

# Dynamique en référentiel galiléen

---

<b>2.1 Les lois de Newton</b> . . . . .	<b>2</b>
2.1.1 Éléments cinétiques . . . . .	2
2.1.2 Principe d'inertie . . . . .	2
2.1.3 Loi de la quantité de mouvement . . . . .	3
2.1.4 Principe des actions réciproques . . . . .	3
<b>2.2 Forces et applications</b> . . . . .	<b>4</b>
2.2.1 Les interactions fondamentales . . . . .	4
2.2.2 Poids . . . . .	4
2.2.3 Poussée d'Archimède . . . . .	5
2.2.4 Réaction du support . . . . .	5
2.2.5 Forces de frottements fluides . . . . .	7
2.2.6 Tension d'un fil . . . . .	10

---

## Questions de cours :

- Donner la loi de la quantité de mouvement et ses conséquences.
- Définir la force de gravitation et retrouver l'accélération de la pesanteur terrestre et l'expression du poids sur Terre.
- Définir la force de réaction du support, et déterminer l'équation horaire d'une masse glissant sans frottement sur un plan incliné.
- Étudier la chute libre verticale d'un objet subissant des frottements fluides linéaires : modélisation, vitesse limite, temps caractéristique, expression temporelle de la vitesse.
- Étudier le tir balistique pour un objet subissant une force de frottement quadratique : équation différentielle, vitesse limite, adimensionnement, discussion du type de trajectoire par une analyse en ordre de grandeur.
- Établir l'équation générale du pendule simple, et son expression dans le cas de l'approximation des petits angles.

## Capacités exigibles du BO :

- Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé. (cours)
- Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points sous la forme :  $\vec{p} = m\vec{v}(G)$ . (cours)
- Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens. (cours)
- Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma. (tous les ex.)
- Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen (Ex. 1, 4, 5)
- Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force par exemple à l'aide d'un microcontrôleur. (TP)
- Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. (cours)
- Écrire une équation adimensionnée. (cours)
- Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides (TP).
- Établir l'équation du mouvement du pendule simple. (compétence en lien avec l'ex. 6).

Nous avons décrit dans le chapitre précédent les différents éléments cinématiques du mouvement d'un point matériel ou d'un solide, sans jamais en analyser les causes. C'est donc ce que nous nous proposons de faire maintenant, en nous appuyant sur les lois de Newton, valables encore aujourd'hui à condition d'étudier des systèmes pas trop massiques (sinon relativité générale), pas trop petits (sinon mécanique quantique), ni se déplaçant trop vite (relativité restreinte).

## I. Les lois de Newton

### I.1 Éléments cinétiques

#### i) Masse inertielle

Bien que la trajectoire d'une balle de golf ou de tennis de table puisse être similaire, l'expérience montre qu'il est bien plus difficile de manipuler une balle de golf à l'aide d'une raquette. Il faut pour cela introduire une grandeur qui caractérise la capacité d'un corps à résister au mouvement qu'on souhaite lui imprimer : on parle de **masse inertielle**. On parle également de **masse pesante** (qui intervient dans l'interaction gravitationnelle), mais l'expérience montre que ces deux masses sont complètement identiques.

#### ii) Quantité de mouvement

On rappelle la définition de la **quantité de mouvement** pour un point matériel de masse  $m$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.1)$$

Dans le cas d'un système plus complexe composé de deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masse respective  $m_1$  et  $m_2$ , on peut définir le centre de gravité  $G$  vérifiant

$$(m_1 + m_2)\vec{OG} = m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2 \quad (2.2)$$

(avec  $O$  un point quelconque). En dérivant cette relation par rapport au temps on a

$$(m_1 + m_2)\frac{d\vec{OG}}{dt} = m_1\frac{d\vec{OM}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{OM}_2}{dt} \Leftrightarrow (m_1 + m_2)\vec{v}_G = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{p} \quad (2.3)$$

Ainsi pour un tel système **la quantité de mouvement est celle de son centre de gravité affecté de la masse totale**  $m = m_1 + m_2$ .

Cette notion se généralise, c'est pourquoi l'étude d'un solide indéformable peut souvent être ramenée à l'étude de son centre de gravité, le poids s'exerçant au niveau de  $G$ .

### I.2 Principe d'inertie

#### a) Énoncé

On dit d'un point matériel qu'il est **isolé** s'il n'est soumis à aucune interaction avec l'extérieur. C'est évidemment une approximation, car il existe des interactions à portée infinie.

#### Principe d'inertie

- \* Il existe une classe de référentiels appelés **référentiels galiléens** dans lesquels tout point matériel isolé persévère dans son état de repos ou est en mouvement rectiligne uniforme.

Une conséquence directe de ce principe est que les **référentiels galiléens sont nécessairement en translation rectiligne les uns par rapport aux autres**.

#### b) Exemples de référentiels galiléens

À proprement parler, il n'existe aucune preuve de l'existence d'un référentiel galiléen, on ne peut que l'admettre tant qu'aucune observation expérimentale ne la met en défaut. En réalité, beaucoup de référentiels peuvent être considérés comme galiléens, tout dépend de la durée du phénomène étudié :

- **référentiel terrestre / laboratoire** : référentiel centré au niveau d'un point de la Terre avec ses axes liés à la rotation terrestre et adapté pour des expériences de l'ordre de quelques minutes ;
- **référentiel géocentrique** : référentiel prenant pour origine le centre de la Terre, avec ses axes pointant vers trois étoiles lointaines supposées fixes, et adapté pour des expériences où l'on peut négliger le mouvement orbital autour du Soleil (typiquement pour le mouvement de satellites) ;

Il s'agit en fait de la moyenne des distances entre les deux points matériels, pondérée par leurs masses respectives. On donne ainsi une idée de la répartition de masse, si  $G$  est plus proche de  $M_1$  ou  $M_2$ .

- **référentiel héliocentrique** : référentiel prenant pour origine le centre du Soleil, avec ses axes pointant vers trois étoiles lointaines supposées fixes, adapté pour des expériences très longues de plusieurs milliers d'années (typiquement le mouvement des planètes).

Il est possible de travailler avec des référentiels non galiléens, possédant un mouvement **accélééré** par rapport à un référentiel galiléen, mais ce ne sera pas abordé en PTSI/PT.

### I.3 Loi de la quantité de mouvement

#### a) Notion de force

Le mouvement d'un système peut être modifié s'il subit des interactions avec l'extérieur, que l'on regroupe dans la dénomination de **force** :

##### Définition

Une force est une grandeur vectorielle décrivant l'interaction capable de modifier et/ou produire un mouvement ou une déformation du système.

On étudiera dans la section suivante un grand nombre de forces classiquement rencontrées en mécanique.

#### b) Énoncé

On peut maintenant faire le lien entre l'aspect cinétique ( $\vec{p}$ ) et dynamique (interactions, forces) à l'aide de la loi de la quantité de mouvement (ou principe fondamental de la dynamique, ou encore 2e loi de Newton) :

##### Loi de la quantité de mouvement (LQM)

Pour un point matériel  $M$  de masse  $m$  dont on étudie le mouvement dans un référentiel galiléen, et subissant des forces  $\{\vec{F}_i\}$  **extérieures au système**, la quantité de mouvement vérifie

\*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.4)$$

- Si le système est pseudo-isolé, c'est-à-dire que la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système est nulle, alors il suit un mouvement rectiligne uniforme car  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$  soit  $\vec{p} = \vec{cste}$ ;
- si la masse du système est constante, on retrouve une forme simplifiée de la LQM :

\*

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.5)$$

- un système est à l'équilibre s'il vérifie  $\vec{p} = \vec{0}$ , ce qui implique que  $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$  (que l'on appelle souvent **principe fondamental de la statique**).

Ce n'est pas le cas d'une fusée par exemple, car sa masse diminue du fait de la consommation de carburant

### I.4 Principe des actions réciproques

Conséquence de la loi de la quantité de mouvement, si on considère deux systèmes  $M$  et « l'extérieur » tels que l'ensemble est isolé, on peut écrire que  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} + \vec{F}_{M \rightarrow \text{ext}}$  conduisant au principe des actions réciproques :

##### Principe des actions réciproques

Si le milieu extérieur à un système  $M$  exerce la force  $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M}$ , alors le système exerce la force  $\vec{F}_{M \rightarrow \text{ext}}$  sur le milieu extérieur tel que

$$\vec{F}_{M \rightarrow \text{ext}} = -\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} \quad (2.6)$$

c'est-à-dire une **force réciproque de même intensité et de sens opposé**.

Cela signifie donc qu'une pomme chutant sur la Terre exerce la même force que la Terre sur la pomme mais, fort heureusement grâce à la différence de masse, l'accélération de la Terre due à cette chute est infiniment petite !

## II. Forces et applications

### II.1 Les interactions fondamentales

On peut distinguer quatre types d'interactions fondamentales en physique :

- **l'interaction gravitationnelle** : interaction attractive entre deux objets massiques, de portée infinie ;
- **l'interaction électromagnétique** : elle gouverne la plupart des interactions à notre échelle et caractérise la répulsion ou attraction de charges ou de corps chargés. Elle aussi est de portée infinie ;
- **l'interaction forte** : force de courte portée (échelle du noyau, soit  $10^{-15}$  m) permettant la stabilité des noyaux en limitant la répulsion entre protons et permet la cohésion entre neutrons et protons ;
- **l'interaction faible** : de portée encore plus petite ( $10^{-17}$  m) et d'intensité plus faible, elle concerne toutes les particules de matière, et explique la radioactivité  $\beta$ .

La quasi-totalité des forces qui suivent sont des forces **s'expliquant au niveau microscopique par les interactions électromagnétiques**.

### II.2 Poids

#### a) Définition

L'une des forces les plus simples à nos yeux, le poids est la conséquence de l'interaction gravitationnelle. Pour une masse  $m$  se situant autour de la Terre à une distance  $r$  de son centre, elle subit une force (en paramétrage sphérique) :

$$\vec{F}_g = -\frac{Gmm_T}{r^2}\vec{e}_r = m\vec{G} \quad (2.7)$$

avec  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$  la constante gravitationnelle et  $\vec{G}$  le vecteur champ gravitationnel créé par la masse  $m_T$  en un point quelconque de l'espace.

Si on se place à la surface terrestre, on peut la réécrire :

$$\vec{P} = -\frac{Gmm_T}{R_T^2}\vec{e}_z = m\vec{g} \quad (2.8)$$

avec l'accélération de la pesanteur  $\vec{g} = -\frac{Gm_T}{R_T^2}\vec{e}_z = -g\vec{e}_z$  localement :  $R_T \simeq 6400$  km étant le rayon terrestre,  $m_T = 6 \cdot 10^{24}$  kg, on trouve  $g \simeq 9,81 \text{ m s}^{-2}$  à notre latitude.

#### b) Exemple



#### Exercice

Déterminer le lien entre position et temps dans le cas d'une chute d'une masse partant d'une altitude  $h$  depuis le sol sans vitesse initiale. Déterminer alors le temps de chute en fonction de  $h$  et  $g$ .

- Système : masse
- Référentiel terrestre supposé galiléen
- Bilan des forces : poids  $\vec{P}$ , force de frottement négligé.
- Cinématique : on a un mouvement supposé purement vertical, donc  $\vec{a} = z\vec{e}_z$ .

- Loi de la quantité de mouvement :  $m\vec{a} = \vec{P}$ . En projection sur l'axe vertical orienté vers le bas, il vient  $\dot{z} = -g$ .

En considérant que l'on part de  $z = h$  à vitesse nulle, il vient  $\dot{z} = -gt + 0$  et  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$ . Le temps de chute est tel que  $z(t_c) = 0 = -\frac{1}{2}gt_c^2 + h$  soit  $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

### II.3 Poussée d'Archimède

L'expérience estivale d'un individu dans une mer turquoise montre que la gravité que l'on ressent dans l'eau est réduite, de par une force communément appelée **poussée d'Archimède**. Cette force correspond à la **résultante des forces de pression du fluide qui entoure le système** et s'exprime par

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergé}} \vec{g} \quad (2.9)$$

Elle s'oppose à la gravité et correspond à l'**opposé du poids du volume de fluide déplacé**.

Ainsi si la masse volumique du fluide est comparable à celle du système, les deux forces peuvent se compenser, ce qui explique la flottaison d'un corps humain, mais également qu'un glaçon est partiellement immergé (car  $\rho_{\text{glace}} < \rho_{\text{liquide}}$ ).

### Exercice

Déterminer la fraction immergée d'un glaçon cubique sachant que la masse volumique de la glace est  $\rho_{\text{glace}} = 920 \text{ kg m}^{-3}$  et  $\rho_{\text{eau}} = 1,02 \text{ g cm}^{-3}$  pour celle de l'eau salée. Système : glaçon

Référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des forces : poids, poussée d'Archimède.

Loi de la quantité de mouvement (en statique) :  $m\vec{g} - \rho_{\text{eau}} V_{\text{imm}} \vec{g} = \vec{0}$ .

En projection, cela permet d'écrire  $m = \rho_{\text{eau}} V_{\text{imm}} = \rho_{\text{glace}} V$ . Donc  $\frac{V_{\text{imm}}}{V} = \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{eau}}} = 0,90$ , soit 10% visible.

### II.4 Réaction du support

#### a) Définition

Lorsque l'on pose un objet sur un support, ce dernier l'empêche de tomber en exerçant sur lui une force  $\vec{R}$  dirigée de la surface vers l'objet. On peut en réalité distinguer deux composantes :

- la **composante normale**, notée souvent  $\vec{N}$  ou  $\vec{R}_N$ , perpendiculaire à la surface de contact entre l'objet et le support et dirigée vers l'extérieur du support ;
- la **composante tangentielle**, notée souvent  $\vec{T}$  ou  $\vec{R}_T$ , tangente à la surface correspondant :
  - lorsque le solide est immobile à l'action du support qui empêche le mouvement malgré l'application d'une autre force ;
  - lorsque le solide est en mouvement elle correspond à une **force de frottements solide** s'opposant au mouvement, donc **dans le sens opposé du vecteur vitesse**  $\vec{v}$ .



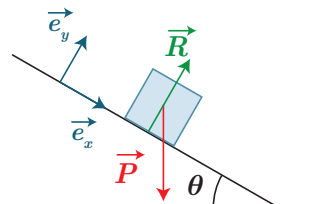
**La réaction normale ne possède pas d'expression propre**, seule sa direction est connue *a priori*, sa norme peut seulement l'être *a posteriori* une fois que l'on connaît les équations du mouvement. Ainsi la priorité dans une situation physique où un contact solide est présent est d'éliminer cette inconnue.

#### Contact et rupture entre deux solides

- \* Le contact est assuré tant que  $\|\vec{N}\| \neq 0$ . Il y a rupture de contact lorsque  $\vec{N} = \vec{0}$ , situation physique pouvant parfois être recherchée.

#### b) Un premier exemple

Étudions par exemple un cube glissant sans frottements sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  avec l'horizontal, lâché sans vitesse initiale. On choisit un repère cartésien, adapté à la situation, prenant pour origine la position initiale de la masse.



Déterminons la position de la masse au cours du temps. On considérera que le solide part sans vitesse initiale à  $x = 0$  et que le contact entre le solide et le plan est toujours vérifié.

- Système : masse
- Référentiel terrestre supposé galiléen
- Bilan des forces : poids  $\vec{P}$  et réaction normale du support  $\vec{R} = \vec{N}$ .
- Cinématique :  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$  en utilisant le repère associé au plan incliné, et en considérant  $\dot{y} = 0$  si le contact n'est pas rompu.
- On applique la LQM à la masse dans le référentiel du laboratoire :

$$* \quad m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \quad (2.10)$$

On projette cette relation vectorielle selon cet axe :

$$m\ddot{x} = +mg \sin \theta + 0 \quad (2.11)$$

(suivant l'axe  $(Oy)$  on trouve  $0 = -mg \cos \theta + N$ ) que l'on intègre en  $\dot{x} = g \sin \theta t$  puis enfin  $x(t) = \frac{1}{2}g \sin \theta t^2$  : tout se passe comme si la gravité avait été diminuée, c'est ici l'effet du support incliné.

#### Astuce lors de la projection d'une force

Pour vérifier une projection, prendre un angle particulier, par exemple  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi/2$ .

Dans l'exemple précédente, la projection est nulle pour  $\theta = 0$ , car  $\vec{P}$  verticale;  $\vec{P}$  est dirigée intégralement selon l'axe  $(Ox)$  pour  $\theta = \pi/2$ , on obtient donc bien la norme de  $\vec{P}$  après projection.



**la réaction du support ne compense pas toujours intégralement le poids.**

### c) Les lois de Coulomb (HP)

Ces lois ne sont pas clairement au programme, néanmoins elles pourront vous être données, libre à vous ensuite de savoir les appliquer. Il s'agit de lois phénoménologiques permettant de faire le lien entre les deux composantes de la réaction du support :

- une absence de glissement implique  $\|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$  avec  $\mu_s$  coefficient de frottement statique, sans dimension ;
- le glissement implique  $\|\vec{T}\| = \mu_d \|\vec{N}\|$  avec  $\mu_d < \mu_s$  coefficient de frottement dynamique, sans dimension



**Il ne s'agit que d'implications !**

En particulier, le glissement se produit dès que la première condition n'est plus respectée, soit lorsque  $\|\vec{T}\| > \mu_s \|\vec{N}\|$ .

Les coefficients de frottements ne dépendent que des deux surfaces mises en contact, et pas de l'aire de la zone de contact.



### Exercice

Déterminer le coefficient de frottement statique du contact bois sur bois pour un plan incliné si le glissement se produit à partir d'un angle de  $22^\circ$ . On partira des conditions de glissement et la projection de la LQM sur deux axes en statique.

On applique la loi de la statique et on projette suivant les deux axes du plan :

$$\begin{cases} 0 = -mg \cos \alpha + N & (2.12) \\ 0 = mg \sin \alpha - T & (2.13) \end{cases}$$

Il y a glissement dès que  $T$  dépasse la valeur  $T_{\text{lim}} = \mu_s N$  ce qui se traduit par

$$mg \sin \alpha > \mu_s mg \cos \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha > \mu_s = \tan(\alpha_{\text{lim}}) = 0,40 \quad (2.14)$$

Le fait que  $\mu_d < \mu_s$  s'explique par le fait le déplacement implique une surface de contact moindre (des contacts sont forcément rompus entre le système et le support lors du mouvement).

## II.5 Forces de frottements fluides

### a) Deux types de frottements fluides

Pour le moment nous allons considérer deux types de forces de frottement fluide, en distinguant vitesse "faible" et vitesse "élevée" (mais il faudra attendre la mécanique des fluides pour être plus quantitatif) :

- à faible vitesse,  $\vec{F} = -h\vec{v}$  avec  $h$  coefficient de frottement de fluide (en  $\text{kg s}^{-1}$ ), dépendant du fluide et de la forme de l'objet autour duquel le fluide s'écoule ;
- pour des vitesses plus importantes, il est nécessaire de prendre un modèle quadratique  $\vec{F} = -k v \vec{v}$  proportionnel au carré de la norme du vecteur vitesse instantanée ;  $k$  étant aussi un coefficient de frottements (exprimé en  $\text{kg m}^{-1}$ ).

Souvent c'est l'expérience qui nous guide dans ce choix, le plus simple étant de prendre la forme linéaire, de confronter à l'expérience et changer de modèle si besoin.

### b) Chute libre avec frottements

Prenons un premier exemple, à savoir un saut en chute libre d'un parachutiste. Heureusement pour lui, on constate qu'il n'accélère pas sans cesse, il finit par atteindre une vitesse limite, ce qu'un modèle sans frottements ne permet pas de modéliser (vitesse croissante avec le temps).

#### Exercice

En supposant que le parachutiste est soumis au poids et à une force de frottements fluide linéaire, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse verticale. On prendra un axe vertical orienté vers le bas.

L'application de la LQM dans le référentiel terrestre supposé galiléen conduit à

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} \Leftrightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - h\vec{v} \quad (2.15)$$

qui se réécrit sous la forme

$$\frac{m}{h} \frac{dv}{dt} + \vec{v} = \frac{m\vec{g}}{h} \quad (2.16)$$

que l'on peut projeter selon l'axe vertical ( $Oz$ ) orienté vers le bas en posant  $\tau = \frac{m}{h}$  :

$$\tau \frac{dv_z}{dt} + v_z = \frac{mg}{h} \quad (2.17)$$

Il s'agit d'une équation du premier ordre à coefficient constant, que l'on peut résoudre :

- la solution de l'équation homogène est de la forme  $v_{z,h} = K e^{-\frac{t}{\tau}}$  ;
- la solution particulière correspond au régime permanent  $v_\ell = \frac{mg}{h}$  ;
- la condition initiale  $v_z(t=0) = 0$  permet enfin de trouver la valeur de  $K$ .

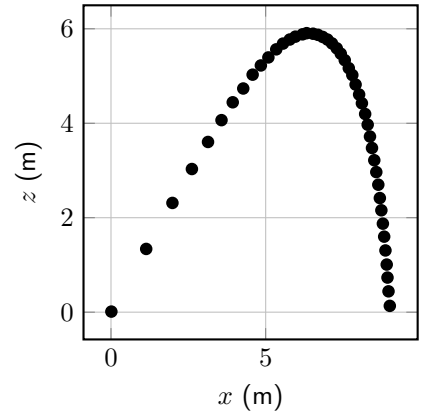
$$v_z(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} + v_\ell = v_\ell \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (2.18)$$

On a donc d'abord un régime transitoire où la vitesse croît, puis finalement devient constante en régime permanent : **la force de frottements compense exactement le poids et le mouvement est rectiligne et uniforme.**

### c) Tir balistique

#### i) Insuffisance du modèle de frottement linéaire

Prenons maintenant l'exemple d'un volant de badminton envoyé avec une vitesse initiale faisant un angle  $\theta$  avec l'horizontale, dont la trajectoire est représentée ci-contre, où les mesures des différents points ont été réalisées à intervalles réguliers.

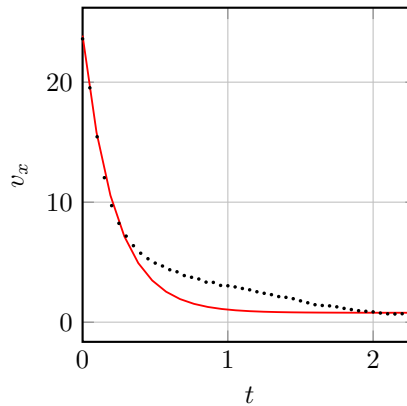


### Exercice

En supposant que le volant subisse une force de frottement linéaire, déterminer l'expression de  $v_x(t) = \dot{x}$  au cours du temps.

En projetant la LQM selon l'axe horizontal, il vient  $\tau \frac{dv_x}{dt} + v_x = 0$  de solution  $v_x(t) = v_{x,0} e^{-t/\tau}$ , où l'on a posé  $\tau = m/h$ .

On constate en traçant la vitesse horizontale au cours du temps que le modèle exponentiellement décroissant ne semble pas fonctionner :



#### ii) Modification du modèle

Voyons ce que cela change lorsqu'on choisit maintenant une force de frottements quadratique. La LQM se réécrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - kv\vec{v} \quad (2.19)$$

Cette équation est non-linéaire, elle n'est donc pas soluble analytiquement. En régime permanent, le poids compense la force de frottements, et la vitesse s'écrit  $\vec{v}_\ell = -v_\ell \vec{e}_z$  (le poids oriente le mouvement selon  $-\vec{e}_z$ ). Ainsi  $m\vec{g} = kv_\ell \vec{v}_\ell = -kv_\ell^2 \vec{e}_z$  et une projection selon l'axe vertical aboutit à  $v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ .

Cette équation peut être **adimensionnée**, c'est-à-dire qu'on introduit des grandeurs sans dimension pour les variables (ici la vitesse et le temps) :

- pour la vitesse :  $\vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{v_\ell}$  ;
- pour le temps on peut utiliser la vitesse limite et l'accélération de la pesanteur  $\tau = \frac{v_\ell}{g}$  et donc un temps adimensionné  $t^* = \frac{t}{\tau}$ .

Pour adimensionner l'équation, il faut alors réinjecter  $\vec{v} = \vec{v}^* v_\ell$  et  $t = \tau t^*$  :

$$m \frac{d\vec{v}^* v_\ell}{d\tau t^*} = -kv_\ell^2 \vec{e}_z - kv^* v_\ell \times \vec{v}^* v_\ell \iff \frac{mv_\ell}{\tau k} \frac{d\vec{v}^*}{dt^*} = -v_\ell^2 (\vec{e}_z + v^* \vec{v}^*) \quad (2.20)$$



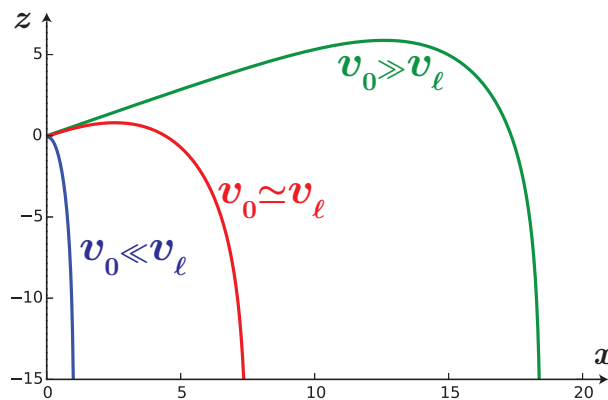
puis avec  $\frac{mv_\ell}{\tau k} = \frac{mg}{k} = v_\ell^2$ , il vient :

$$\frac{d\vec{v}^*}{dt^*} = -(\vec{e}_z + v^* \vec{v}^*) \quad (2.21)$$

Même si on ne peut résoudre l'équation, on peut raisonner en terme d'**ordres de grandeur** en comparant les deux forces mises en jeu (le poids et la force de frottements), et donc la vitesse initiale par rapport à la vitesse limite  $v_\ell$  :

- \* ■ si la vitesse initiale est très petite devant  $v_\ell$ , la force de frottements fluide est négligeable au début du mouvement car on pourra pendant longtemps considérer que  $\|v^* \vec{v}^*\| \ll 1$ . On a quasiment un mouvement de chute libre sans frottements, avec  $\frac{d\vec{v}^*}{dt^*} \simeq -\vec{e}_z$  jusqu'à atteindre une vitesse limite ;
- si la vitesse initiale est très grande devant  $v_\ell$ , au contraire c'est la force de frottements qui est prédominante : on va avoir un mouvement rectiligne décéléré jusqu'à ce que le poids prenne de l'importance, et s'en suit la phase de chute libre ;
- si enfin la vitesse initiale est du même ordre de grandeur que  $v_\ell$ , les résultats sont identiques à la fin du mouvement observé dans le cas précédent.

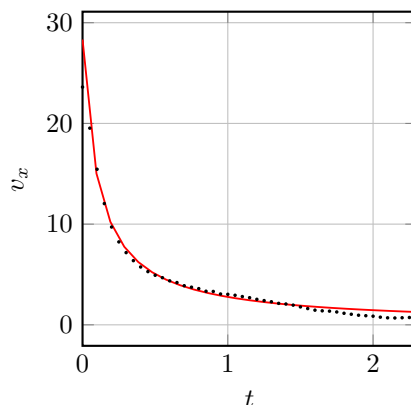
Cela est illustré sur les trajectoires possibles ci-dessous :



Notons que la projection de la LQM selon les deux axes donne :

$$\begin{cases} \ddot{x}^* = -\dot{x}^* \sqrt{(\dot{x}^*)^2 + (\dot{y}^*)^2} & (2.22) \\ m\ddot{y}^* = -1 - \dot{y}^* \sqrt{(\dot{x}^*)^2 + (\dot{y}^*)^2} & (2.23) \end{cases}$$

qui n'est pas soluble analytiquement. On peut par conséquent effectuer une résolution numérique à l'aide de Python, ce qui nous permet de confronter la solution numérique avec les mesures et ainsi conforter ce modèle :



## II.6 Tension d'un fil

### a) Définition

Une dernière force rencontrée couramment est la **tension du fil**  $\vec{T}$ . En effet, un fil maintenu tendu par l'intermédiaire d'une masse exerce sur cette dernière une force. De plus, le fil transmet de proche en proche cette force en module et en direction sur toute sa longueur.

Quelques propriétés sont à noter :

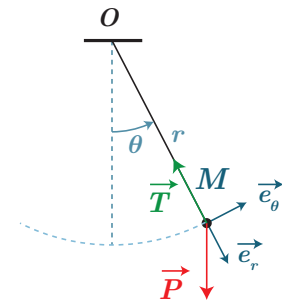
- à l'instar de la réaction du support, la norme de cette force est inconnue *a priori* et se détermine une fois connues les équations du mouvement ;
- dans le cas où le fil passe par une poulie, il transmet intégralement la norme de la force (mais la direction change) ;
- dans le cas d'un fil souple, il se détend si  $T = 0$ .

### b) Exemple du pendule simple

#### i) Mise en équation

Prenons l'exemple d'un pendule simple, constitué d'un fil de longueur  $\ell$  fixé en  $O$  et tendu par une masse  $m$  accrochée à son extrémité mobile. Déterminons les équations du mouvement de la masse.

Sur la masse s'exercent deux forces : le poids  $\vec{P}$  et la tension du fil  $\vec{T}$  orientée en direction du fil. On va appliquer la LQM dans le référentiel du laboratoire et, comme la distance à l'axe est constante et vaut  $\ell$ , il paraît judicieux d'employer les **coordonnées polaires**.



On a donc :

$$* \quad m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \quad (2.24)$$

que l'on va projeter. Étant donné que l'on ne connaît pas  $\vec{T}$ , on va projeter selon  $\vec{e}_\theta$  :

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (2.25)$$

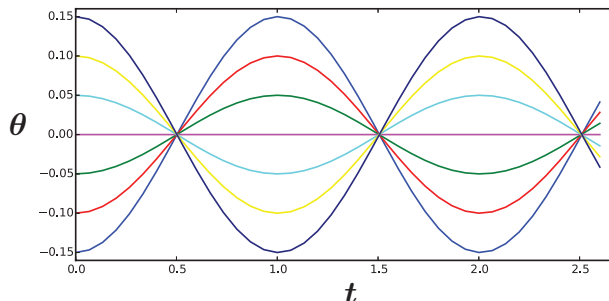
qui se réécrit :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (2.26)$$

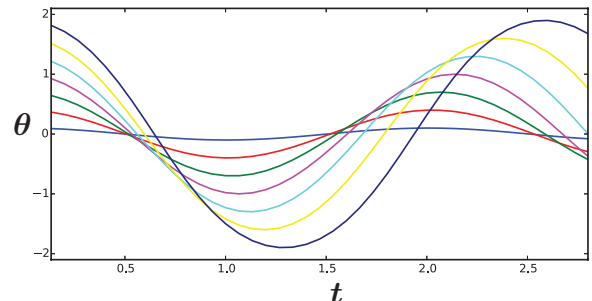
en posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$  la pulsation propre du système. C'est l'équation différentielle associée à un pendule simple.

#### ii) Résolution numérique

Cette équation n'est pas linéaire, on ne peut qu'effectuer une résolution numérique. On représente ci-dessous plusieurs tracés de  $\theta(t)$  selon la valeur de l'angle initial  $\theta_0$  (vitesse initiale nulle) :



(a)



(b)

On constate que pour de faibles angles initiaux (figure (a)), on a des oscillations ressemblant à des portions de sinusoides, toutes possédant la même période : on parle d'**isochronisme des petites oscillations**. Alors que pour des angles initiaux plus importants (ou des vitesses initiales importantes, également), on semble toujours avoir un mouvement périodique, mais de période dépendant de la position initiale (figure (b)).

### iii) Cas des oscillations de faible amplitude

Dans le cas où  $\theta \ll 1$ , on peut approximer  $\sin \theta$  à  $\theta$  (on parle alors de **linéarisation de l'équation différentielle**), et l'on aboutit à l'équation d'un **oscillateur harmonique** :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (2.27)$$

de pulsation caractéristique  $\omega_0$  que l'on étudiera plus en détail au prochain chapitre.

## 2.1 Faire des bonds sur la Lune

Dans l'album de Tintin "On a marché sur la Lune", le Capitaine Haddock est étonné de pouvoir faire un bond beaucoup plus grand que sur Terre. On va tenter de quantifier cela. On assimile le mouvement du Capitaine à celui de son centre de gravité  $M$  de masse  $m$ . Il saute depuis le sol lunaire avec une vitesse initiale  $v_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec le sol. On note  $g_\ell$  l'accélération de la pesanteur sur la Lune.

1. Établir les équations horaires et l'équation de la trajectoire.
2. Déterminer l'expression de la distance horizontale parcourue au cours du saut en fonction de  $v_0$ ,  $g_\ell$  et  $\alpha$ . Pour quelle valeur de  $\alpha$  est-elle maximale ?
3. Sur la Lune, la pesanteur est environ six fois moins forte que sur Terre. Quel est l'ordre de grandeur de la distance horizontale parcourue par le Capitaine sur la Lune ?

- 1) Cette question est facile mais doit faire l'objet d'une rigueur dans le raisonnement et les calculs mathématiques, en particulier sur l'utilisation des conditions initiales.
- 2) La distance parcourue est telle que  $z = 0$  (on trouve  $x = 0$  et  $x =$  la distance cherchée). Utiliser le fait que  $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  pour simplifier la recherche du maximum.
- 3) Sur Terre, quelle distance est-on capable de sauter horizontalement ? En déduire celle sur la Lune.

## 2.2 Effet du frottement exercé par un fluide animé d'une vitesse uniforme

Une bille de masse  $m$  est suspendue à un fil et de longueur  $\ell$ . L'ensemble est soumis au champ de pesanteur uniforme vertical de norme  $g$  et l'action d'un vent dont le champ de vitesse est uniforme de norme  $v_0$ . Le référentiel terrestre est galiléen, on utilise la base cartésienne d'axe horizontal  $Ox$  orienté dans le sens du vent et d'axe  $Oz$  vertical ascendant. On prendra un modèle linéaire du frottement, de coefficient  $\alpha$ .

1. En se plaçant dans un référentiel en translation à vitesse constante  $v_0$  (référentiel du vent), expliquer en quoi il y a bien une force de frottements fluides qui s'exerce sur la bille.
2. Faire un schéma sur lequel sont représentées les forces s'exerçant sur la bille.
3. Déterminer l'angle  $\theta_{\text{eq}}$  que le fil forme avec la verticale à l'équilibre.
4. Vérifier la cohérence des résultats en examinant l'influence des différents paramètres.

- 1) La bille se déplace vers la gauche dans ce référentiel, donc elle y subit une force de frottement fluide orientée dans le sens opposée à son mouvement !
- 2) La somme des 3 forces vaut quoi dans le référentiel terrestre ?
- 3) Il peut être pertinent de choisir le référentiel qui facilitera la projection et la suppression des inconnues (ici, quelle force n'est pas connue du tout ?).
- 4) Regarder comment évolue  $\theta_{\text{eq}}$  si  $m$  augmente, si  $g$  augmente, si  $v_0$  augmente, etc.

## 2.3 Déménageur

Un déménageur cherche à déplacer une caisse en bois remplie, posée sur du parquet. Il veut la faire glisser en la tirant. Comment doit-il tirer la caisse pour exercer l'effort le plus faible possible ? Horizontalement ? verticalement ? de manière oblique ? Dans ce dernier cas, on précisera l'angle. Ce résultat dépend-il de la nature du revêtement du sol ?

*Il s'agit d'une résolution de problème : on attend une modélisation, une schématisation. Bien préciser les lois physiques employées, réaliser des calculs littéraux, et critiquer enfin le résultat obtenu.*

- On cherche à minimiser la tension du fil en fonction de l'angle de celui-ci par rapport à l'horizontale car ce sera de manière équivalente ce qui sera exercé comme effort par le déménageur. Pour la trouver, il faut effectuer un bilan des forces (frottements solides = lois de Coulomb), et écrire une LQM (par exemple en mouvement rectiligne uniforme). En combinant les projections, on doit pouvoir trouver la tension.

## 2.4 Jeux aquatiques

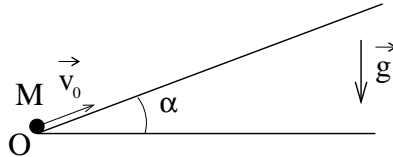
Un baigneur de masse  $m = 80 \text{ kg}$  de densité approximative  $d = 0,9$  saute d'un plongoir situé à une hauteur  $\ell = 10 \text{ m}$  de la surface de l'eau. On considère qu'il se laisse chuter sans vitesse initiale et qu'il est uniquement soumis à la force de pesanteur durant la chute libre (absence de frottements). On note  $(Oz)$  l'axe vertical **descendant**,  $O$  étant au niveau de la surface de l'eau.

1. Peut-on négliger l'influence de la poussée d'Archimède dans l'air ?
2. Déterminer la vitesse d'entrée  $v_e$  dans l'eau ainsi que le temps de chute  $t_c$ , et effectuer les applications numériques.
3. Lorsqu'il est dans l'eau, le baigneur ne fait aucun mouvement et subit, en plus de la pesanteur une force de frottements  $\vec{F}_f = -h \vec{v}$  où  $h = 250 \text{ kg s}^{-1}$  et la poussée d'Archimède. Montrer que l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse en projection sur  $(Oz)$  s'écrit  $\tau \frac{dv_z}{dt} + v_z = g\tau \left(1 - \frac{1}{d}\right)$ . On posera  $\tau = \frac{m}{h}$ .
4. Résoudre cette équation en posant  $t' = t - t_c$  de sorte à étudier le mouvement pour  $t' > 0$ .
5. Déterminer la vitesse limite  $v_L$  et effectuer l'application numérique. Discuter de son signe. Est-ce normal ?
6. À quel instant le baigneur commence-t-il à remonter ?
7. En déduire la profondeur minimale du bassin pour effectuer le plongeon en toute sécurité.

- 1) Faire des AN (rapport de forces par exemple)
- 2) Chute libre classique, paramétrer à 1D.
- 3) La poussée d'Archimède est le terme faisant intervenir la densité sachant que  $\rho = d\rho_{\text{eau}}$  et donc  $m = d\rho_{\text{eau}}V$ .
- 6) La remontée s'effectue quand la vitesse change de signe, soit  $v_z = 0$ .

## 2.5 Mouvement rectiligne et frottement solide

On considère le dispositif de la figure ci-dessous :



L'objet de masse  $m$  (qu'on assimilera à un point matériel), est lancé vers le haut depuis  $O$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$  parallèle au plan incliné.

Le mouvement du mobile s'effectue avec un frottement solide. La force que le support exerce sur le mobile est modélisée par  $\vec{F} = \vec{N} + \vec{T}$  où  $\vec{T}$  est la composante tangentielle de la réaction du support et  $\vec{N}$  est la composante normale de la réaction du support. On rappelle les lois de Coulomb :

- tant que le mobile est en mouvement,  $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$  ;
- le mobile est immobile si et seulement si  $\|\vec{T}\| < f_s \|\vec{N}\|$ .

On précise que  $f_d < f_s < 1$ .

1. Faire un schéma clair représentant toutes les forces s'appliquant sur le mobile au cours de son mouvement.
2. En utilisant la loi de la quantité de mouvement, déterminer la position du mobile tant qu'il est en mouvement.
3. Déterminer la position  $x_f$  du mobile quand sa vitesse s'annule.
4. Déterminer la condition sur l'angle  $\alpha$  pour que l'objet reste ensuite immobile sur le plan incliné.
5. Considérons enfin le cas d'un mouvement descendant avec une vitesse  $v_0$ . À quelle condition s'arrête-t-il ?

## 2.6 Luge (pour s'entraîner aux concours)

La luge est devenue un sport olympique en 1964 à Innsbruck (Autriche). Le lugeur est allongé, sur le dos et les pieds en avant, sur la luge qui glisse sur une piste de glace. Pour freiner, le lugeur ne peut compter que sur ses

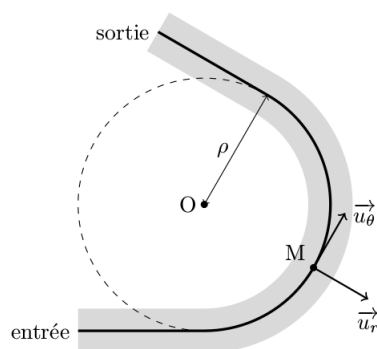
pieds car la luge ne comporte pas de frein. Les spécialistes peuvent atteindre des vitesses supérieures à 100km/h. Pour la modélisation, on assimile l'ensemble luge+lugeur (désigné par la suite sur le terme simple de luge) à un point matériel  $M$  de masse  $m = 100$  kg. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

### Descente rectiligne

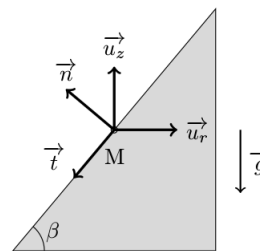
Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse  $v_0 = 5,0 \text{ m s}^{-1}$ . Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de 10% (on descend verticalement de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On appelle  $\alpha$  l'angle que fait la piste avec l'horizontale. Les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu. Le point  $M$  est ainsi en mouvement rectiligne uniformément accéléré.

1. Déterminer l'expression de la vitesse en fonction du temps. Au bout de quelle durée  $t_a$  la luge atteint-elle la vitesse  $v_a = 30 \text{ m s}^{-1}$ ? Application numérique.
2. Quelle est la distance parcourue lorsque la luge atteint la vitesse  $v_a$ ? Application numérique.

À présent, le point  $M$  est en mouvement circulaire à la vitesse  $V$ , sur un cercle de rayon  $\rho$ . La piste est inclinée latéralement d'un angle  $\beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . La trajectoire se situe dans un plan horizontal :  $\vec{v} = V\vec{u}_\theta$ . La base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  est orthonormée direct. On désigne par  $\vec{R} = R_N\vec{n} + R_T\vec{t}$  la réaction de la piste, qui n'est plus uniquement normale. Les vecteurs unitaires  $\vec{n}$  (normal) et  $\vec{t}$  sont définis sur la figure de droite ci-dessous.



Vue de dessus de la piste



Vue en coupe de la piste

3. Exprimer l'accélération  $\vec{a}$  de la luge, dans le référentiel terrestre, en fonction de  $V$ ,  $\rho$ . Justifier physiquement le sens de l'accélération.
4. La luge n'étant soumise qu'à son poids et à la réaction du support, écrire la loi de la quantité de mouvement en projection dans le repère  $(\vec{n}, \vec{t})$ .
5. En déduire les expressions des réactions  $R_N$  et  $R_T$  en fonction de  $V$ ,  $\rho$ ,  $\beta$ ,  $g$  et  $m$ .
6. Quelle est la valeur  $V_c$  de la vitesse pour laquelle la réaction tangentielle est nulle?
7. Écrire alors  $R_T$  en fonction de  $m$ ,  $\rho$ ,  $\beta$  et  $V^2 - V_c^2$ .

Soit  $f = 0,4$  le coefficient de frottement latéral de la luge sur la piste de glace. Les lois du frottement solide indiquent que la luge ne dérape pas tant que  $|R_T| \leq f |R_N|$ . Dans la suite des questions, on ne considère que le cas  $V \geq V_c$  ce qui correspond à un dérapage possible vers l'extérieur du virage.

8. Montrer que  $V$  doit respecter l'inégalité suivante pour éviter le dérapage :

$$V^2(\cos \beta - f \sin \beta) \leq \rho g(\sin \beta + f \cos \beta) \quad (2.28)$$

9. En déduire que si l'inclinaison  $\beta$  est suffisante, il n'y aura jamais dérapage quelle que soit la vitesse  $V$ . Donner l'inclinaison minimale à respecter, qui dépend uniquement du coefficient  $f$ . Faire l'application numérique, en degrés.
10. Si cette inclinaison minimale n'est pas respectée, montrer que la condition de non dérapage impose une vitesse  $V$  à ne pas dépasser, à exprimer en fonction de  $g$ ,  $\rho$ ,  $\beta$  et  $f$ . Que risque la luge si sa vitesse est trop grande?
11. Montrer à partir des résultats précédents qu'en l'absence de frottement latéral, on ne pourrait aborder le virage qu'à la vitesse  $V_c$ . Les frottements permettent ainsi d'avoir une certaine marge de vitesse dans un virage.