

# Les oscillateurs électriques et mécaniques en régime forcé

## Sommaire

|  |           |
|--|-----------|
| <b>6.1 Introduction mathématique</b>                                       | <b>3</b>  |
| 6.1.1 Circuit RC en régime forcé   | 3         |
| 6.1.2 Résolution   | 3         |
| <b>6.2 Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé</b>                 | <b>5</b>  |
| 6.2.1 Observations expérimentales  | 5         |
| 6.2.2 Mise en équation   | 7         |
| 6.2.3 Amplitude complexe   | 8         |
| 6.2.4 Formes des solutions   | 9         |
| <b>6.3 Phénomène de résonance</b>  | <b>9</b>  |
| 6.3.1 Définition   | 9         |
| 6.3.2 Résonance en élongation / tension                                    | 9         |
| 6.3.3 Résonance en vitesse / courant                                       | 12        |
| <b>6.4 Utilisation des impédances complexes en régime sinusoïdal forcé</b> | <b>14</b> |
| 6.4.1 Notion d'impédance électrique  | 14        |
| 6.4.2 Retour au cas du circuit RLC série                                   | 15        |
| 6.4.3 Passage d'une équation complexe à une équation différentielle        | 15        |

## Questions de cours :

- Établir l'équation différentielle vérifiée par un oscillateur masse-ressort vertical accroché à un plafond oscillant de position  $z_p(t) = a \cos \omega t$ . Après changement de variable, établir l'expression de l'amplitude complexe de la position de la masse.
- Présenter la notation complexe d'un signal physique sinusoïdal (grandeur complexe, amplitude complexe). Préciser quelles opérations mathématiques sur l'amplitude complexe fournissent l'amplitude réelle, la phase. Rappeler enfin l'effet de la dérivation et l'intégration sur les grandeurs complexes.
- En partant de l'expression de l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série  $\underline{U}_{c,m} = \frac{\omega_0^2 E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$ , établir l'expression de l'amplitude réelle puis établir la condition sur le facteur de qualité  $Q$  d'existence d'une résonance en tension.
- En partant de l'expression de l'amplitude complexe de l'oscillateur forcé  $\underline{U}_{c,m} = \frac{\omega_0^2 E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$ , étudier les cas où la pulsation est soit très inférieure, soit égale, soit très supérieure à la pulsation propre et calculer le déphasage associé dans ce cadre, et représenter l'allure du déphasage en fonction de la pulsation pour différentes valeurs de facteur de qualité.
- Calculer le courant complexe dans un circuit RLC série à partir des impédances et établir l'existence d'une résonance et la pulsation de résonance en intensité.
- Présenter l'analogie électromécanique entre le système masse-ressort et le circuit RLC par le biais d'exemples (forme d'équation en régime libre, grandeurs physique, régime forcé).
- Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique. Présenter leur modélisation à basse et haute fréquence.

## Capacités exigibles du BO :

- Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.
- Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.
- À l'aide d'un outil de résolution numérique, mettre en évidence le rôle du facteur de qualité pour l'étude de la résonance en élongation.
- Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.
- Établir et citer l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
- Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.

## Manipulations de cours :

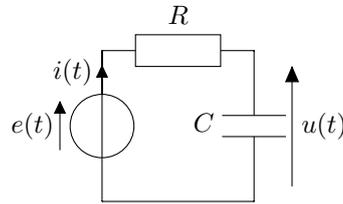
- Résonance d'un système masse-ressort vertical dans l'air et dans l'eau.

- Animation associée :  
[http : //www.sciences.univ – nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort\\_rsf.php](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php)

# I. Introduction mathématique

## I.1 Circuit RC en régime forcé

Considérons un circuit RC série soumis à un générateur de tension sinusoïdal de pulsation  $\omega$   $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ .



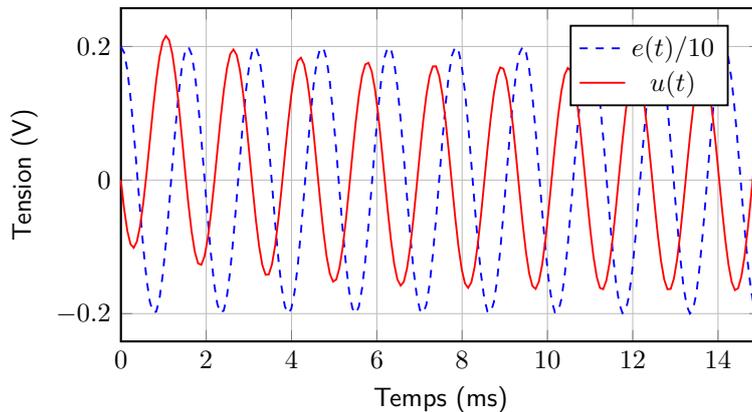
L'équation différentielle à laquelle est soumise la tension aux bornes du condensateur s'obtient en appliquant la loi des mailles et utilisant les relations constitutives :

$$e(t) = Ri + u = RC \frac{du}{dt} + u \quad (6.1)$$

permettant d'écrire, en posant  $\tau = RC$  :

$$\tau \frac{du}{dt} + u = E_0 \cos(\omega t) \quad (6.2)$$

En partant d'un condensateur déchargé, on observe l'établissement d'un régime transitoire suivi d'un régime permanent qui semble sinusoïdal, et de même pulsation que le générateur. On considère ici  $\tau = 3 \text{ ms}$  et  $\omega = 4 \cdot 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , et on a divisé par 10 la tension d'entrée pour bien visualiser la tension de sortie :



On observe qu'au bout de quelques fois  $\tau$ , on atteint un régime où le signal de sortie est purement sinusoïdal, de même pulsation que le signal d'entrée.

## I.2 Résolution

Pour trouver la solution de l'équation homogène, on sait que  $u_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ . Pour la solution particulière, on va utiliser les notations complexes :

### a) Utilisation des complexes pour la solution particulière

En régime permanent, on cherche une solution particulière de la même forme que le second membre avec la même pulsation :  $u_p(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ , où  $U_m$  est l'amplitude et  $\varphi$  le déphasage par rapport au signal excitateur. Afin de déterminer assez facilement  $U_m$  et  $\varphi$ , on va utiliser des notations complexes.

Pour une grandeur sinusoïdale de la forme  $f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi)$  est associée une grandeur complexe notée  $\underline{f}(t)$  telle que  $\text{Re}(\underline{f}(t)) = f(t)$ , soit donc

$$\underline{f}(t) = F_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{f}_m e^{j\omega t} \quad (6.3)$$

où  $\underline{f}_m = F_m e^{j\varphi}$  est appelée l'amplitude complexe, contenant toute l'information désirée sur le régime permanent (la pulsation étant connue).

Deux propriétés intéressantes concernent la dérivation et l'intégration :

- $\frac{d\underline{f}}{dt} = \underline{f}_m \frac{de^{j\omega t}}{dt} = j\omega \underline{f}_m e^{j\omega t} = j\omega \underline{f}(t)$  : on remplace ainsi l'opérateur  $\frac{d}{dt}$  par une multiplication par  $j\omega$  ;
- de la même façon  $\int \underline{f}(t)dt = \dots = \frac{1}{j\omega} \underline{f}(t)$  : on remplace l'opérateur  $\int$  par une multiplication par  $\frac{1}{j\omega}$ .

Si  $\cos(\omega t)$  est remplacée par  $e^{j\omega t}$  en complexe, la fonction sin est elle remplacée par  $-je^{j\omega t}$  car  $\sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$  soit donc  $\sin(\omega t) \xrightarrow{C} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} = e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} = -je^{j\omega t}$

## b) Amplitude complexe

On écrit tout d'abord l'équation différentielle en notations complexes, sachant que le second membre devient  $E_0 e^{j\omega t}$  :

$$\tau \frac{du}{dt} + u = E_0 e^{j\omega t} \quad (6.4)$$

de sorte qu'en reprenant la partie réelle, on retrouve l'équation initiale.

On utilise ensuite les propriétés sur la dérivation en complexe, considérant la solution particulière :

$$\tau \times j\omega \underline{u}_p + \underline{u}_p = E_0 e^{j\omega t} \iff (1 + j\omega\tau) \underline{u}_p = E_0 e^{j\omega t} \quad (6.5)$$

On remplace enfin la solution particulière dans l'équation différentielle :  $\underline{u}_p(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)}$  :

$$(1 + j\omega\tau) U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = E_0 e^{j\omega t} \iff (1 + j\omega\tau) U_m e^{j\varphi} = E_0 \quad (6.6)$$

Cela permet d'isoler l'amplitude complexe :

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi} = \frac{E_0}{1 + j\omega\tau} \quad (6.7)$$

## c) Amplitude

Pour obtenir l'amplitude réelle  $U_m$ , il suffit de calculer le module de l'amplitude complexe précédente :

$$U_m = |U_m e^{j\varphi}| = \left| \frac{E_0}{1 + j\omega\tau} \right| = \frac{|E_0|}{|1 + j\omega\tau|} \quad (6.8)$$

en utilisant les propriétés sur le module d'une fraction. Puis avec  $|a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$  et en considérant  $E_0 > 0$  :

$$U_m = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad (6.9)$$

## d) Déphasage

Pour obtenir le déphasage  $\varphi$ , il convient de prendre l'argument de l'amplitude complexe :

$$\varphi = \arg(U_m e^{j\varphi}) = \arg\left(\frac{E_0}{1 + j\omega\tau}\right) = \arg E_0 - \arg(1 + j\omega\tau) \quad (6.10)$$

en utilisant la propriété sur l'argument d'un quotient. Puis avec  $\arg(a + jb) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$  si  $a > 0$  :

$$\varphi = 0 - \arctan(\omega\tau) \quad (6.11)$$

## e) Solutions

La solution particulière s'écrit donc :

$$u_p(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega\tau)) \quad (6.12)$$

et la solution générale :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_0}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega\tau)) \quad (6.13)$$

En utilisant les conditions initiales, on peut montrer que  $0 = A + U_m \cos \varphi$ , et donc  $A = -U_m \cos \varphi$ .

Ainsi, dès que  $t \gg \tau$ , **la solution de l'équation homogène tend vers 0, et seule reste la solution particulière**, c'est-à-dire que le système a « oublié » les conditions initiales, la solution en régime permanent est celle qui perdure et est liée à la tension d'entrée ( $E_0$ ) et la pulsation d'entrée  $\omega$  ainsi que les caractéristiques du circuit, à savoir la constante de temps  $\tau$ .

### À retenir

Une équation différentielle avec second membre sinusoïdal admet une solution se décomposant en deux parties :

- la solution de l'équation homogène, modélisant le régime transitoire, limité dans le temps et tendant toujours vers 0 ;
- la solution particulière, correspondant à la solution en régime permanent, sinusoïdale de même pulsation que le second membre, mais d'amplitude et de déphasage dépendant de la pulsation.

## II. Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé

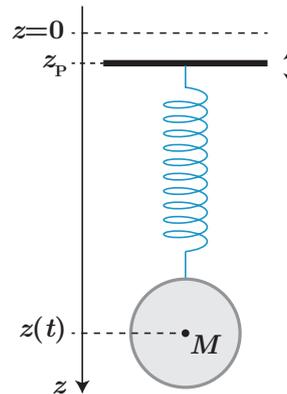
### II.1 Observations expérimentales

#### a) Introduction

Les oscillateurs, qu'ils soient électriques ou mécaniques, peuvent être soumis à des perturbations. Prenons l'exemple de l'expérience Virgo (Italie) ou Ligo (États-Unis) ayant mis en évidence en 2015 les ondes gravitationnelles. L'idée est d'utiliser des cavités dites Fabry-Pérot constituées de deux miroirs en vis-à-vis suspendus dans le vide et distants de quelques kilomètres : au passage d'une onde gravitationnelle la distance entre les miroirs va très légèrement varier. Malheureusement du fait des vibrations du sol – entre autres – ces miroirs peuvent également se traduire l'un par rapport à l'autre, ce qui va avoir une influence sur la précision de l'expérience.

On peut modéliser la situation en première approche comme une masse suspendue à un ressort, lui-même accroché à un support d'altitude  $z_p(t)$  susceptible de varier. On va chercher à déterminer quelles peuvent être les conséquences sur le mouvement de la masse.

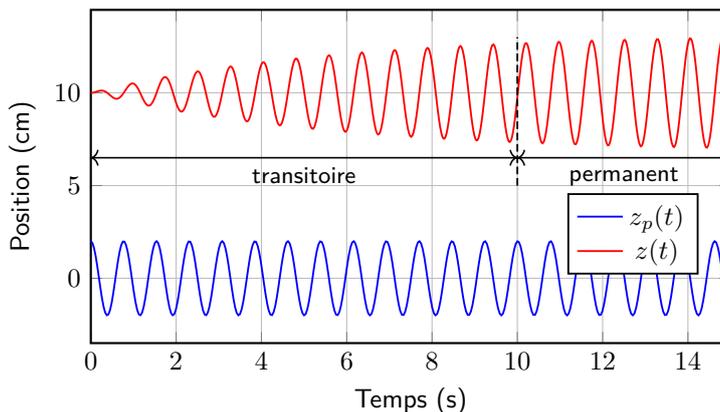
À des fins de simplification, on va déjà s'intéresser à ce qu'il se passe si la vibration du support suit une évolution sinusoïdale (on pourra ensuite généraliser à tout signal périodique un peu plus tard).



#### b) Exemple de l'oscillateur mécanique

##### i) Régime transitoire et permanent

On enregistre au cours du temps la position de la masse, lorsque le support vibre de manière sinusoïdale à la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  : on écrit donc  $z_p(t) = a \cos \omega t$  avec  $a > 0$ . On a mesuré au préalable les propriétés de l'oscillateur amorti : sa fréquence propre est  $\omega_0 = 10,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et son facteur de qualité vaut  $Q = 3$ . On observe alors le signal ci-dessous :



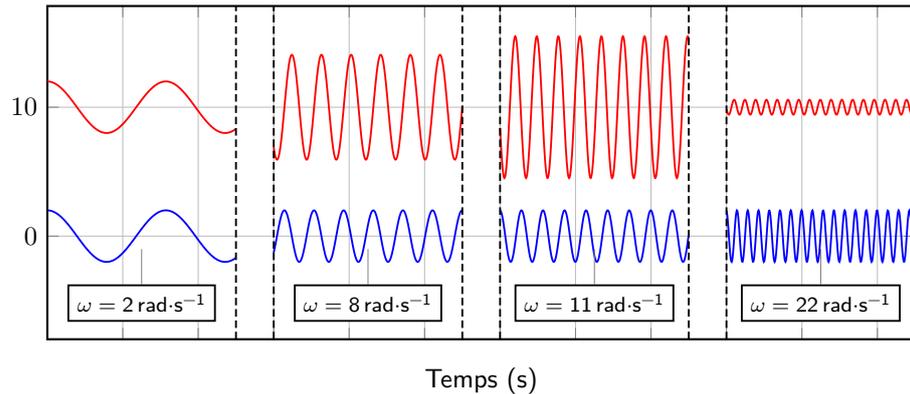
On constate ainsi un régime transitoire suivi d'un régime permanent, mais cette fois-ci le régime permanent n'est pas constant : le signal a la même forme que le signal d' « entrée » (le signal excitateur), à savoir une sinusoïde ayant la même fréquence  $f_p$  : seules l'**amplitude** et la **phase** diffèrent par rapport au signal d'entrée.

### Régime forcé d'un oscillateur

En régime sinusoïdal forcé et après un régime transitoire, le **régime permanent est sinusoïdal**, de **même fréquence que l'excitation**, mais d'**amplitude et de déphasage à l'origine différent**. Ce résultat est **indépendant des conditions initiales**.

#### ii) Influence de la fréquence

Faisons varier la fréquence du support et observons le régime permanent associé au mouvement de la masse :



Plusieurs phénomènes sont à observer :

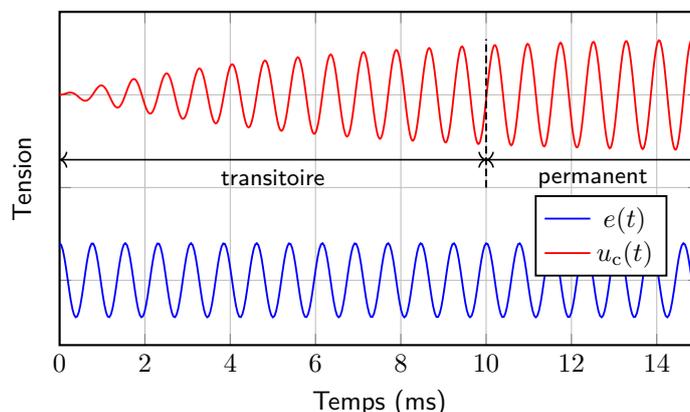
- à basses fréquences (pour  $\omega < \omega_0$ ), la masse suit le mouvement du plateau avec la même amplitude et sans déphasage : les variations d'altitude du support sont suffisamment lentes pour que la masse suive le mouvement et le ressort est de longueur constante ;
- pour une fréquence proche de la fréquence propre de l'oscillateur, l'amplitude du mouvement de la masse passe de manière surprenante par un maximum supérieur à l'amplitude de l'oscillateur : il s'agit du phénomène de **résonance**. On peut le comprendre qualitativement par le fait que si on apporte de l'énergie au bon moment, on peut amplifier le mouvement malgré la dissipation.
- à hautes fréquences (pour  $\omega > \omega_0$ ), la masse n'oscille quasiment pas du fait de son inertie : elle n'a pas le temps de suivre les modifications d'altitude du support, et seul le ressort se déforme. On constate que les signaux sont quasiment en opposition de phase ;

C'est ce qui se passe lorsqu'un enfant est poussé sur une balançoire.

#### c) Exemple électrique

##### i) Régime transitoire et permanent

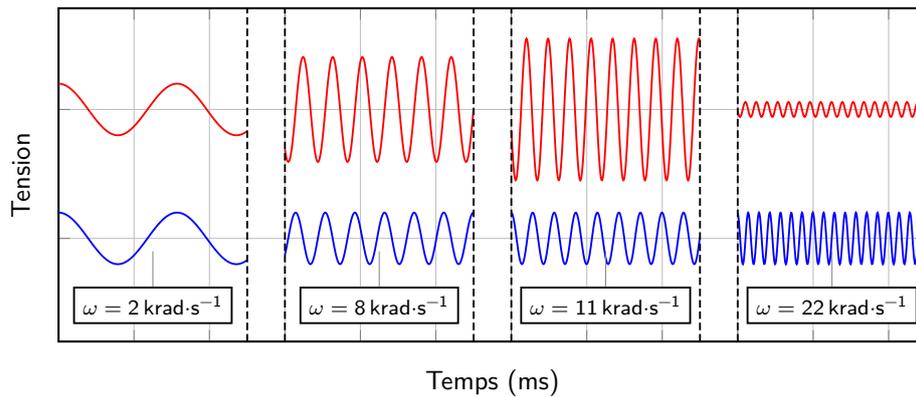
Mesurons la tension aux bornes du condensateur initialement déchargé d'un circuit RLC série en pulsation propre  $\omega_0 = 10,5 \cdot 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , où la tension aux bornes du générateur est sinusoïdale en pulsation quelconque. On observe alors le signal ci-dessous :



On peut effectuer les mêmes observations que pour le système mécanique.

## ii) Influence de la fréquence

Faisons varier la fréquence du générateur et observons uniquement le régime permanent :

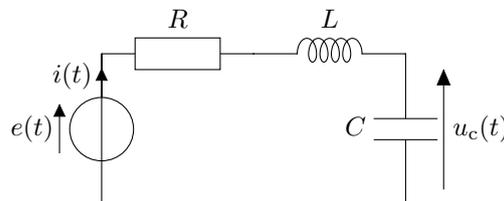


Plusieurs phénomènes sont à nouveau à observer :

- à basses fréquences (pour  $\omega < \omega_0$ ), la tension du condensateur suit celle du générateur avec la même amplitude et sans déphasage : les variations de tension du générateur sont suffisamment lentes pour que le condensateur ait le temps de se charger et de se décharger ;
- pour une fréquence proche de la fréquence propre de l'oscillateur, l'amplitude de la tension du condensateur passe de manière surprenante par un maximum supérieur à l'amplitude de l'oscillateur : il s'agit du phénomène de **résonance**. On peut le comprendre qualitativement par le fait que si on apporte de l'énergie au bon moment, on peut amplifier la charge malgré la dissipation
- à hautes fréquences (pour  $\omega > \omega_0$ ), le condensateur ne se charge presque plus du fait de son « inertie » : elle n'a pas le temps de suivre les modifications de tension du générateur. On constate que les signaux sont quasiment en opposition de phase ;

## II.2 Mise en équation

### a) Oscillateur électrique



On part d'un circuit RLC série, où la tension aux bornes du générateur s'écrit  $e(t) = E_0 \cos \omega t$  : Appliquons la loi des mailles :

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_c(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + u_c(t) \quad (6.14)$$

De plus, le condensateur impose  $i(t) = C \frac{du_c}{dt}$  soit :

$$e(t) = RC \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c(t) \quad (6.15)$$

que l'on peut réécrire sous une forme dite canonique, en divisant l'équation par  $LC$  et en ordonnant les dérivées :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = \frac{e(t)}{LC} \quad (6.16)$$

soit en introduisant la pulsation propre et le facteur de qualité :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = \omega_0^2 E_0 \cos \omega t \quad (6.17)$$

## b) Oscillateur mécanique

On considère que le ressort est accroché à un « plafond oscillant » dont la position varie sinusoidalement :  $z_p(t) = a \cos \omega t$ . La masse  $m$  est toujours soumise aux mêmes forces, seule la force de rappel élastique est modifiée. Bilan des forces :

- son poids  $\vec{P} = mg\vec{e}_z$
- la force de rappel élastique  $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z = -k(z(t) - z_p(t) - \ell_0)\vec{e}_z$
- la force de frottements fluides  $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$

L'application de la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, projetée selon  $\vec{e}_z$  nous permet d'aboutir à l'équation :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + k(z(t) - z_p(t) - \ell_0) = mg \quad (6.18)$$

qui se réécrit :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 a \cos \omega t + \omega_0^2 \left( \ell_0 + \frac{mg}{k} \right) \quad (6.19)$$

\*

Cette équation possède un second membre avec une partie constante, et une partie sinusoidale forcée. Pour pouvoir utiliser les notations complexes, on doit d'abord se débarrasser de la partie constante : il suffit de changer de variable en posant  $Z(t) = z(t) - z_{\text{cst}}$  où  $z_{\text{cst}}$  est la solution particulière de l'équation différentielle associée à la partie constante du second membre. En réalité, il s'agit simplement de la position d'équilibre du système, en l'absence de forçage sinusoidal :  $z_{\text{cst}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$ . Ainsi en utilisant  $z(t) = Z(t) + z_{\text{cst}}$ , il vient :

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z(t) = \omega_0^2 a \cos(\omega t) \quad (6.20)$$

On constate que les deux équations sont identiques, à condition de poser  $E_0 = a$  et  $Z(t) = u_c(t)$ . On va utiliser l'équation électrique par la suite.

## II.3 Amplitude complexe

Partons donc de l'équation différentielle précédemment obtenue en complexes. On recherche la solution en régime permanent de la forme  $\underline{u}_c(t) = U_{c,m} e^{j(\omega t + \varphi)}$ , donc injectons cette solution dans l'équation différentielle écrite en complexe :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 Z(t) = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t) \xrightarrow{\mathbb{C}} \frac{d^2 \underline{u}_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{u}_c}{dt} + \omega_0^2 \underline{u}_c(t) = \omega_0^2 E_0 e^{j\omega t} \quad (6.21)$$

On utilise la propriété précédente sur la dérivation, sachant qu'une dérivée seconde est ainsi remplacée par la multiplication par  $(j\omega)^2$  :

$$\underline{u}_c(t) \left( (j\omega)^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) = \omega_0^2 E_0 e^{j\omega t} \quad (6.22)$$

\*

soit en divisant par  $e^{j\omega t}$

$$\underline{U}_{c,m} \left( -\omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) = \omega_0^2 E_0 \quad (6.23)$$

L'amplitude complexe recherchée s'écrit donc

$$\underline{U}_{c,m} = u_{c,m} e^{j\varphi} = \frac{\omega_0^2 E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega\omega_0}{Q}} \quad (6.24)$$

On peut alors déterminer l'amplitude et le déphasage  $U_{c,m}$  et  $\varphi$  :

- $U_{c,m}$  est le module de  $\underline{U}_{c,m}$ , soit

$$* \quad \left| U_{c,m} = \frac{\omega_0^2 E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} \right| = \frac{\omega_0^2 E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q \omega_0}\right)^2}} \quad (6.25)$$

car  $\frac{|a + jb|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$

▪  $\varphi$  est l'argument de  $\underline{u}_{c,m}$ , soit :

$$\varphi = \arg \left( \frac{\omega_0^2 E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} \right) = \arg(\omega_0^2 E_0) - \arg \left( (\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right) \quad (6.26)$$

$$= -\arg j \left( \frac{\omega \omega_0}{Q} - j(\omega_0^2 - \omega^2) \right) \quad (6.27)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{Q(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega \omega_0} \right) \quad (6.28)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \arctan Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (6.29)$$

On rappelle :  
 $\arg \left( \frac{a}{b} \right) =$   
 $\arg a - \arg b$  et  
 $\arg(a + jb) =$   
 $\arctan \left( \frac{b}{a} \right)$  si  $a > 0$

## II.4 Formes des solutions

Comme dans l'exemple du circuit RC, on a donc  $u_c(t) = u_h(t) + U_{c,m} \cos(\omega t + \varphi)$ , sachant que la solution de l'équation homogène tend vers 0, on va plutôt étudier le comportement en fréquence de la solution particulière, ce qui permettra de justifier la présence d'un phénomène de résonance.

## III. Phénomène de résonance

### III.1 Définition

#### Définition

\* Lorsqu'un système est soumis à une excitation sinusoïdale, une ou plusieurs réponses (tension, intensité, déplacement, etc.) peuvent présenter un maximum pour une ou plusieurs fréquences proches de leur fréquence propre : c'est le phénomène de résonance.

On rencontre le phénomène de résonance dans de nombreuses situations physiques (caisse de résonance d'un diapason, balançoire, laser, résonance magnétique nucléaire...). Les caractéristiques de cette résonance peuvent souvent être modélisés par un oscillateur amorti, comme nous allons le vérifier à l'aide des deux systèmes physiques étudiés précédemment : le circuit RLC série et la masse accrochée à un ressort.

### III.2 Résonance en élongation / tension

#### a) Recherche de la pulsation de résonance

On vient de voir que les équations associées à la position ou la tension aux bornes du condensateur étaient identiques. Étudions l'influence de la pulsation d'excitation  $\omega$  sur l'amplitude du système, afin de comprendre le phénomène de résonance observé expérimentalement.

Pour alléger les notations, posons  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  la pulsation réduite. L'amplitude vue précédemment se réécrit :

$$U_{c,m} = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \quad (6.30)$$

Le phénomène de résonance se produit expérimentalement pour une pulsation proche de  $\omega_0$ , avec une amplitude maximale plus grande que  $E_0$ .

Remarquons que  $x = 0$  correspond bien à un extremum de  $U_{c,m}$ , mais il ne s'agit pas d'un forçage sinusoïdal vu que  $\omega = 0$

Cherchons donc la pulsation pour laquelle  $U_{c,m}$  est maximale, et déterminons donc le minimum de l'argument de la racine carrée. Posons  $f(x) = (1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$  et calculons sa dérivée :

$$f'(x) = 2 \times (-2x) \times (1 - x^2) + 2 \frac{x}{Q^2} = -4x \left(1 - \frac{1}{2Q^2} - x^2\right) \quad (6.31)$$

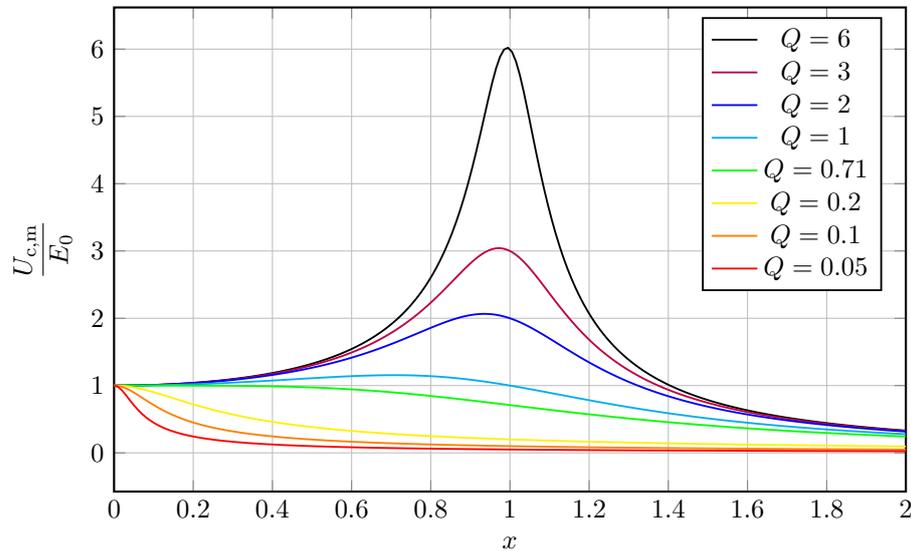
s'annulant trivialement pour  $x = 0$

, mais également pour  $x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  à la condition que  $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,71$ .

On peut montrer qu'il s'agit bien d'un minimum pour  $f(x)$  car  $f'(x) > 0$  pour  $x < x_r$  (donc fonction croissante), et  $f'(x) < 0$  pour  $x > x_r$  (donc fonction décroissante), donc la fonction  $f(x)$  présente un minimum pour  $x = x_r$ .

## b) Analyse physique

Le tracé de  $\frac{U_{c,m}(x)}{E_0}$  ci-dessous, pour différentes valeurs du facteur de qualité, est cohérent avec ce que l'on vient de montrer :



**Figure 6.1** – Amplitude réduite  $\frac{U_{c,m}}{E_0}$  en fonction de la pulsation réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  pour différentes valeurs du facteur de qualité  $Q$

- pour  $\omega \ll \omega_0$   $x \rightarrow 0$ , l'amplitude est identique à celle de l'excitateur, donc  $\frac{U_{c,m}}{E_0} = 1$  ;
- pour  $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  et donc  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  proche de  $\omega_0$ , le système présente un phénomène de résonance si le facteur de qualité vérifie  $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , et l'amplitude de l'oscillateur est supérieur à celle de l'excitateur ;
- dans le cas où  $Q \geq 3$ ,  $U_{c,m}(x_r) \simeq QE_0$  : l'amplitude à résonance peut prendre des valeurs très supérieures à celle du forçage. On note également que  $x_r \simeq 1$  c'est-à-dire que la pulsation de résonance se rapproche de la pulsation propre. Enfin, la largeur du pic de résonance diminue à mesure que le facteur de qualité augmente : la résonance est plus **aignue** ;
- à hautes fréquences, pour  $x \gg 1$ , l'amplitude décroît rapidement : l'inertie du condensateur l'empêche de suivre les variations de tension aux bornes du générateur.

Pour le système mécanique, l'interprétation est très similaire :

- pour  $\omega \ll \omega_0$ , l'amplitude est identique à celle de l'excitateur :  $Z_m \rightarrow a$  : le plafond se déplace

suffisamment lentement pour que la masse ait le temps de suivre le mouvement sans déphasage ni changement d'amplitude

- pour  $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  et donc  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  proche de  $\omega_0$ , le système présente un phénomène de résonance si le facteur de qualité vérifie  $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , et l'amplitude de l'oscillateur est supérieur à celle de l'excitateur ;
- dans le cas où  $Q \geq 3$ ,  $Z_m(x_r) \simeq Qa$  : l'amplitude à résonance peut prendre des valeurs très supérieures à celle du forçage. On note également que  $x_r \simeq 1$  c'est-à-dire que la pulsation de résonance se rapproche de la pulsation propre. Enfin, la largeur du pic de résonance diminue à mesure que le facteur de qualité augmente : la résonance est plus **aigüe** ;
- à hautes fréquences, pour  $\omega \gg \omega_0$ , l'amplitude décroît rapidement, le mouvement du support est très atténué au niveau de la masse : l'inertie empêche à la masse de suivre le mouvement. On trouve  $Z_m \simeq \frac{a\omega_0^2}{-\omega^2}$  : le déphasage vaut  $\pi$  et l'amplitude est très inférieure à  $a$ .

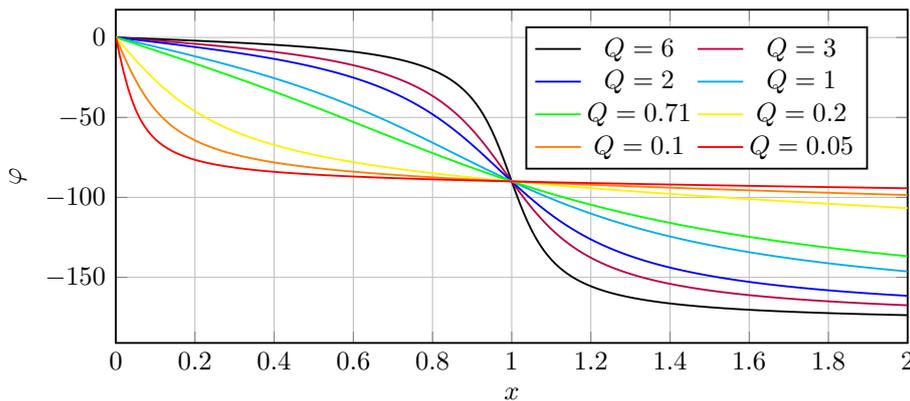
### Résonance en tension / position

En s'appuyant sur l'analogie électromécanique, il se produit un phénomène similaire dans un circuit RLC série relié à un générateur basse fréquence avec une **résonance en tension** pour la tension aux bornes du condensateur, et une **résonance en position** pour la position de la masse dans le cadre d'un oscillateur amorti.

La résonance se produit pour  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , pour une pulsation de résonance  $\omega_r$  proche de la pulsation propre  $\omega_0$ . Elle est d'autant plus prononcée que le facteur de qualité est élevée, et pour  $Q > 3$   $\omega_r \simeq \omega_0$

### c) Étude de la phase

On peut également tracer le déphasage en fonction de la pulsation pour différentes valeurs du facteur de qualité. Cela confirme bien les observations sur le système masse-ressort : le mouvement est en phase à basse fréquence, se retarde progressivement (car  $\varphi < 0$ ), et finit en opposition de phase à haute fréquence. À noter que la variation de phase autour de  $\omega = \omega_0$  est d'autant plus grande que le facteur de qualité est grand.



**Figure 6.2** – Déphasage en fonction de la pulsation réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  pour différentes valeurs du facteur de qualité  $Q$

Notons aussi que le déphasage passe toujours par  $-\pi/2$  quand  $x = 1$ , soit quand  $\omega = \omega_0$ . Cela peut en particulier être un moyen de **mesurer expérimentalement**  $\omega_0$  pour des valeurs de  $Q$  inférieures à 3.

### d) Étude asymptotique

Considérons les limites pour  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\omega = \omega_0$  et  $\omega \gg \omega_0$  afin de réexprimer l'amplitude complexe :

- pour  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} \simeq \omega_0^2$  donc :

$$\underline{U}_{c,m} \simeq \frac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2} = E_0 \implies U_{c,m} = E_0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \quad (6.32)$$

donc  $u_c(t) \simeq e(t)$  c'est-à-dire que la tension aux bornes du condensateur est identique à celle du générateur ;

- pour  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} = j\frac{\omega_0^2}{Q}$  donc :

$$\underline{U}_{c,m} = \frac{\omega_0^2 E_0}{j\frac{\omega_0^2}{Q}} = -jQE_0 \implies U_{c,m} = QE_0 \quad \text{et} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (6.33)$$

d'où le déphasage déjà remarqué sur la figure 7.6 et l'amplitude en sortie peut prendre des valeurs très supérieures à  $E_0$  si  $Q \gg 1$  d'où le phénomène potentiel de résonance ;

- pour  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} \simeq -\omega^2$  donc :

$$\underline{U}_{c,m} \simeq \frac{\omega_0^2 E_0}{-\omega^2} \implies U_{c,m} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} E_0 \ll E_0 \quad \text{et} \quad \varphi = \pm\pi \quad (6.34)$$

donc la tension aux bornes du condensateur est en opposition de phase par rapport à celle du générateur, et d'amplitude bien plus faible, synonyme d'une atténuation importante : le condensateur ne suit plus les variations du générateur efficacement.

### III.3 Résonance en vitesse / courant

#### a) Expression des grandeurs associées

##### i) Vitesse

À partir de l'amplitude complexe de la position, on peut exprimer celle sur la vitesse.  $v(t) = \frac{dZ}{dt}$  donc  $\underline{v} = j\omega\underline{Z}$ , d'où  $\underline{V}_m = j\omega\underline{Z}_m$

$$\underline{V}_m = \frac{j\omega a \omega_0^2}{\omega_0^2 + (j\omega)^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{a\omega_0 Q}{\frac{Q\omega_0}{j\omega} + \frac{Qj\omega}{\omega_0} + 1} = \frac{V_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (6.35)$$

en divisant par  $j\frac{\omega\omega_0}{Q}$  et en posant  $V_0 = a\omega_0 Q = \frac{ka}{\alpha}$ .

##### ii) Intensité électrique

Au sein du circuit RLC série,  $i(t) = C\frac{du}{dt}$ , donc en complexe  $\underline{i} = j\omega C\underline{u}$  d'où  $\underline{I}_m = j\omega\underline{U}_m$ . Par conséquent on trouve de la même façon :

$$\underline{I}_m = \frac{I_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (6.36)$$

en posant  $I_0 = \frac{E_0}{R}$

#### b) Étude de la résonance en intensité/ en vitesse

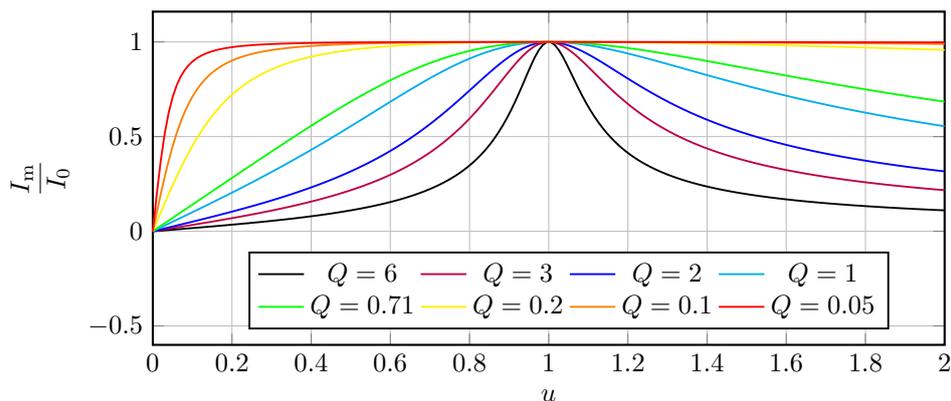
À partir de l'équation exprimant l'amplitude complexe du courant, on peut calculer l'amplitude de l'intensité en régime permanent (mais le raisonnement serait identique pour la résonance en vitesse) :

$$I_m = \frac{I_0}{\left|1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right|} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad (6.37)$$

où l'on pose  $I_0 = \frac{E_0}{R}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  la pulsation réduite.

Sans faire de calcul de dérivée, le dénominateur possède bien un minimum en  $x = 1$  : en effet dans la racine, on a une somme de deux termes positifs, et le deuxième s'annule uniquement en  $x = 1$ .

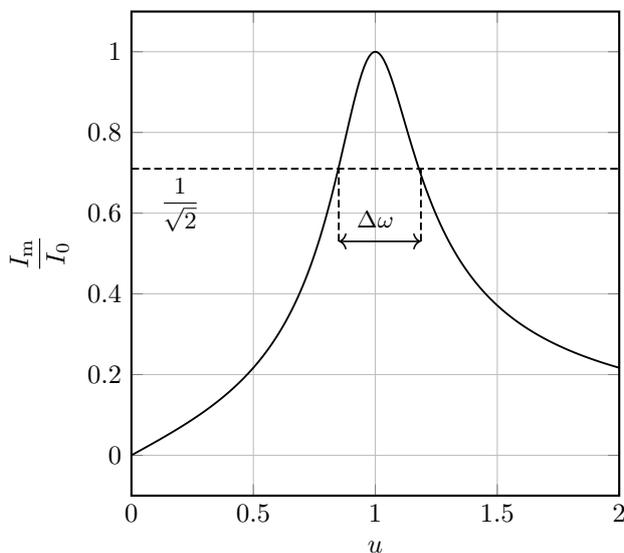
Il vient donc que l'amplitude de l'intensité possède quelle que soit la valeur de  $Q$  un maximum pour  $x = 1$ , c'est-à-dire que pour  $\omega = \omega_0$  il y aura toujours une **résonance en courant**, illustrée ci-dessous :



**Figure 6.3** – Amplitude réduite de l'intensité  $\frac{I_m}{I_0}$  en fonction de la pulsation réduite  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$  pour différentes valeurs du facteur de qualité mécanique  $Q$

On constate ainsi que l'amplitude du courant est limitée à  $I_0$ , mais également que plus le facteur de qualité est important, plus la résonance est **aigüe**, c'est-à-dire resserrée autour de  $\omega = \omega_0$ . On

\* montre même que la largeur du pic de résonance, pour  $I_m = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  vaut  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ , ce qui donne un sens physique complémentaire au facteur de qualité.



**Figure 6.4** – Amplitude réduite du courant en fonction de la pulsation  $\omega$  pour  $Q = 3$  et la largeur du pic de résonance.

**A retenir**

L'évolution de la vitesse de la masse en régime forcé passe toujours par un maximum en  $\omega = \omega_0$ . On parle de **résonance en vitesse**, la situation étant identique à la résonance en intensité d'un circuit RLC série. La largeur de résonance vérifie  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$  : le facteur de qualité mécanique permet de caractériser l'acuité de la résonance.

## IV. Utilisation des impédances complexes en régime sinusoïdal forcé

### IV.1 Notion d'impédance électrique

#### a) Définition

En régime forcé, on peut étudier les circuits électriques en introduisant une généralisation de la notion de résistance.

##### Définition

On appelle **impédance complexe** d'un dipôle, notée  $\underline{Z}$ , le rapport :

$$* \quad \underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} \quad (6.38)$$

où  $\underline{u}$  est la tension (complexe) aux bornes de ce dipôle en régime forcé, et  $\underline{i}$  le courant le traversant. Elle s'exprime également en ohm.

#### b) Impédances des composants usuels



#### Exercice

À partir de la définition de l'impédance et des relations constitutives d'une résistance, d'un condensateur, et d'une bobine, déterminer l'expression de leur impédance.

Pour une résistance, la relation  $u = Ri$  est inchangée lors du passage en notations complexes, donc  $\underline{Z}_R = R$ ; pour un condensateur, on a la relation  $i = C \frac{du}{dt}$ , soit en notation complexe  $\underline{i} = Cj\omega \underline{u}$  et donc l'impédance associée est  $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ ; de même pour une bobine, avec  $u = L \frac{di}{dt}$ , il vient  $\underline{Z}_L = jL\omega$ .

##### Impédance des composants usuels

$$* \quad \text{En convention récepteur, on a } \underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_L = jL\omega.$$

On peut effectuer comme pour des résistances des associations en série ou en dérivation suivant les mêmes relations :

- en série on somme les impédances :  $\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_i \underline{Z}_i$ ;
- en dérivation on somme les inverses des impédances, encore appelées **admittances** :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i}$$

#### c) Comportement asymptotique des dipôles

Les impédances nous permettent d'en déduire le comportement aux « basses » et aux « hautes » fréquences :

- pour  $\omega \rightarrow 0$ ,  $|\underline{Z}_C| \rightarrow +\infty$  et  $|\underline{Z}_L| \rightarrow 0$ , correspondant à ce qui avait été énoncé au chapitre SP6 à savoir que le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert (ou une résistance de valeur infinie), et la bobine comme un fil ;
- pour  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $|\underline{Z}_C| \rightarrow 0$  et  $|\underline{Z}_L| \rightarrow +\infty$ , ce qui signifie que le condensateur se comporte comme un fil aux hautes fréquences et la bobine comme un interrupteur ouvert.

Ces dernières affirmations peuvent se comprendre qualitativement : la bobine n'autorise pas des changements d'intensité trop rapides dans la branche dans laquelle elle se trouve, par des effets inductifs, tandis que le condensateur n'a plus le temps de se charger ou décharger et la tension

à ses bornes reste constamment nulle.

## IV.2 Retour au cas du circuit RLC série

On cherche à étudier le comportement du courant dans le circuit RLC série. Pour obtenir l'intensité en régime forcé, il convient d'exprimer la tension aux bornes de la résistance. À l'aide de la formule du pont diviseur de tension, elle vaut :

$$u_R(t) = R\underline{i}(t) = \frac{Z_R}{Z_R + Z_L + Z_C} \underline{e}(t) = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} E_0 e^{j\omega t} \quad (6.39)$$

En simplifiant par  $R$  et en posant  $\underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t + \varphi} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$ , l'amplitude complexe de l'intensité se réécrit

$$* \quad \underline{I}_m = \frac{E_0}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\frac{e_0}{R}}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (6.40)$$

où l'on utilise la définition de  $Q$  et  $\omega_0$  déterminée précédemment :  $\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$  et  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  donc

$$Q\omega_0 = \frac{L}{R}\omega_0^2 = \frac{1}{RC}.$$

### Exercice

Déterminer par la même méthode la tension aux bornes du condensateur et retrouver l'expression obtenue grâce à l'équation différentielle.

On applique à nouveau la relation du pont diviseur, mais aux bornes du condensateur :

$$\underline{u}_c = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + R} \underline{e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R} E_0 e^{j\omega t} \quad (6.41)$$

conduisant à l'amplitude complexe :

$$\underline{U}_{c,m} = \frac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} \quad (6.42)$$

## IV.3 Passage d'une équation complexe à une équation différentielle

En utilisant les impédances, on s'affranchit ici d'écrire une équation différentielle. Mais il est même possible de faire le travail inverse et de retrouver l'équation différentielle régie par  $i(t)$ . Repartons de l'équation complexe reliant  $\underline{i}(t)$  et  $\underline{e}(t)$ . Il faut faire en sorte de n'avoir que des polynômes en  $j\omega$ , et éliminer les fractions :

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jC\omega \underline{e}(t)}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} \quad (6.43)$$

soit encore

$$(LC(j\omega)^2 + jRC\omega + 1) \underline{i}(t) = jC\omega \underline{e}(t) \quad (6.44)$$

puis, avec le fait que multiplier par  $j\omega$  revient à effectuer une dérivée temporelle :

$$* \quad LC \frac{d^2 \underline{i}}{dt^2} + RC \frac{d \underline{i}}{dt} + \underline{i} = C \frac{d \underline{e}}{dt} \quad (6.45)$$

soit sous forme canonique :

$$\frac{d^2 \underline{i}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d \underline{i}}{dt} + \omega_0^2 \underline{i} = \frac{1}{L} \frac{d \underline{e}}{dt} \quad (6.46)$$

La notation complexe peut donc être un moyen commode pour déterminer une équation différentielle *a priori* difficile à obtenir (plusieurs mailles, par exemple).

# Exercices

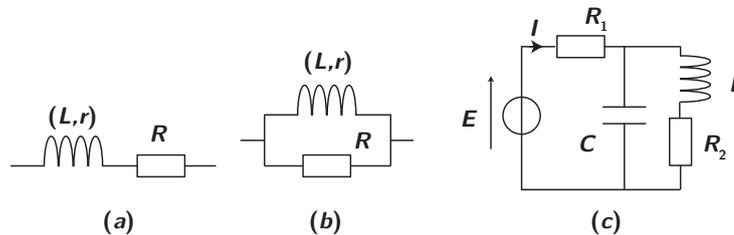
## 6.1 Circuit RL en régime forcé

On considère un circuit RL série alimenté par une tension sinusoïdale  $e(t) = E \cos(\omega t)$ .

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par le courant traversant le circuit à partir de la loi des mailles.
2. À partir de l'équation différentielle, injecter la forme complexe pour obtenir  $\underline{i}$ .
3. À partir d'une méthode faisant intervenir les impédances complexes, retrouver le résultat.
4. Donner la solution temporelle correspondant à cette solution complexe. On déterminera l'amplitude et le déphasage. Commenter leur dépendance en fréquence.

## 6.2 Impédances équivalentes

1. Pour les circuits suivants, déterminer les impédances équivalentes (pour le circuit (c), considérer le dipôle branché au générateur).

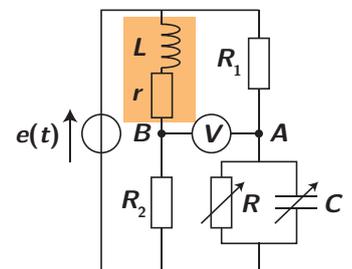


2. Pour le circuit de droite, quelle est la condition sur les valeurs des composants de sorte que le courant parcouru dans  $R_1$  soit en phase avec la tension aux bornes du générateur ?

## 6.3 Mesure des caractéristiques d'une bobine par équilibrage d'un pont

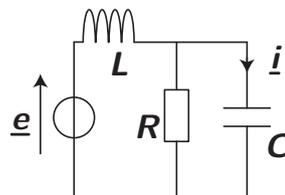
Pour déterminer les caractéristiques d'une bobine réelle, modélisée par l'association série d'une inductance idéale  $L$  et d'une résistance  $r$ , on place celle-ci dans une structure en pont alimentée par une tension sinusoïdale.

1. Exprimer la tension complexe  $U_{AB}$  qui s'applique aux bornes du voltmètre.
2. La capacité  $C$  du condensateur et la résistance  $R$  sont ajustables. On choisit leur valeur de sorte à annuler la tension lue par le voltmètre. Déterminer l'expression de l'inductance  $L$  et de la résistance  $r$  en fonction de  $R$ ,  $C$ ,  $R_1$  et  $R_2$ . On précise que l'égalité de deux complexes revient à écrire l'égalité des parties réelles et des parties imaginaires respectives.



## 6.4 Circuit en régime sinusoïdal

Considérons le montage ci-dessous, alimenté par une source de tension sinusoïdale de fém  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ . On note  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$  le courant circulant dans le condensateur de capacité  $C$ .

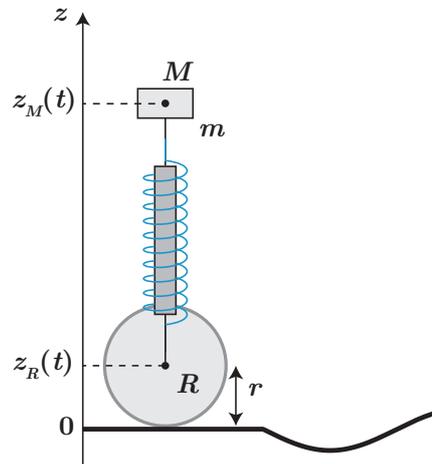


1. Déterminer l'expression complexe du courant  $\underline{i}$ .
2. En déduire  $I_m$  et  $\phi$ .
3. Déterminer à partir de la question 1) l'équation différentielle sur  $i(t)$  et en déduire la pulsation propre et le facteur de qualité.

Remarque : lorsqu'on emploie des impédances d'éléments en dérivation, il peut être judicieux de faire apparaître l'admittance  $\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}}$  afin de simplifier les calculs.

## 6.5 Étude de la suspension d'un véhicule

Dans le cadre d'un modèle simplifié de suspension, on assimile le véhicule à un point matériel  $M$  (de masse  $m = 350 \text{ kg}$ ), posé sur un ressort dont l'autre extrémité  $R$  peut se déplacer le long d'une route horizontale ou d'une route ondulée (par le biais d'une roue de rayon  $r = 35 \text{ cm}$ ). Le ressort a une constante de raideur  $k = 1,29 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  et une longueur  $\ell_0 = 40 \text{ cm}$  à vide.



On repère les positions de  $M$  et  $R$  par leur altitude  $z_M$  et  $z_R$  selon un axe vertical ( $Oz$ ) tel que  $z_R = r$  lorsque la route est horizontale. On note enfin  $z_S(t)$  l'altitude du sol, initialement nulle. Enfin, on modélise l'effet de l'amortisseur par un frottement fluide entre les points  $M$  et  $R$  dont la force résultante sur la masse  $m$  est  $\vec{F}_d = -\alpha \left( \frac{dz_M}{dt} - \frac{dz_R}{dt} \right) \vec{e}_z$ , avec  $\alpha = 700 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ .

1. Lorsque le véhicule se déplace sur la route horizontale (avec  $z_S(t) = 0$ ), déterminer la position à l'équilibre  $z_{M,\text{eq}}$  en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $k$ ,  $\ell_0$  et  $r$ .
2. Le véhicule rencontre une marche de hauteur  $h = 10 \text{ cm}$  (ainsi  $z_S(t) = +h$ ), on suppose que la longueur de l'amortisseur est instantanément réduite de la longueur  $h$ , et la masse  $m$  possède à  $t = 0^+$  une vitesse verticale nulle. Déterminer la forme générale de la loi d'évolution de  $z_M(t)$  et le nombre d'oscillations observées. Tracer l'allure de  $z_M(t)$  et du portrait de phase.
3. Le profil de la route est maintenant une route bosselée modélisée par une courbe sinusoïdale de période spatiale  $\lambda = 5,0 \text{ m}$  et d'amplitude  $H = 5 \text{ cm}$ . La voiture roule à vitesse constante  $v_x$ . On pose  $Z(t) = z_M - z_{M,\text{eq}}$ .

(a) Justifier que l'on puisse écrire  $z_s(x) = H \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$  avec  $x$  l'abscisse du point  $M$ . Exprimer  $z_s$  en fonction du temps et non plus de  $x$  et en déduire la pulsation  $\omega$  associée en fonction de la vitesse horizontale  $v_x$  du véhicule.

(b) Montrer que  $Z(t)$  vérifie une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z(t) = F(t)$$

où  $F(t)$  dépend de  $z_S$ .

(c) On peut montrer que  $F(t)$  s'écrit, par un bon choix de l'origine des temps, sous la forme  $F(t) = F_m \cos(\omega t)$ . Justifier que la vitesse  $v$  d'oscillation verticale de la voiture est également sinusoïdale de même pulsation que  $F$ .

(d) Montrer alors que son amplitude  $V_m$  vérifie

$$V_m = \frac{\frac{F_m Q}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (6.47)$$

- (e) On pose  $H = \frac{V_m}{F_m}$ . Tracer l'allure de  $H$  en fonction de  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .
- (f) Calculer la vitesse associée à la pulsation  $\omega = \omega_0$  et préciser s'il vaut mieux rouler vite ou lentement sur ce type de chemin.

1. À l'équilibre, on étudie la masse  $M$  dans le référentiel de la route supposé galiléen. Les forces en présence sont uniquement le poids et la force de rappel élastique. On applique la LQM à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \implies -mg + k(z_{M,\text{eq}} - z_{R,\text{eq}} - \ell_0) = 0 \iff z_{M,\text{eq}} = \ell_0 + r - \frac{mg}{k} \quad (6.48)$$

2. On cherche à décrire ici la réponse à un équivalent d'échelon de tension pour cet oscillateur mécanique amorti. On écrit donc l'équation différentielle associée à la position de la masse  $M$ . On réécrit la LQM dans ces nouvelles conditions :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_d \implies m\ddot{z}_M = -mg - k(z_M - z_R - \ell_0) - \alpha \left( \frac{dz_M}{dt} - \frac{dz_R}{dt} \right) \quad (6.49)$$

soit avec  $z_R = r + h$  après avoir monté la marche, on peut réécrire l'équation précédente sous forme canonique :

$$\ddot{z}_M + \frac{\alpha}{m}\dot{z}_M + \frac{k}{m}z_M = \frac{k}{m} \left( \ell_0 + r + h - \frac{mg}{k} \right) \quad (6.50)$$

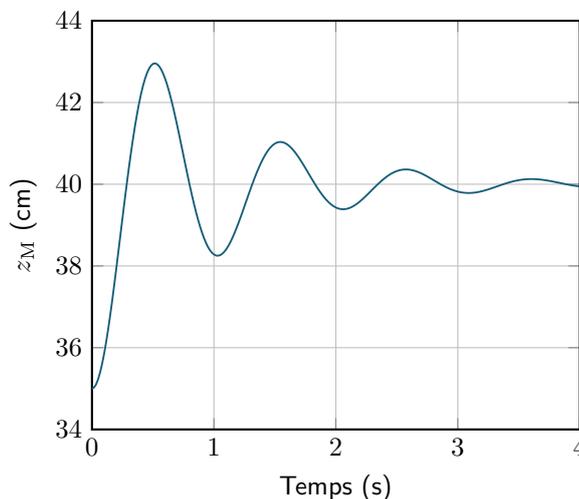
On peut donc poser  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$ .

La forme générale de la loi d'évolution de  $z_M(t)$  s'écrit donc :

$$z_M(t) = Ae^{-\mu t} \cos(\Omega t + \varphi) + z_{M,\text{eq}} + h \quad (6.51)$$

avec  $\mu_0 = \frac{\omega_0}{2Q}$  et  $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$  (que l'on retrouve à partir du polynôme caractéristique). Il n'est pas demandé de résoudre l'équation, mais au moins de respecter les conditions aux limites pour effectuer un tracé. On précise que l'amortisseur a une altitude instantanément réduite de  $h$ , donc  $z_M(t = 0^+) = z_M(t = 0^-) + z_{M,\text{eq}}$  (l'inertie liée au déplacement horizontal d'une masse importante implique la continuité de l'altitude du véhicule, mais pas de la roue) et  $\dot{z}_M(t = 0^+) = 0$  car on précise que la vitesse verticale est nulle. On calcule  $\omega_0 = 6,1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $Q = 3,03$  donc  $\Omega \simeq \omega_0$  et le nombre d'oscillation est d'environ 3.

D'où l'allure suivante, avec une tangente horizontale



3. (a)  $z_s(x) = H \cos(kx) = H \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$  est la forme classique d'un signal sinusoïdal de période spatiale  $\lambda$ . Or, la vitesse est  $v_x$ , constante, donc  $x(t) = v_x t$  d'où :

$$z_s(t) = H \cos \omega t \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi v_x}{\lambda} \quad (6.52)$$

- (b) Écrivons de nouveau la LQM projetée suivant l'axe vertical, mais en considérant que  $z_R = r + z_s$  :

$$m\ddot{z}_M = -mg - k(z_M - z_R - \ell_0) - \alpha(\dot{z}_M - \dot{z}_R) \quad (6.53)$$

soit en réorganisant les termes et sous forme canonique :

$$\ddot{z}_M + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z}_M + \omega_0^2 z_M = \omega_0^2 \left( r + \ell_0 - \frac{mg}{k} \right) + \omega_0^2 z_s + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z}_s \quad (6.54)$$

En posant  $Z(t) = z_M - z_{M,eq}$ , on élimine la partie constante du membre de droite, d'où :

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 z_s + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z}_s = F(t) \quad (6.55)$$

- (c) La position  $Z$  est, en régime sinusoïdal forcé, sinusoïdale de même pulsation que le forçage  $F(t)$ , donc de pulsation  $\omega$ . Puis avec  $v = \dot{z}_M = \dot{Z}$ , la vitesse est également sinusoïdale de pulsation  $\omega$ .
- (d) On passe l'équation précédente en notations complexes, sachant que  $v = \dot{Z}$  donc  $\underline{V}_m = j\omega \underline{Z}_m$  :

$$\left( -\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) \underline{Z} = F_m e^{j\omega t} \implies \left( -\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) \frac{\underline{V}_m}{j\omega} = F_m \quad (6.56)$$

donc en isolant  $\underline{V}_m$  puis en prenant le module :

$$\underline{V}_m = \frac{F_m}{j\omega + \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\omega_0^2}{j\omega}} = \frac{\frac{F_m Q}{\omega_0}}{1 + jQ\frac{\omega}{\omega_0} - jQ\frac{\omega_0}{\omega}} \quad (6.57)$$

d'où :

$$V_m = \frac{\frac{F_m Q}{Q}}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (6.58)$$

- (e) En introduisant la pulsation réduite  $x = \omega/\omega_0$ , il vient :

$$H(x) = \frac{\frac{Q}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2}} \quad (6.59)$$

dont l'allure graphique est donnée ci-après.

- (f)  $v_{x,0} = \frac{\omega_0 \lambda}{2\pi} = 4,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 18 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Il vaut donc mieux soit plus lentement, soit plus vite que cette vitesse. Techniquement, il est difficile de rouler vraiment plus lentement, on a tout intérêt à avoir  $v_x \gg v_{x,0}$  d'après le graphique de  $H$ .

