–00–

Dimensions et homogénéité en physique

Sommaire

Questions de cours :

- Donner les sept dimensions fondamentales en physique, en précisant pour trois d'entre elles un étalon.
- Sur un exemple au choix de l'étudiant, présenter la méthode d'analyse dimensionnelle permettant, à partir de paramètres importants d'un problème, de déterminer une expression possible.

Capacités exigibles du BO :

- Déterminer la dimension d'une expression, notamment par référence à des expressions connues. (Ex. 1, 2, 4)
- Déterminer les exposants d'une expression de type monôme $E = A^{\alpha} B^{\beta} C^{\chi}$ par analyse dimensionnelle. (Ex. 3, 4)

Introduction

Toute mesure physique doit être reliée à sa dimension et par conséquent à une unité de mesure. Après une brève présentation des dimensions de base en physique, on s'intéressera brièvement à l'analyse dimensionnelle.

I. Dimensions en physique

I.1 Pourquoi une dimension ?

Lors d'une expérience où l'on effectue une mesure, en réalité on compare une certaine donnée physique à une autre, par exemple une règle graduée et un cube : on compare ce qui est comparable, c'est-à-dire qui a la même dimension. La masse de ce cube n'est pas comparable à la taille de son côté. Ainsi, **seules des quantités physique de même dimension peuvent être comparées, additionnées ou soustraites : on dit que ces quantités sont homogènes entre elles.**

Par exemple si r et a ont la même dimension, cela a un sens d'écrire $r < a$, mais pas $(\frac{1}{r} + a)$.

Exercice

Déterminer la dimension de R si $x = \pi(R^2 + R)$ est correct d'un point de vue des dimensions.

À partir du moment où on somme deux quantités, elles sont de même dimension. Donc R^2 et R ont même dimension, ce qui signifie que R est sans dimension.

I.2 Dimensions de base

Il a été choisi par convention **sept dimensions de base** avec lesquelles on pourra construire toutes les dimensions nécessaires en physique. On leur associe une lettre en **majuscule**.

*

Certaines sont usuelles :

- longueur L ;
- temps T ;
- masse M ;
- température θ ;

d'autres moins :

- intensité électrique I ;
- intensité lumineuse J ;
- quantité de matière en chimie N.

Ne pas confondre L et M, l'erreur étant courante de passer de l'unité mètre à la dimension M, alors qu'il s'agit bien de L.

Pour exprimer la dimension d'une quantité physique, on l'écrit entre crochets :

$$[\mathrm{r}] = \mathsf{L} \quad [\mathrm{v}] = \frac{\mathsf{L}}{\mathsf{T}} = \mathsf{L}/\mathsf{T} = \mathsf{L}{\cdot}\mathsf{T}^{-1}$$

- une énergie : $[\mathcal{E}] =$
- une puissance : $[\mathcal{P}] =$
- une force : $[F] =$

Ceci est un bon moyen pour vérifier l'exactitude d'un calcul, qui a pour but d'exprimer l'égalité entre deux quantités homogènes.

I.3 Cas particuliers

- Certaines quantités sont sans dimension, comme les angles, mais également le rapport de quantités homogènes : $\left[\frac{d}{h}\right] = 1$;

- quand on dérive ou l'on intègre, la dimension de la quantité obtenue change :

$$\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{[f]}{[x]} \quad \text{et} \quad \left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = [f]\,[x]$$

Par exemple : $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ a pour dimension $[v_x] = \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = L.T^{-1}$, cohérent avec la dimension d'une vitesse.

Exercice

Quelle est la dimension de $T'(\nu)$ avec T une température et ν une fréquence ?

Comme on dérive, la dimension est donc $[T'(\nu)] = \dfrac{[T]}{[\nu]} = \theta\mathrm{T}$.

- certaines fonctions mathématiques n'admettent que des arguments adimensionnés : entre autres $\exp$, $\cos$, $\sin$, $\ln$

Il faut être vigilant car il peut apparaître des fonctions ayant des arguments ayant une dimension : $\ln a - \ln b = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$ avec a, b grandeurs de même dimension.

Exercice

Déterminer la dimension de k_BT grâce à l'expression suivante : $P(z) = P_0 \exp\left(-\dfrac{Mgz}{k_BT}\right)$ avec $P(z)$ et P_0 des pressions, M une masse molaire, g la constante gravitationnelle et z une altitude.

D'après ce qui précède, k_BT possède donc la même dimension que Mgz de sorte à avoir l'argument de l'exponentielle sans dimension. Donc $[k_BT] = \mathrm{M.N^{-1}} \times \mathrm{L.T^{-2}} \times \mathrm{L} = \mathrm{M.L^2.T^{-2}.N^{-1}}$

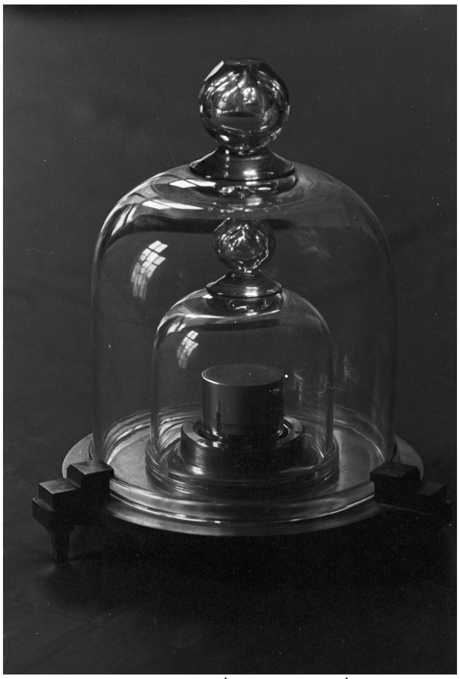
II. Unités

II.1 Pourquoi des unités ?

Comme évoqué précédemment, une mesure consiste en une comparaison avec une entité appelée **étalon**. Par exemple, pour mesurer une longueur, on prend une règle, qui elle-même a été étalonnée de telle sorte que la distance entre différents traits soit la même que sur un autre étalon, etc. Mais quelles conventions prendre ? Dans notre pays, elles sont imposées par le Système International, avec un changement majeur opéré en mai 2019.

II.2 Unités usuelles

- **Temps : la seconde**. Initialement définie par la durée du jour terrestre, elle est maintenant basée sur l'étalon « mesure de la fréquence de la transition atomique du Césium ». On atteint une précision de 10^{-15} s !
- **Distance : le mètre**. Pendant très longtemps, le mètre a été défini comme la longueur d'un morceau de platine iridié, lui-même issu de la circonférence terrestre. À l'heure actuelle, il est basé sur l'étalon « vitesse de la lumière dans le vide » et une mesure de temps : la vitesse de la lumière dans le vide ayant été fixée, un mètre est la distance parcourue en $\dfrac{\ell}{c}$ seconde par la lumière dans le vide, en prenant $\ell = 1$ m et $c = 299792458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



- **Masse : le kilogramme**. Initialement défini comme le volume de 1 dm^3 d'eau à 4 °C , elle correspondit ensuite à un certain volume de platine iridié. Comme il s'agissait de la seule unité purement définie par un objet matériel pouvant se dégrader, il a été décidé de l'annexer sur la valeur fixée de la constante de Planck (étalon), qui s'exprime en J·s, c'est-à-dire en kg·m^2·s^{-1}.
- **Intensité électrique : ampère**. Il s'agissait de l'intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section négligeable et placés à une distance de 1 m dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force de $2{\cdot}10^{-7}$ N par mètre de longueur ! Maintenant, il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la charge élémentaire $e = 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ C, sachant que 1 C = 1 A·s.

Il y en a encore d'autres : la température (en kelvin), l'intensité lumineuse (en candela) et la quantité de matière (en mole). Toute grandeur possède donc une unité qui s'écrit à partir de ces unités usuelles, même si on en définit d'autres afin de nous faciliter la tâche.

Exercice

Calculer l'unité de la résistance d'un conducteur ohmique dans le Système International. On pourra utiliser $P = U \times I$ (puissance, tension, intensité), la loi d'Ohm $U = RI$ et le lien entre puissance et énergie $P = \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$.

Réponse : $1\,\Omega = 1\,\mathrm{kgm^2s^{-3}\ A^{-2}}$

Pour plus d'informations : `https://www.youtube.com/watch?v=9pSXCj8KWGw`, `https://www.youtube.com/watch?v=PBGwYm9XohQ` et pour un peu d'histoire `https://www.youtube.com/watch?v=PVEtJI20Fcs`.

Ne pas noter les unités avec des crochets : $[m]$ ou $[\mathrm{K}]$ est à proscrire, par exemple.

III. Analyse dimensionnelle

L'utilisation de l'analyse dimensionnelle permet de vérifier si une expression littérale est homogène ou non, et donc de détecter des erreurs. Néanmoins elle permet aussi de retrouver ou intuiter certaines lois physiques, même s'il est prétentieux de penser que cela fonctionne à tous les coups.

III.1 Exemple historique

En 1949, le physicien Taylor a cherché à obtenir l'ordre de grandeur de l'énergie de la première bombe atomique. Il fit l'hypothèse que le rayon du nuage consécutif à l'explosion ne dépendait que de l'énergie libérée E, du temps t et de la masse volumique de l'air ρ.

On effectue l'analyse des différentes dimensions :

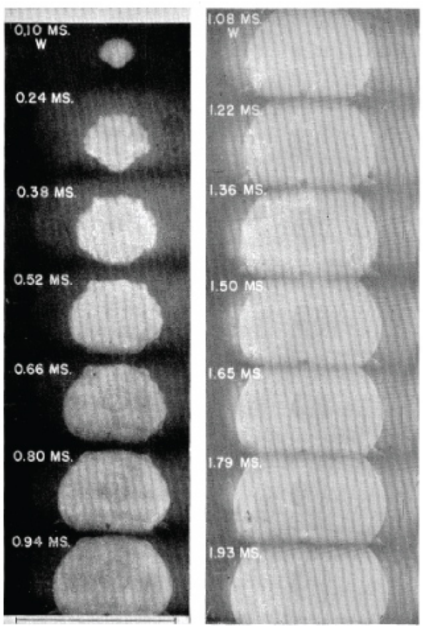
- $[R] = L$
- $[\rho] =$
- $[E] =$
- $[t] = T$

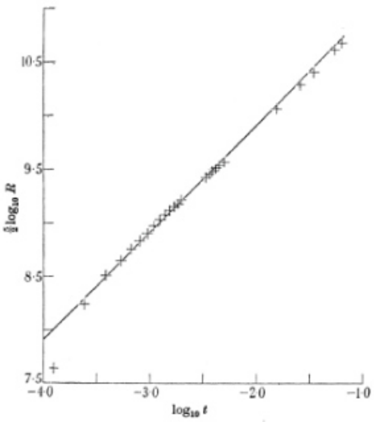
On a quatre paramètres physiques pour trois dimensions indépendantes, il semble donc possible de constituer un seul (4-3) nombre sans dimension. Deux méthodes possibles :

- soit on cherche α, β, γ tel que $\left[ER^{\alpha}\rho^{\beta}t^{\gamma}\right] = 1$ (ou de manière équivalente tel que $E = R^{a}\rho^{b}t^{c}$) et on obtient un système :
  * En effet en termes de dimensions $M.L^2.T^{-2} \times L^{\alpha} \times (M.L^{-3})^{\beta} \times T^{\gamma} = 1$ soit en regroupant $M^{1+\beta} \times L^{2+\alpha-3\beta} \times T^{-2+\gamma} = 1 = M^0L^0T^0$ d'où le système :
  $$\begin{cases} 1+\beta = 0 \\ 2+\alpha-3\beta = 0 \\ -2+\gamma = 0 \end{cases}$$
  soit
  $$\begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 3\beta - 2 = -5 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$
  d'où $\left[ER^{-5}\rho^{-1}t^2\right] = 1$ c'est-à-dire qu'il existe un réel sans dimension k tel que $ER^{-5}\rho^{-1}t^2 = k$ donc $R^5 = k^{-1}E\rho^{-1}t^2$ donc $R = k^{-1/5}E^{1/5}\rho^{-1/5}t^{2/5}$.
- soit on cherche à éliminer les différentes dimensions :
  * $\left[Et^2\right] =$ M L^2 permet d'éliminer le temps, puis en éliminant la masse $\left[\dfrac{Et^2}{\rho}\right] =$ L^5 d'où $Et^2\rho^{-1}R^{-5} = k$ est un nombre sans dimension, égal à une constante (*a priori*). On peut alors écrire $R = k'E^{1/5}\rho^{-1/5}t^{2/5}$ et il est à noter que la constante k' sans dimension, issue de l'analyse dimensionnelle, est proche de la valeur 1, dans le système international.

  Cela a permis à Taylor d'évaluer à environ 10^{14} J l'énergie dégagée par la bombe.

On peut aussi écrire $R \propto E^{1/5}\rho^{-1/5}t^{2/5}$ avec $\propto$ signifiant « proportionnel à ».





Exercice

Retrouver la dépendance en temps grâce au graphique ci-dessus, où les paramètres E et ρ sont fixés. On notera l'usage de l'échelle logarithmique. En ordonnée, il faut lire $\frac{5}{2}\log_{10} R$. On cherchera d'abord la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite $y = ax + b$ où $y = \frac{5}{2}\log_{10} R$ et $x = \log_{10} t$

On mesure la pente de la droite ainsi obtenue : $a = \frac{10{,}5 - 7{,}9}{-1{,}4 - -4{,}0} = 1{,}0$. Par conséquent $\frac{5}{2}\log R = a\log(t) + b = \log(t) + 7{,}9$, soit encore $\log R = \frac{2}{5}\log t + 3{,}2$, d'où en prenant la fonction inverse :

$$R = 10^{\frac{2}{5}\log t + 3{,}2} = 10^{\log(t^{2/5})} \times 10^{3{,}2} = 10^{3{,}2} \times t^{2/5} \tag{1}$$

permettant de confirmer la dépendance en puissance trouvée précédemment.

La fonction inverse de $\ln$ est $\exp(\ldots)$, et la fonction inverse de $\log$ (ou $\log_{10}$) est $10^{\cdots}$

III.2 Pendule simple

Considérons un pendule de masse m accroché à une ficelle de longueur ℓ. On sait qu'il se produit un mouvement périodique lorsque la masse est lancée, et on note T la période. À partir de l'analyse dimensionnelle, essayons de retrouver son expression :

- quels sont les paramètres pertinents ?
  m, ℓ, T, g, R la taille caractéristique de la masse. Néanmoins l'expérience montre qu'en première approche, seuls ℓ et g influent sur T.
- Déterminer les dimensions et la relation entre les paramètres :
  * $[T] = \mathrm{T}$, $[g] = \mathrm{L.T^{-2}}$, $[\ell] = \mathrm{L}$. On montre ensuite facilement que $\left[g\ell^{-1}T^2\right] = 1$ d'où $T = k\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ et on peut montrer que $k = 2\pi$.

Exercices

0.1 Homogénéité

Vérifier si les expressions suivantes sont homogènes ou non :

- $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ où T est la période des petites oscillations d'un pendule de longueur ℓ et g l'accélération de la pesanteur.
- $\lambda = \frac{c}{\nu}$ où λ est la longueur d'onde (en m) pour une fréquence ν et une vitesse c.
- $\tau = RC$ où τ est la constante de temps d'un circuit composé d'une résistance R et d'une capacité C (on donne : $q = C \times U$ et $q = I \times t$ avec I l'intensité du courant et t un temps).
- Équation différentielle $u'(t) + \frac{1}{\tau}u = E$, vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle soumis à la tension E.

0.2 Modèle de l'atmosphère isotherme

1. Grâce à la loi des gaz parfaits $PV = nRT$ (avec P une pression, V un volume, n une quantité de matière et T une température), établir la dimension de la constante R des gaz parfaits. Est-il justifié d'exprimer son unité en J·K^{-1}·mol^{-1} ? On précise que la pression est homogène au quotient d'une force par une surface.
2. Le modèle d'atmosphère isotherme (température indépendante de l'altitude) conduit à l'expression théorique de la variation de pression P avec l'altitude z :

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

où g est l'accélération de la pesanteur, R la constante des gaz parfaits et T la température de l'atmosphère.

(a) Que peut-on dire pour la dimension d'une grandeur en argument de la fonction exponentielle ?

(b) Connaissant la dimension de R, quelle est alors la dimension de la grandeur M ? son unité dans le système international et son unité usuelle ?

(c) Déterminer, toujours grâce à la question a), une grandeur homogène à une longueur ℓ et l'utiliser pour réécrire la fonction $P(z)$. Calculer un ordre de grandeur de la valeur numérique de ℓ. (On prendra $M = 3{,}0 \cdot 10^{-2}$ SI et $R = 8{,}314$ J·K^{-1}·mol^{-1}).

(d) Réaliser alors un tracé graphique de l'allure de $P(z)$, et interpréter physiquement le sens de ℓ.

Pour effectuer un tracé graphique, commencer par prendre des valeurs remarquables (ici en $z = 0$, et la limite quand $z \to +\infty$), puis si l'allure de la fonction est connue, essayer de relier les valeurs remarquables, sinon conduire une étude classique avec tableau de variation.

0.3 Le cyclotron

Considérons un point matériel de masse m et de charge électrique q soumis à un champ magnétique uniforme B. Le point matériel animé d'une vitesse v est soumis à la force de Lorentz de norme

$$F = q\,v\,B$$

Lorsque les vecteurs vitesse et champ magnétique sont perpendiculaires, le point matériel décrit un cercle dans le plan perpendiculaire au champ magnétique à vitesse angulaire constante ω. Cette dernière doit dépendre des paramètres pertinents du problème, à savoir m, q et B.

1. Quelle est l'unité d'une vitesse "angulaire" ? On s'inspirera de la définition classique de la vitesse d'un objet en translation.
2. Déduire alors par analyse dimensionnelle l'expression de ω. On prendra soin à bien expliciter et rédiger la démarche de raisonnement.

0.4 Grandeurs de Planck

Les grandeurs de Planck donnent les échelles typiques auxquelles des effets issus de l'unification entre la relativité générale et la mécanique quantique doivent se manifester. Ces grandeurs ne s'expriment qu'en fonction des constantes fondamentales de la physique. Celles qui interviennent sont :

- la constante de gravitation universelle $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$;
- la constante de Planck réduite $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$;
- la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

1. Quelle est la dimension de la constante de gravitation ? de la constante de Planck ?
2. Le temps de Planck est défini par $t_P = \sqrt{\dfrac{\hbar \mathcal{G}}{c^5}}$.
   (a) Vérifier qu'il a bien la dimension d'un temps.
   (b) Estimer sa valeur numérique sans calculatrice et la commenter, sachant que la plus grande précision obtenue sur le contrôle d'une durée vaut 12 as, c'est-à-dire $12 \cdot 10^{-18}$ s.
3. Définir la longueur de Planck L_P, sachant qu'elle ne s'exprime qu'en fonction des trois constantes précédemment citées.
4. Estimer sans calculatrice sa valeur numérique et la commenter en la comparant par exemple à la taille du noyau atomique.