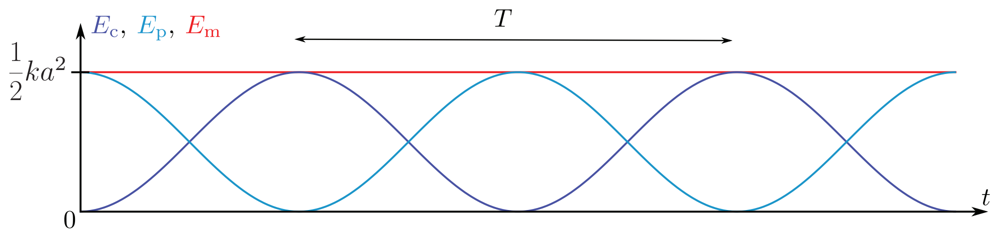
Vérifier que l'énergie mécanique, somme des énergies potentielle et cinétique, est constante au cours du temps.

Calculons l'énergie mécanique, somme des énergies potentielle et cinétique :

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathcal{E}_\mathrm{c} + \mathcal{E}_\mathrm{p} = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 \tag{5.33}$$

D'où avec $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$:

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}ka^2\sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}ka^2 \tag{5.34}$$

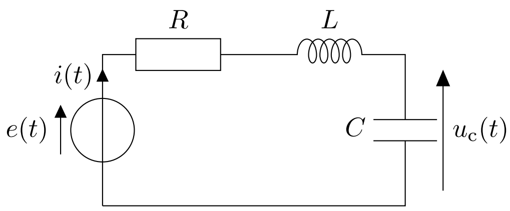


L'oscillateur harmonique présente donc des échanges incessants d'énergie cinétique en énergie potentielle et réciproquement tout en conservant une énergie mécanique constante, ce qui est représenté ci-dessus.

III. Oscillateurs amortis

III.1 Observations expérimentales d'un circuit RLC

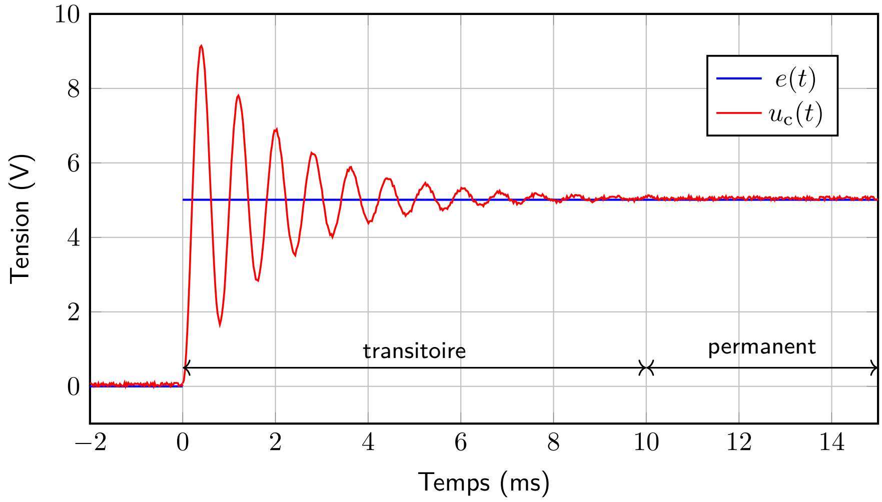
On étudie le circuit suivant constitué de l'association série d'une résistance variable R, d'un condensateur de capacité $C = 110\,\mathrm{nF}$ et d'une bobine d'inductance $L = 150\,\mathrm{mH}$ alimentée par un générateur idéal de tension $e(t)$.



Il est possible de mesurer la tension aux bornes du condensateur lorsqu'on le soumet à un échelon de tension, c'est à-dire que la tension aux bornes du générateur vérifie :

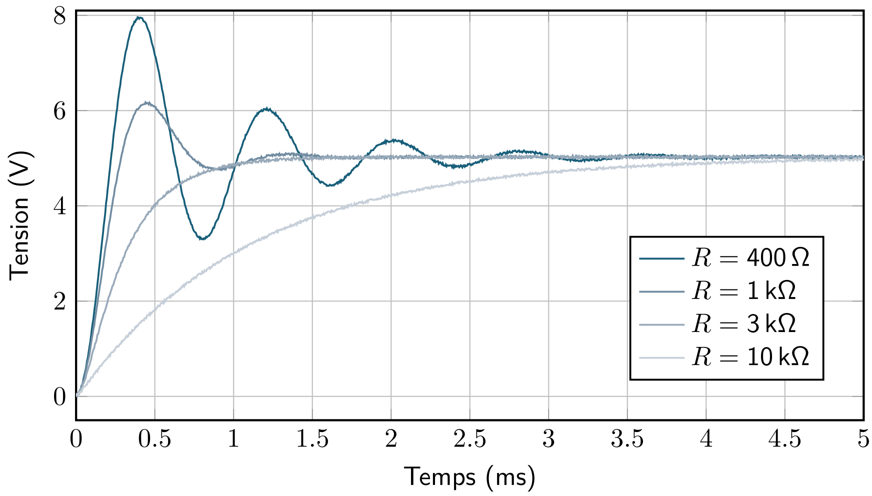
$$\begin{cases} e(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0 & (5.35) \\ e(t) = E_0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0 & (5.36) \end{cases}$$

À l'aide d'un oscilloscope, on obtient les résultats ci-dessous :



On distingue un régime transitoire constitué d'oscillations d'amplitude décroissante suivi d'un régime permanent où la tension aux bornes du condensateur est égale à la fém du générateur.

On constate aussi ci-après qu'à mesure que la résistance augmente, les oscillations se font moins nombreuses durant le régime transitoire, voire disparaissent pour des valeurs assez importantes de R.



III.2 Mise en équation

Exercice

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$. On l'exprimera avec un coefficient 1 devant la dérivée seconde.

Pour le circuit précédent, appliquons la loi des mailles :

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_c(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_c(t) \tag{5.37}$$

De plus, le condensateur impose $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ soit :

$$e(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + u_c(t) \tag{5.38}$$

que l'on peut réécrire sous une forme dite canonique, en divisant l'équation par LC et en ordonnant les dérivées :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_c(t) = \frac{e(t)}{LC}} \tag{5.39}$$

À noter que cette équation est celle d'un oscillateur harmonique si $R = 0$, c'est-à-dire en l'absence de dissipation. Cela permet déjà de comprendre qu'une faible dissipation nous rapproche du modèle de l'oscillateur harmonique.

Équation d'un oscillateur amorti

Un oscillateur amorti décrit par le paramètre physique $f(t)$ est régi par une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 f = \mathrm{cste}} \tag{5.40}$$

où ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur et Q le **facteur de qualité**.

Pour le système précédent, on identifie les paramètres introduits dans l'équation différentielle : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$.

La résolution de cette équation différentielle va permettre de mettre en évidence le rôle de ces deux paramètres qui caractérisent un oscillateur amorti.

III.3 Résolution

Cherchons donc à résoudre l'équation différentielle pour le circuit RLC à partir de $t \geq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_c(t) = \omega_0^2 E_0 \tag{5.41}$$

On reprend la même structure que pour la résolution de l'équation d'un oscillateur harmonique :

i) Recherche de la solution de l'équation sans second membre

On va résoudre l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_c(t) = 0 \tag{5.42}$$

D'après le cours de mathématique, les solutions sont de la forme e^{rt} avec $r \in \mathbb{C}$ solution du polynôme du second degré appelé **polynôme caractéristique** :

*

$$\boxed{r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0} \tag{5.43}$$

de discriminant

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2) \tag{5.44}$$

Distinguons les différents cas de figure selon le signe de Δ :

- $\Delta > 0$, soit $1 - 4Q^2 > 0 \Leftrightarrow Q^2 < 1/4$ et $Q < 1/2$, alors le polynôme admet deux solutions réelles

  *

  $$r_\pm = \frac{-\dfrac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2} < 0 \tag{5.45}$$

  La solution de l'équation sans second membre s'écrit :

  $$\boxed{u_{c,\mathrm{ssm}}(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}} \tag{5.46}$$

  avec A et B des constantes à déterminer.

- $\Delta = 0$, soit $Q = 1/2$, on a une racine double $r = -\dfrac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ et la solution de l'équation sans second membre s'écrit :

  *

  $$\boxed{u_{c,\mathrm{ssm}}(t) = (At + B)e^{rt}} \tag{5.47}$$

  avec A et B des constantes à déterminer.

- $\Delta < 0$, soit $Q > 1/2$, on a deux racines complexes :

On introduit j au lieu de i pour écrire des nombres complexes, ce afin de ne pas confondre avec l'intensité électrique i.

$$r_\pm = \frac{-\dfrac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\mu \pm j\Omega \tag{5.48}$$

avec $\boxed{\mu = \dfrac{\omega_0}{2Q}}$ et $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$.

La solution de l'équation sans second membre s'écrit alors après transformations :

$$\boxed{u_{\mathrm{c,ssm}}(t) = e^{-\mu t}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) = Ce^{-\mu t}\cos(\Omega t + \varphi)} \tag{5.49}$$

où (A, B), (C, φ) sont des couples de constantes déterminées à l'aide des conditions initiales.

ii) Recherche de la solution particulière

La solution particulière, avec le second membre constant, est simplement une constante. En annulant les dérivées, on a donc $\omega_0^2 u_{\mathrm{c,p}} = \omega_0^2 E_0$ et donc $u_{\mathrm{c,p}} = E_0$.

iii) Utilisation des conditions initiales

La solution générale de l'équation de l'oscillateur amorti s'écrit alors

$$u_\mathrm{c}(t) = u_{\mathrm{c,ssm}}(t) + u_{\mathrm{c,p}}(t) \tag{5.50}$$

Poursuivons sur un exemple concret, où $\Delta < 0$. Alors

$$u_\mathrm{c}(t) = e^{-\mu t}\left(\alpha\cos(\Omega t) + \beta\sin(\Omega t)\right) + E_0 \tag{5.51}$$

puis les conditions initiales à $t = 0$ s'écrivent :

$$\begin{cases} u_\mathrm{c}(t=0) = 0 & (5.52) \\ \dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0 & (5.53) \end{cases}$$

Exercice

Justifier ces conditions initiales, sachant que pour $t < 0$, les composants n'ont pas stocké d'énergie :

Du fait de la présence du condensateur et de la bobine imposant la continuité de $i(t)$ et de $u_\mathrm{c}(t)$, il vient $i(t=0^-) = 0 = i(t=0^+) = C\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}(t=0^+)$ et $u_\mathrm{c}(t=0^-) = 0 = u_\mathrm{c}(t=0^+)$

Exercice

Les appliquer pour trouver la solution :

$u_\mathrm{c}(0) = \alpha + E_0 = 0$ soit $\alpha = -E_0$. On calcule ensuite la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t} = e^{-\mu t}\left(-\mu(\alpha\cos(\Omega t) + \beta\sin(\Omega t)) + \Omega\left(-\alpha\sin(\Omega t) + \beta\cos(\Omega t)\right)\right) \tag{5.54}$$

soit à $t = 0$ $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0 = -\mu\alpha + \Omega\beta$ soit $\beta = -\dfrac{\mu E_0}{\Omega}$ et finalement :

$$\boxed{u_\mathrm{c}(t) = E_0\left(1 - e^{-\mu t}\left(\cos(\Omega t) + \frac{\mu}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\right)} \tag{5.55}$$

III.4 Différents régimes de fonctionnement

a) Régime apériodique $Q < 1/2$

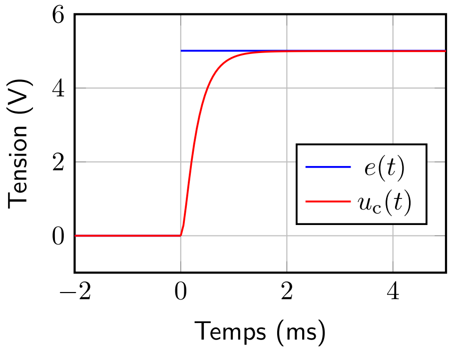
Revenons à l'exemple expérimental. Lorsque $Q < \dfrac{1}{2}$, cela se traduit sur la valeur de la résistance par :

$$\frac{L}{R\sqrt{LC}} < \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 1{,}17\,\mathrm{k\Omega} \tag{5.56}$$

Cela signifie que lorsque **la dissipation est importante**, pour $Q < 1/2$, la solution générale s'écrit :

$$u_c(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t} + E_0 \tag{5.57}$$

c'est-à-dire une évolution similaire à la charge d'un condensateur, conforme aux observations expérimentales précédentes. On parle de **régime apériodique** Le régime transitoire est gouverné par l'exponentielle décroissant le moins vite, c'est-à-dire $e^{r_+ t}$ (car $|r_+| < |r_-|$) et donc **le temps du régime transitoire est de l'ordre de quelques** $1/|r_+|$.



On a représenté ci-dessus l'allure de ce type de signal pour $R = 3\,\mathrm{k}\Omega$.

b) Régime critique : $\Delta = 0$ et $Q = 1/2$

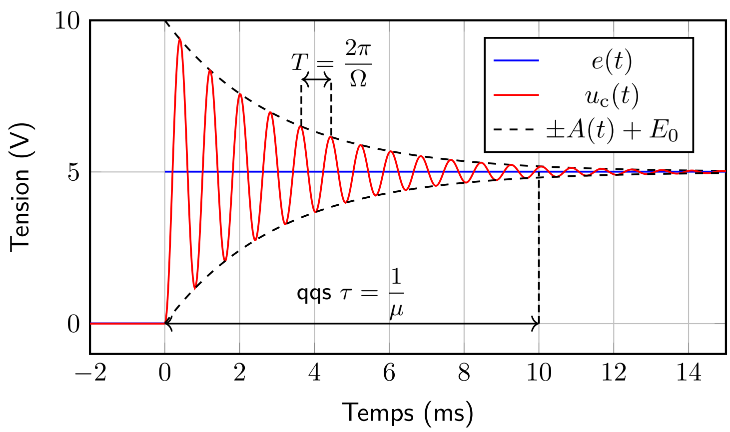
Le deuxième cas à traiter est tel que $Q = \dfrac{1}{2}$, et la solution a été vue précédemment. Aucun tracé graphique n'est ici représenté, étant donné que la différence avec le régime apériodique est imperceptible. **Le temps du régime transitoire sera de l'ordre de quelques** $\dfrac{1}{|r|} = \dfrac{1}{\omega_0}$.

c) Régime pseudo-périodique : $Q > 1/2$

Dans le cas où $Q > \dfrac{1}{2}$, la solution s'écrit :

$$u_c(t) = \underbrace{Ce^{-\mu t}}_{A(t)} \cos(\Omega t + \varphi) + E_0 \tag{5.58}$$

On observe des oscillations autour de la tension en régime permanent E_0 d'amplitude $A(t)$ dépendant du temps, ce qui implique que u_c n'est pas périodique. Pour autant, certains évènements sont périodiques : les maxima, les minima ainsi que les instants où $u_c = E_0$. On parle ainsi de **régime pseudo-périodique** de **pseudo-période** $T = 2\pi/\Omega$ et **pseudo-pulsation** Ω différente de ω_0. L'allure temporelle est caractérisée par une sinusoïde dont l'amplitude est comprise dans une enveloppe exponentiellement décroissante avec un temps caractéristique $\tau = 1/\mu$, comme l'illustre la figure ci-dessous. **Le temps du régime transitoire sera donc de l'ordre de quelques** $1/\mu$.



d) Oscillations dans le cas où $Q \gg 1$

On peut enfin calculer le nombre d'oscillations durant le régime transitoire pour $Q \gg 1$, en comparant la période $T = \dfrac{2\pi}{\Omega} \simeq \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ (car $1 - 1/(4Q^2) \simeq 1$) et le temps du régime transitoire donné à partir de l'enveloppe exponentielle $T_{\text{trans}} \simeq 3\tau \simeq 3 \times 1/\mu$:

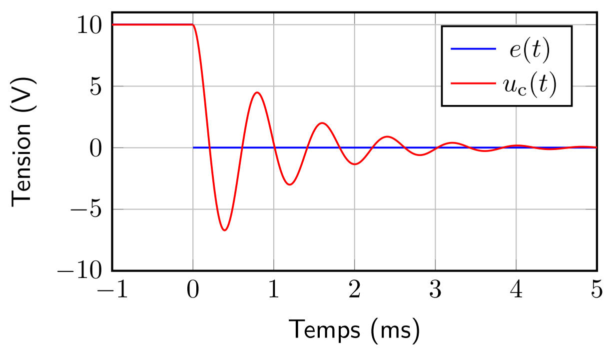
$$N_{\text{osc}} = \frac{T_{\text{trans}}}{T} = \frac{3 \cdot 2Q}{\omega_0} \times \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq Q \tag{5.59}$$

Oscillations pour un régime pseudo-périodique

Dans le cas où le facteur de qualité Q est grand devant 1, l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations durant la totalité du régime transitoire pseudo-périodique est Q, et la pulsation associée est $\Omega \simeq \omega_0$.

Exercice

Représenter l'évolution de $u_c(t)$ au cours du temps pour un régime libre, c'est-à-dire lorsque le condensateur est initialement chargé (par exemple sous une tension de 10 V) puis à $t = 0$ on éteint le générateur.



e) Bilan énergétique

On peut effectuer un bilan énergétique en partant de la loi des mailles et en la multipliant par l'intensité $i(t)$:

$$e(t)i(t) = Ri^2(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i(t) + u_c(t)i(t) \tag{5.60}$$

soit avec $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ il vient

$$e(t)i(t) = Ri^2(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Li^2/2 + Cu_c^2/2\right) \tag{5.61}$$

soit en introduisant $P_g = e(t)i(t)$ la puissance fournie par le générateur, $\mathcal{E}_C = Cu_c^2/2$ l'énergie stockée dans un condensateur, $\mathcal{E}_L = Li^2/2$ l'énergie stockée dans la bobine et enfin $P_J = Ri^2$ la puissance dissipée par effet Joule :

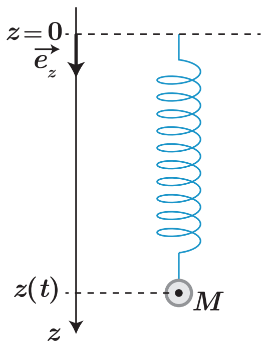
$$P_g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L\right) + P_J \tag{5.62}$$

Cela traduit les échanges énergétiques : l'énergie fournie par le générateur est stockée dans le condensateur et dans la bobine, mais est également dissipée par effet Joule.

In fine, la bobine ne stockera pas d'énergie car en régime permanent le condensateur va bloquer le passage du courant. Ici seul le condensateur stocke de l'énergie de façon permanente.

III.5 Analogie électromécanique

a) Approche qualitative



Pour une masse accrochée à un ressort vertical, on peut effectuer les mêmes constatations expérimentales que dans la section I.1 concernant sa position au cours du temps :

- dans l'air la masse oscille longtemps avec une amplitude qui décroît progressivement (illustré ci-dessous) dans ce qui semble être un régime pseudo-périodique ;
- si on place la masse dans l'eau, on constate qu'elle oscille toujours, mais le nombre d'oscillations décroît drastiquement : on augmente la dissipation du fait des frottements avec le fluide, ce qui pourrait s'apparenter à une diminution du facteur de qualité ;
- si on la place enfin dans le glycérol ou du miel, liquides visqueux, la masse va atteindre sa position d'équilibre sans osciller, du fait d'un frottement important : cela semble être un régime apériodique.

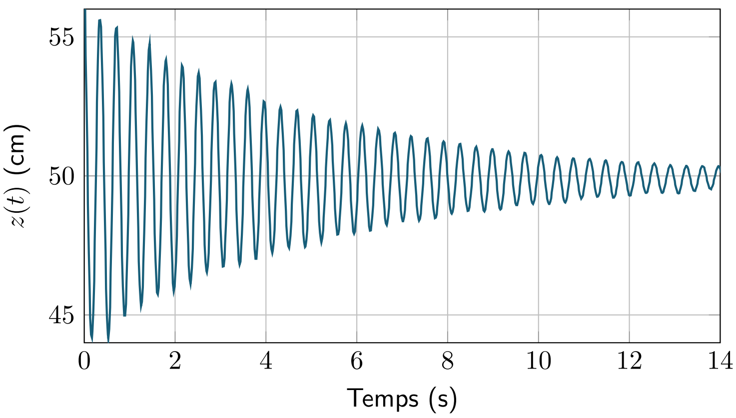


Figure 5.3 – Courbe expérimentale de l'évolution de la position d'une masse accrochée à un ressort en fonction du temps, dans l'air

b) Mise en équation

Considérons donc un système constitué d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 et d'une masse m astreinte à se déplacer verticalement. La masse est soumise à plusieurs forces :

- le poids $\vec{P} = +mg\vec{e_z}$;
- la force de rappel élastique dont on rappelle l'expression $\vec{F} = -k(\ell-\ell_0)\vec{e_z} = -k(z(t)-\ell_0)\vec{e_z}$;
- une force dite de **frottements fluide** $\vec{F_\mathrm{f}} = -\alpha\vec{v}$ s'opposant constamment au mouvement, avec α coefficient de frottements fluide (exprimé en kg s^{-1}).

* L'application de la loi de la quantité de mouvement à la masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen conduit à

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{F_\mathrm{f}} \tag{5.63}$$

Étant donné que le mouvement est vertical, on projette cette relation selon $\vec{e_z}$, sachant que $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e_z}$ et $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\vec{e_z}$:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -k(z(t)-\ell_0) - \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + mg \tag{5.64}$$

* On écrit cette équation sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}\ell_0 + g} \tag{5.65}$$

On peut ainsi exprimer la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, et le facteur de qualité est tel que $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\alpha}{m}$, soit $Q = \dfrac{m\omega_0}{\alpha}$, d'autant plus grand que le coefficient de frottement α est faible.

c) Analogie

L'établissement de cette équation différentielle permet de réaliser une analogie entre les différentes grandeurs physiques mises en jeu dans le circuit RLC et dans le système-masse ressort :

- la position $z(t)$ est l'analogue de la tension $u_\mathrm{c}(t)$;
- il en est de même pour la vitesse $v(t)$ et la dérivée de la tension $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i(t)}{C}$ (donc il y a une similitude entre vitesse et intensité) ;
- la masse m et l'inductance L traduisent un effet d'inertie du système quant à la variation de vitesse ou d'intensité électrique ;
- la raideur du ressort k est liée à l'inverse de la capacité $\dfrac{1}{C}$;
- et surtout le coefficient de frottement α et la résistance R traduisent tous deux la dissipation.

Exercices

5.1 Oscillateur harmonique électrique

On s'intéresse à un circuit composé d'une bobine d'inductance $L = 400\,\text{mH}$ et d'un condensateur de capacité $C = 100\,\text{nF}$. Le générateur impose $e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $e(t) = E_0 = 5\,\text{V}$ pour $t > 0$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ et la résoudre.

2. En réalité on observe un régime transitoire pseudo-périodique qui s'amortit. Seule une trentaine d'oscillations est observée avant d'atteindre un régime permanent. Expliquer et quantifier cette observation.

---

1. Loi des mailles dans le circuit : $e(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{c} = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2} + u_\mathrm{c}$ conduisant à l'équation d'un oscillateur harmonique (mise sous forme canonique) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_\mathrm{c} = \frac{1}{LC}e(t)} \tag{5.66}$$

On identifie la pulsation propre : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Pour $t < 0$, il n'y a pas de générateur, et l'on suppose que les composants n'ont pas stocké d'énergie. Par conséquent, $u_\mathrm{c}(t = 0^-) = 0 = u_\mathrm{c}(t = 0^+)$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur) et $i(t = 0^-) = 0 = i(t = 0^+)$ (continuité du courant traversant la bobine). Soit, comme $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$. On écrit la solution de l'équation précédente :

- solution sans second membre $u_{\mathrm{c,ssm}}(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$;
- solution particulière constante car le second membre est constant : $u_{\mathrm{c,p}}(t) = E_0 = 5{,}0\,\text{V}$;
- solution générale $u_\mathrm{c}(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + E_0$.

Les conditions initiales conduisent à $A + E_0 = 0$ et $B\omega_0 = 0$ (dérivée) donc $A = -E_0$ et $B = 0$. Donc la solution à notre problème s'écrit :

$$\boxed{u_\mathrm{c}(t) = E_0\left(1 - \cos\omega_0 t\right)} \tag{5.67}$$

2. En réalité, on observe un régime pseudo-périodique, ce qui signifie qu'il y a de la dissipation dans le circuit : c'est logique, une bobine possède toujours un petit aspect résistif ! Le système est donc un oscillateur amorti par une résistance. En réécrivant la loi des mailles, en incluant la résistance, on aboutit à :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_\mathrm{c} = \omega_0^2 e(t) \tag{5.68}$$

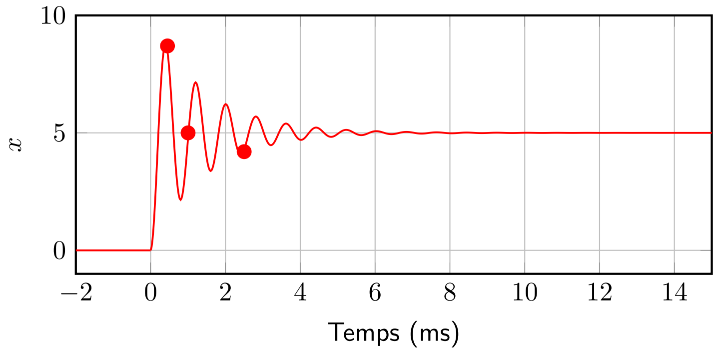
donc le facteur de qualité vérifie $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$ donc $R = \dfrac{L\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{Q}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Enfin, comme il y a une trentaine d'oscillations observées, cela signifie que le facteur de qualité est grand, donc le nombre d'oscillations correspond au facteur de qualité $Q \simeq 30$. Ainsi la résistance vaut :

$$R = 67\,\Omega \tag{5.69}$$

5.2 Détermination expérimentale des paramètres d'un oscillateur amorti

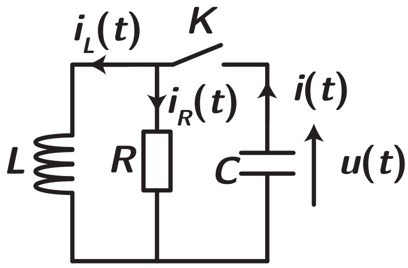
Est représentée ci-dessous l'évolution au cours du temps du paramètre régissant l'oscillateur amorti au cours du temps x que l'on cherche à étudier.

Déterminer expérimentalement la pseudo-période de l'oscillateur harmonique et le facteur de qualité. En déduire la ***pulsation propre*** *de l'oscillateur amorti, en justifiant.*



5.3 Circuit RLC parallèle

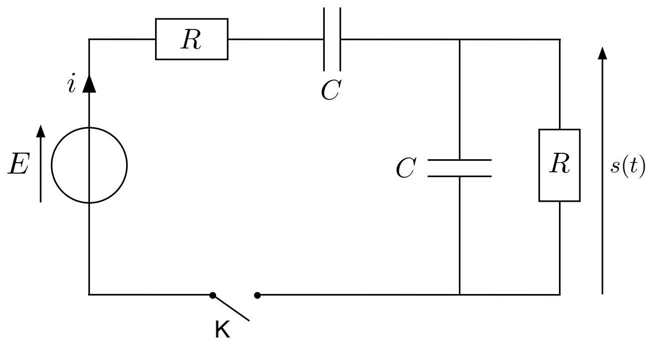
On considère le circuit ci-dessous, avec $C = 1{,}0\,\mu\text{F}$, $L = 0{,}1\,\text{mH}$ et $R = 1\,\text{k}\Omega$. L'armature supérieure porte la charge $Q(t=0) = Q_0 = 20\,\mu\text{C}$. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.



1. Quelles sont les valeurs $u(0^+)$, $i(0^+)$ et $i_R(0^+)$ des grandeurs juste après la fermeture de l'interrupteur ?
2. Quelles sont les valeurs de ces grandeurs en régime permanent ?
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur. La mettre sous forme canonique pour identifier pulsation propre et facteur de qualité. En déduire la nature du régime. Au bout de combien de temps le régime transitoire peut-il être considéré terminé ?
4. Que se passe-t-il pour le système si on augmente ou diminue la valeur de la résistance ? Commenter qualitativement.
5. Résoudre l'équation différentielle pour en déduire l'expression de $u(t)$. Tracer son allure. Comment obtenir l'expression de l'intensité du courant $i(t)$?

5.4 Circuit à deux condensateurs

On s'intéresse au montage ci-dessous. Les condensateurs sont initialement déchargés et on ferme K à t=0.



1. Déterminer l'expression de $s(t=0^+)$ et de $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t=0^+)$. Déterminer la valeur de $s(t)$ à $t \to +\infty$.
2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s(t)}{\tau^2} = 0\ .$$

Donner l'expression de τ.

3. Trouver l'expression de $s(t)$ en déterminant bien les constantes d'intégration.
4. Tracer $s(t)$.

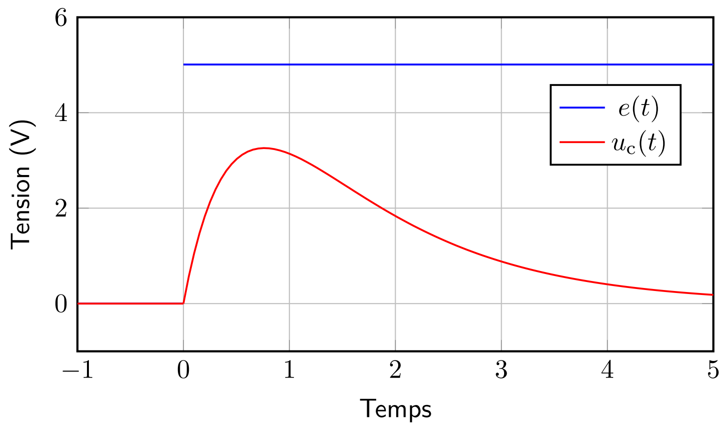
---

1. Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, donc $s(t=0^+) = 0 = s(t=0^-)$ (propriété vérifiée pour l'autre condensateur également). Pour la dérivée, on écrit une loi des mailles à $t = 0^+$: $E = Ri(t=0^+) + 0 + 0$ toujours à l'aide de la continuité de la tension aux bornes du condensateur. Par conséquent $i(t=0^+) = \frac{E}{R}$ et la loi des nœuds s'écrit enfin $i(t=0^+) = C\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t=0^+) + \frac{s(t=0^+)}{R}$ d'où $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t=0^+) = \frac{E}{RC}$.
Pour $t \to +\infty$, on remplace les condensateurs par des interrupteurs ouverts. Le courant est donc nul dans le circuit, et nécessairement $s(t \to +\infty) = 0$.

2. Lois des mailles : $E = Ri + u_{c,1} + s(t)$, $s(t) = u_{c,2}$. Loi des nœuds $i = C\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{R}$. Et comme $i = C\frac{\mathrm{d}u_{c,1}}{\mathrm{d}t}$, il faut dériver la première loi des mailles :
$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \Longleftrightarrow 0 = \left(RC\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{RC}\right) + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{5.70}$$
conduisant à l'équation :
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{RC} + \frac{1}{(RC)^2}s(t) = 0} \tag{5.71}$$
On pose donc $\tau = RC$.

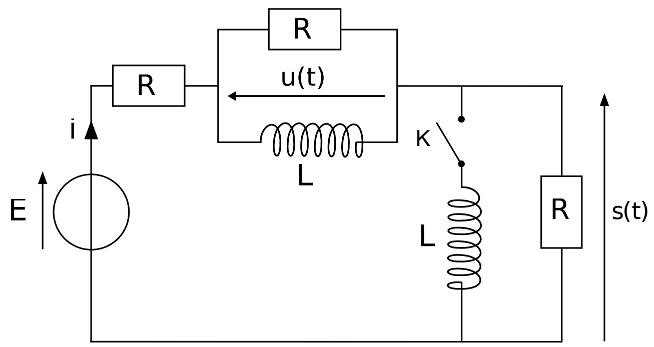
3. On a l'équation d'un oscillateur amorti, vérifiant $\omega_0^2 = \frac{1}{\tau^2}$ donc $\omega_0 = 1/\tau$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{\tau}$ donc $Q = \frac{1}{3}$. On est donc dans un régime apériodique car $Q < 1/2$:
$$s(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t} \tag{5.72}$$
avec $r_\pm = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2} = -\frac{3}{2RC}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}}\right) = -\frac{3}{2\tau}\left(1 \pm \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Avec les conditions initiales, il vient après calculs (à faire) :
$$A + B = 0 \quad \text{et} \quad r_+ A + Br_- = \frac{E}{RC} \Longleftrightarrow B = -A \quad \text{et} \quad A = \frac{E}{RC(r_+ - r_-)} = -\frac{E}{\sqrt{5}} \tag{5.73}$$
d'où
$$s(t) = \frac{E}{\sqrt{5}}\left(e^{r_- t} - e^{r_+ t}\right) \tag{5.74}$$

4. Allure différente de la réponse "classique" à un échelon, car on part de $s = 0$ à $t = 0$ et on tend également vers $s = 0$ pour $t \to +\infty$.



5.5 Réponse d'un circuit à deux bobines

On considère le montage suivant où le générateur est un générateur supposé idéal de tension continue de force électromotrice E. L'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.



1. Déterminer la valeur de s et des courants dans chaque branche à $t = 0$, puis pour $t \to +\infty$.

2. Établir une relation liant u, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

3. Établir une relation liant s, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

4. Établir une relation liant E, s, u et i.

5. Déduire des trois relations précédentes que $3\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4}{\tau}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau^2}s = 0$, où τ est un constante à déterminer en fonction des données du problème.

6. Déterminer la forme générale de $s(t)$ (on ne demande pas de calculer les constantes d'intégration).

7. Tracer l'allure de $s(t)$.

Quelques éléments de réponse, en cas d'hésitation, venez me voir !

1. Si l'interrupteur est ouvert depuis très longtemps, la bobine verticale ne contient pas d'énergie. Après calculs, on obtient d'abord à $t = 0^-$, en remplaçant les bobines par des fils :

$$i(0^-) = \frac{E}{2R} = i_L(0^-) = i_{R,2}(0^-) \quad i_R(0^-) = 0 = i_{L,2}(0^-), \quad \text{et} \quad s(0^-) = \frac{E}{2} \tag{5.75}$$

À $t = 0^+$, en utilisant la continuité du courant dans les deux bobines : $i_L(0^+) = \frac{E}{2R}$ et $i_{L,2}(0^+) = 0$. En écrivant une loi des mailles, on détermine $i(0+)$ sachant que les lois des nœuds conduisent à $i_R = i - i_L$ et $i_{R,2} = i - i_{L,2}$:

$$E = Ri(0^+) + R\left(i(0^+) - \frac{E}{2R}\right) + Ri(0^+) = 3Ri(0^+) - \frac{E}{2} \Longleftrightarrow i(0^+) = \frac{E}{2R} \tag{5.76}$$

Donc l'intégralité des courants sont continus, et $s(0^+) = \frac{E}{2}$.

Pour $t \to +\infty$, les bobines sont remplacées par des fils, on a donc $s = 0 = u$, et $i = \frac{E}{R}$. Les courants dans les deux résistances en parallèle des bobines sont nuls.

2. Loi des mailles dans la maille du haut (L et R) : $u = R(i - i_L) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$. On dérive u :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - R\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{R}{L}u \tag{5.77}$$

3. De la même façon dans la maille de droite avec la résistance et la bobine :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{R}{L}s \tag{5.78}$$

4. On écrit une loi des mailles dans la maille globale :

$$E = Ri + u + s \tag{5.79}$$

5. Il reste maintenant à les combiner. On dérive la dernière loi des mailles écrite :

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \tag{5.80}$$

Le souci est que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ dépend de u. On injecte la relation de la question 2., puis celle de la question 4. pour éliminer u :

$$2R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{R}{L}u + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0 = 2R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{R}{L}E + \frac{R^2}{L}i + \frac{R}{L}s + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{5.81}$$

que l'on dérive à nouveau pour faire apparaître $R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}s$:

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{R}{L} \times R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{5.82}$$

On injecte la relation, on développe et on réorganise, et l'on aboutit à

$$\boxed{3\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4R}{L}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 s = 0} \tag{5.83}$$

correspondant à l'équation de l'énoncé en posant $\tau = \frac{L}{R}$.

6. On reconnaît l'ED d'un oscillateur amorti de pulsation propre $\omega_0^2 = \frac{1}{3\tau^2}$ et de facteur de qualité vérifiant :

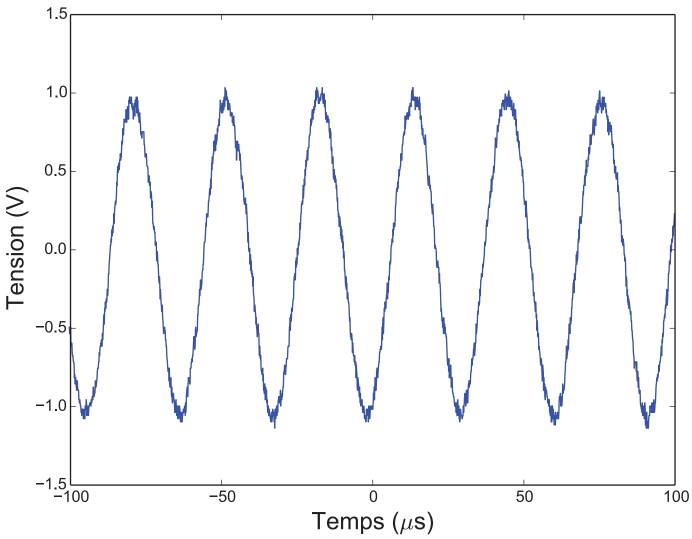
$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{4}{3\tau} \iff Q = \frac{3\omega_0\tau}{4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}\tau} \times 3\tau}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2} \tag{5.84}$$

On a donc un régime apériodique, de la forme $s(t) = Ae^{r_-t} + Be^{r_+t}$.

7. Pour le tracé, on se sert du fait que $s(0) = \frac{E}{2}$ et que $s(t \to +\infty) = 0$. Enfin, on peut montrer grâce à la question 1 et 3 que $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = -\frac{E}{2\tau} < 0$, donc $s(t)$ décroît de $E/2$ vers 0.

5.6 Étude expérimentale d'un quartz

Pour comprendre le fonctionnement d'une montre, on étudie le quartz qu'elle contient (valant moins d'un euros). Ce matériau, dit *piézoélectrique*, a la particularité de lier déformation mécanique et réponse électrique : on lui soumet ici un « choc électrique », puis on mesure ses déformations ultérieures en relevant la tension à ses bornes. La figure ci-dessous est obtenue expérimentalement.



1. Mesurer la valeur moyenne, l'amplitude, la période, la fréquence, la pulsation et la phase à l'origine du signal.

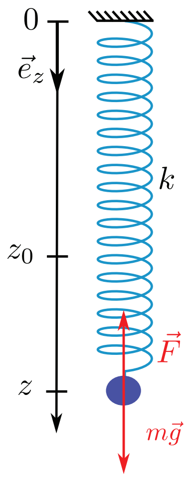
2. La fréquence d'oscillation de tels quartz est directement reliée à sa taille ainsi qu'à la vitesse d'ondes sonores dites *transverses* et valant 340 m s^{-1}. Vérifier qu'un quartz oscillant à la fréquence mesurée ici tient dans une montre ; qu'en est-t-il d'un quartz oscillant à 1 Hz ?

3. Sachant que le quartz pèse 1,7 g et oscille avec une amplitude de l'ordre de 10 µm, calculer numériquement :
   (a) la vitesse maximale du quartz ;
   (b) son accélération maximale ;
   (c) son énergie cinétique maximale.

5.7 Saut à l'élastique

Nous étudions dans cet exercice une version simplifiée de ce qu'il se passe lors de la phase d'un saut à l'élastique où l'élastique est tendu.
On effectuera les hypothèses suivantes :

- on néglige tout type de frottement ;
- l'élastique est assimilé à un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 correspondant à une côte z_0 et de masse nulle ;
- le sauteur est assimilé à une masse m ponctuelle située en $z(t)$.



1. Déterminer la position d'équilibre de la masse, notée $z_{éq}$?
2. En appliquant la loi de la quantité de mouvement (2e loi de Newton), en déduire l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
3. Quelle pulsation ω_0 caractéristique du système peut-on introduire ? Quelle équation différentielle vérifie $z(t)$?
4. Donner la solution générale de cette équation.

Les conditions initiales sont les suivantes : $\begin{cases} z(t\!=\!0) = z_0 \\ \frac{dz}{dt}(t\!=\!0) = 0 \end{cases}$

4. Déterminer l'expression exacte de $z(t)$.
5. Représenter $z(t)$ en faisant apparaître son amplitude et sa période.

5.8 Bille sur un plateau

Sur un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 est accrochée une plaque de masse M. On pose une bille de masse m sur la plaque. On suppose qu'il n'y a pas de mouvement de rotation du plateau, que la bille ne se translate pas horizontalement. On néglige enfin les frottements de l'air.

1. Décrire le mouvement quand la bille reste au contact de la plaque. On considère une vitesse initiale nulle et la compression du ressort d'une longueur a par rapport à la position d'équilibre. On notera ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur.
2. En calculant la réaction de la plaque sur la bille, donner la condition de non-décollage de la bille au cours des oscillations du système en fonction de a, ω_0 et g.

Indication : se demander pour chaque question le système à étudier.

5.9 Oscillateur transplanétaire

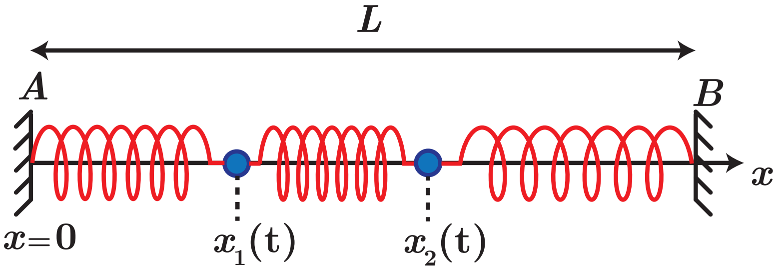
On peut montrer qu'à l'intérieur d'un astre sphérique et homogène de masse M et de rayon R, le champ de pesanteur varie linéairement en fonction de la distance x au centre de l'astre selon :

$$\vec{G} = -\frac{\mathcal{G}M}{R^3}x\overrightarrow{e_x}$$

avec $\overrightarrow{e_x}$ un vecteur unitaire vertical ascendant. On considère alors un hypothétique puits traversant la Terre de part en part en passant par son centre. Le référentiel terrestre sera supposé galiléen.
Montrer qu'un objet lâché dans ce puits et sans vitesse initiale va avoir un comportement d'oscillateur harmonique et déterminer sa période ainsi que la vitesse maximale atteinte au cours du voyage. On donne : $R_T = 6{,}38 \cdot 10^3$ km, $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ USI et $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

5.10 Couplage de deux oscillateurs

On place sur un rail à coussin d'air deux oscillateurs mécaniques identiques constitués chacun d'un ressort (raideur k et longueur à vide ℓ_0) et d'un chariot de masse m. Ces oscillateurs sont couplés par un troisième ressort, identique. Les deux chariots sont repérés par leurs abscisses x_1 et x_2, la distance entre les deux extrémités du système est fixe et vaut $L = 3\ell_0$.

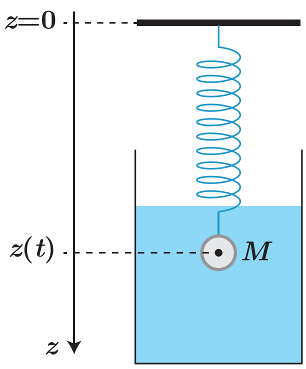


1. Établir les deux équations différentielles vérifiées par les abscisses x_1 et x_2.
2. Vérifier la cohérence des équations avec les positions d'équilibre de chaque masse supposée ponctuelle.
3. Les équations mathématiques obtenues ne sont pas solubles facilement. On introduit deux nouvelles variables $u = x_1 + x_2$ et $v = x_1 - x_2$. Montrer que chacune de ces deux nouvelles variables vérifie une équation d'oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation propre.
4. Donner la solution générale en fonction de constantes.
5. Étudier et décrire les deux cas suivants :
   - mouvement où v est constant au cours du temps ;
   - mouvement où u est constant au cours du temps.

   On s'attachera à décrire mathématiquement et physiquement ces deux cas, encore appelés des "modes" d'oscillation.

5.11 Viscosimètre

Une sphère, de rayon R et de masse volumique ρ est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η, la sphère est soumise à une force de frottement donnée par la formule de Stokes : $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la sphère. Le fluide est de masse volumique ρ_0. On repère la masse par le paramètre z.



1. En effectuant une analyse dimensionnelle, déterminer la dimension de η.
2. Dans l'air, où les frottements sont négligeables, la période des oscillations est T_0. En supposant dans le fluide un régime pseudo-périodique de période T, montrer qu'il est possible d'exprimer la viscosité en fonction de paramètres mesurables, avec :

$$\eta = \alpha\sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^2}$$

   où l'on précisera l'expression de α en fonction de R, ρ_0 et T_0.