

# Ondes et interférences

|   |          |
|---|----------|
| <b>8.1 Le phénomène de propagation . . . . .</b>  | <b>3</b> |
| 8.1.1 Exemples expérimentaux . . . . .  | 3        |
| 8.1.2 Exemples de grandeurs physiques . . . . .   | 4        |
| 8.1.3 Célérité . . . . .  | 4        |
| <b>8.2 Onde progressive unidimensionnelle . . . . .</b>                                   | <b>5</b> |
| 8.2.1 Évolution temporelle . . . . .  | 5        |
| 8.2.2 Évolution spatiale . . . . .  | 6        |
| <b>8.3 Cas de l'onde progressive sinusoïdale . . . . .</b>                                | <b>7</b> |
| 8.3.1 Expression d'une onde progressive sinusoïdale . . . . .                             | 7        |
| 8.3.2 Périodicité spatiale : la longueur d'onde . . . . .                                 | 7        |
| 8.3.3 Vitesse de phase et milieu non dispersif . . . . .                                  | 8        |
| 8.3.4 Déphasage . . . . .   | 9        |
| <b>8.4 Phénomène d'interférence . . . . .</b>   | <b>9</b> |
| 8.4.1 Interférence entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence . . . . . | 9        |
| 8.4.2 Interférence entre deux ondes lumineuses de même fréquence . . . . .                | 11       |

## Questions de cours :

- Donner sans démonstration les deux formes mathématiques par lesquelles on peut modéliser une onde progressive quelconque se propageant à la célérité  $c$  dans le sens des  $x$  croissants. Que deviennent ces deux formes dans le cas où l'onde se propage dans le sens des  $x$  décroissants ?
- Présenter l'onde progressive sinusoïdale, avec la formule selon le sens de propagation, la double périodicité.
- Démontrer la relation liant la longueur d'onde, la période et la célérité d'une onde progressive sinusoïdale.
- Présenter le phénomène d'interférences. Montrer, dans le cas de signaux sinusoïdaux synchrones et en phase issus de points  $S_1$  et  $S_2$  que la connaissance de la différence de marche  $\delta = S_1M - S_2M$  en un point  $M$  de l'espace permet de connaître si les interférences sont constructives ou destructives.
- Présenter l'expérience des fentes d'Young et calculer la différence de marche dans l'approximation paraxiale.
- Donner la formule de Fresnel, l'appliquer au cas des fentes d'Young où  $\delta = \frac{ax}{D}$ . Interpréter qualitativement, puis déterminer l'interfrange.

## Capacités exigibles du BO :

- Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
- Écrire les signaux sous la forme  $f(x-ct)$  ou  $g(x+ct)$ .
- Écrire les signaux sous la forme  $f(t-x/c)$  ou  $g(t+x/c)$ .
- Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
- Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique.
- Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase.
- Relier le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation.
- Mesurer la vitesse de phase, la longueur d'onde et le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire.
- Définir un milieu dispersif.
- Citer des exemples de situations de propagation dispersive et non dispersive.
- Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives.
- Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage.
- Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique.

# Introduction

Ce chapitre permet d'aborder la notion de **propagation** d'un signal physique dans l'espace et dans le temps, un enjeu majeur alors que l'on cherche à transmettre toujours plus d'informations et le plus loin possible. Il ne sera pas question d'expliquer véritablement les phénomènes qui donnent naissance à la propagation de ces signaux, ni les équations mathématiques sous-jacentes – traités en seconde année – mais plutôt de s'attacher à la description en tout point de l'espace du signal qui peut être perçu, sa composition, son écriture mathématique et ses interactions avec d'autres signaux de même nature ce qui permettra d'évoquer les **interférences**. Ce chapitre est d'autant plus important qu'il fait référence à des propriétés que l'on retrouve dans de nombreux pans de la physique, que ce soit en optique, en mécanique, en acoustique ou encore en dynamique des fluides.

On se restreindra enfin à des phénomènes de propagation dans une seule direction de l'espace, ce qui limite peu la généralité car dans de nombreux cas une seule coordonnée d'espace est mise en jeu.

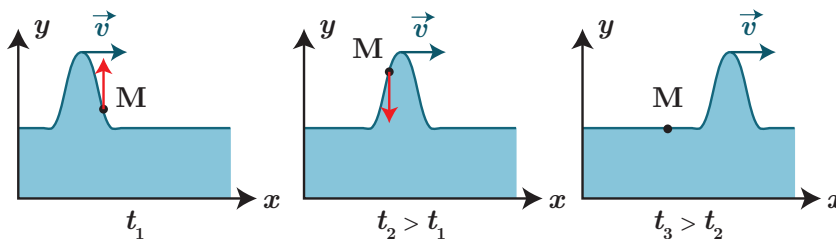
## I. Le phénomène de propagation

### I.1 Exemples expérimentaux

Observons quelques cas concrets de phénomènes de propagation, afin d'en tirer des éléments-clés.

#### a) Le soliton

L'exemple le plus simple de perturbation de l'eau s'appelle un soliton, observée pour la première fois sur un canal écossais par John Scott Russel en 1834. La particularité est que cette déformation localisée se déplace dans le canal sans changement de forme ni variation de vitesse : on dit qu'elle se **propage**. Du fait de la vitesse finie de propagation, il faut un certain temps pour que la déformation se propage d'un point à un autre.



On constate sur la figure précédente qu'un point M à la surface de l'eau se déplace verticalement, sans aucun déplacement horizontal, mais une fois le soliton passé, il revient à sa position d'origine. On peut résumer ces observations ainsi :

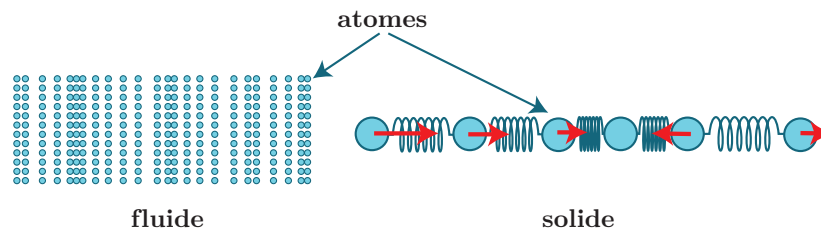
#### Définition

On appelle **onde** une perturbation locale des propriétés physiques d'un milieu se propageant dans l'espace à une vitesse finie. Dans le cas d'un milieu matériel, **aucun transport de matière** n'est perceptible en moyenne.

#### b) Les ondes sonores

On a tous en tête l'image d'un individu au temps du Far West l'oreille collée aux rails de chemin de fer, afin de prévoir le passage d'un train. Au sein d'un solide comme d'un fluide, le son se propage avec une certaine vitesse. Néanmoins les mécanismes microscopiques mis en jeu sont différents :

- pour des fluides, tels que l'air, on observe une modification locale de vitesse et de pression qui se transmet de proche en proche (et à laquelle notre oreille est sensible), et donc une augmentation de la densité locale de particules de fluides ;
- pour des solides, la situation est la même, hormis que l'onde ne se propage pas par l'intermédiaire de chocs mais grâce à d'autres forces répulsives : on peut y modéliser la liaison entre les constituants microscopiques (atomes, ions, molécules) comme un ressort qui se comprime ou se détend.



## I.2 Exemples de grandeurs physiques

On pourrait définir de la manière suivante un signal physique : il s'agit d'une fonction mathématique de la variable temps décrivant l'évolution d'une grandeur physique. Elle s'accompagne parfois de la dépendance en d'autres variables telles que les variables d'espace, lorsque l'on considère la propagation de ces signaux dans l'espace. Prenons quelques exemples :

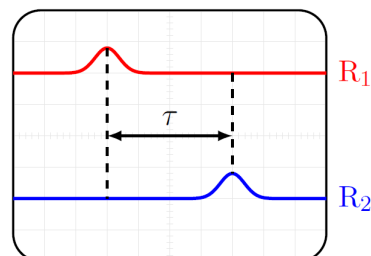
- **signal acoustique** issu de la vibration des molécules d'air, qui se propage de proche en proche. On caractérise ce signal par des grandeurs mécaniques : pression, vitesse moyenne des particules. Le domaine de fréquences des ondes acoustiques audibles par l'homme est de 20 Hz à 20 kHz, au-delà on parle d'**ultrasons**.
- **signal mécanique** : pour un solide, on peut s'intéresser à son mouvement (par exemple pour un diapason, une corde de guitare). Les grandeurs physiques associées sont souvent la position, la vitesse, ou l'accélération.
- **signal optique** englobant tous les signaux électromagnétiques (radio, micro-ondes, infra-rouge, ..., visible, rayons X), caractérisés par deux grandeurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  (champs électrique et magnétique).

On peut aussi caractériser le signal optique par la présence d'un flux de photons ayant une énergie caractéristique du rayonnement, ce qu'on étudiera dans le chapitre d'introduction au monde quantique.

- **signal électrique** dans des circuits : on observe régulièrement les tensions et intensités au cours du temps (cf. chap SP4). Les fréquences mises en jeu vont en général jusqu'à 1 MHz (au-delà, il faut adopter une théorie électromagnétique).
- **signal thermodynamique** par exemple lors de l'étude des variations de température ou de pression au cours du temps pour tout type de matériaux (gaz, solides, liquides). En général les fréquences mises en jeu sont faibles.

## I.3 Célérité

On réalise l'expérience avec un émetteur d'ultrasons, qui envoie des salves (impulsions) mesurées par deux récepteurs situés à une distance  $L$  l'un de l'autre. Sur l'oscilloscope, on visualise simultanément les deux signaux mesurés en fonction du temps.



Le temps mesuré  $\tau$  est le **retard** entre la réception de l'onde par le récepteur  $R_1$  et le récepteur  $R_2$ . Le retard d'une onde correspond au temps nécessaire pour que le signal se propage.

### Définition

On définit la **célérité**  $c$  d'une onde comme sa vitesse de propagation. Elle s'exprime en  $\text{m s}^{-1}$ . La célérité correspond au rapport entre la distance à parcourir entre deux récepteurs divisée par le temps nécessaire à l'onde pour parcourir cette distance  $c = \frac{L}{\tau}$ .

Il faut impérativement savoir par cœur :

- \* ■ la célérité des ondes sonores dans l'air à  $T = 20^\circ\text{C}$  est de  $340\text{ m s}^{-1}$  ;
- la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide est de  $3,00 \cdot 10^8\text{ m s}^{-1}$ .

On peut aussi connaître le cas des ondes acoustiques dans l'eau ( $1480\text{ m s}^{-1}$ ), dans les solides (autour de  $5000\text{ m s}^{-1}$ ).

## II. Onde progressive unidimensionnelle

### a) Introduction

On a pu constater sur l'exemple du soliton que la description de la hauteur d'eau faisait intervenir à la fois l'aspect temporel (variable  $t$ ) et spatial (variable  $x$ ) de manière conjointe. On va donc définir une fonction de deux variables  $s(x, t)$ , où  $s$  sera une coordonnée d'espace, une pression, une vitesse, une intensité électrique, etc.

#### Définition

Un phénomène propagatif est dit **unidimensionnel** lorsque la propagation se fait dans une seule direction de l'espace.

C'est par exemple le cas de signaux dans les câbles électriques, les fibres optiques, les vagues dans les canaux, ...

#### Définition

Une onde progressive est une perturbation qui se propage sans transport de matière dans un milieu en restant identique à elle-même. Elle se retrouve à l'identique un peu plus loin un peu plus tard.

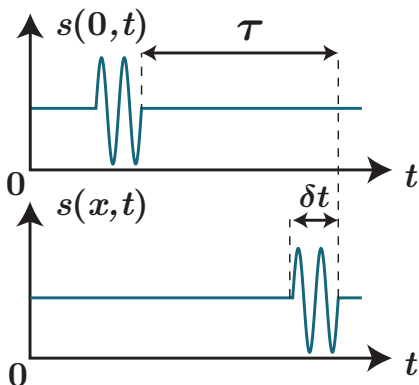
### II.1 Évolution temporelle

#### Manipulation

Simulation d'une évolution temporelle [http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/0ndes/general/evolution\\_temporelle.php](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/0ndes/general/evolution_temporelle.php)

**Dans une représentation temporelle, on regarde à un endroit fixé la perturbation sur toute sa durée (=enregistrement avec un micro fixe).**

Prenons l'exemple concret d'un haut-parleur fixé en un point de l'espace que l'on prendra comme origine et émettant dans la direction  $\vec{e}_x$ , et un microphone à une distance  $x$  quelconque. Un enregistrement au cours du temps du même signal à différentes positions indique qu'il y a un retard temporel  $\tau$  dépendant de la distance :



Le signal à un point de l'espace repéré par son abscisse  $x$   $s(x, t)$  correspond à celui en  $x = 0$  translaté de ce retard  $\tau = \frac{x}{c}$  qui est le temps mis par la perturbation pour parcourir la distance  $x$ , d'où  $s(0, t) = s(x, t + \tau)$  soit

$$s(x, t) = s(0, t - \tau) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (8.1)$$

où l'on introduit une fonction  $f$  à une variable pour simplifier l'écriture.

Dans le cas d'une propagation dans la direction opposée, il suffit de remplacer  $x$  par  $-x$  et l'onde s'écrit alors

$$s(x, t) = s\left(0, t + \frac{x}{c}\right) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (8.2)$$

\* Cette écriture de fonction en  $t \pm \frac{x}{c}$  traduit bien le sens de parcours de l'onde. En effet, considérons la propagation d'une impulsion et repérons le déplacement du maximum. Pour être toujours sur le maximum, il faut donc que la variable  $t - x/c$  soit constante pour que la position sur le motif donné par la fonction  $f$  soit la même. Ainsi, si  $t$  augmente, il faudra également que  $x$  augmente, donc la propagation se produit bien dans le sens des  $x$  croissants.

## II.2 Évolution spatiale

*Dans une représentation spatiale, on regarde à un instant donné la perturbation dans tout l'espace (=photographie).*

Représentons ainsi le profil de l'onde dans l'espace à deux instants différents. On remarque plusieurs éléments sur la figure ci-après :

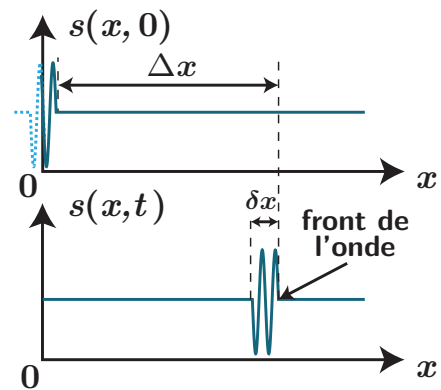
- la courbe associée à la perturbation semble similaire à la précédente mais inversée : c'est prévisible, ce qui est joué dans un premier temps par le haut-parleur est ce qui constituera le **front de l'onde**, et se trouvera donc le plus loin de la source ;
- les motifs n'ont pas la même taille :  $\delta x$  et  $\delta t$  n'ont pas la même dimension, il n'y a pas lieu de représenter les signaux avec la même largeur.

On remarque de plus qu'à deux instants différents, l'onde s'est propagée d'une distance

$$\Delta x = ct$$

\* ainsi  $s(x, 0) = s(x + \Delta x, t)$  Cela permet d'introduire une fonction  $F$  telle que

$$s(x, t) = s(x - \Delta x, 0) = s(x - ct, 0) = F(x - ct) \quad (8.3)$$



De manière équivalente, si l'onde se propage dans le sens  $-\vec{e}_x$ , on peut introduire une fonction  $G$  telle que  $s(x, t) = G(x + ct)$

### À retenir

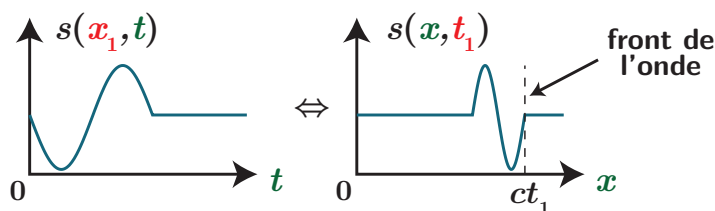
Une onde progressive se propageant à la célérité  $c$  dans la direction de l'axe  $(Ox)$  dans le sens positif est de la forme mathématique

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = F(x - ct) \quad (8.4)$$

tandis que dans le sens négatif :

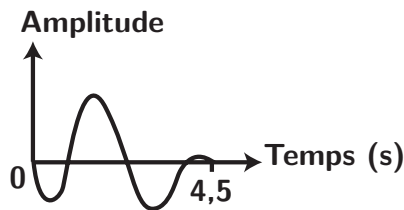
$$s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) = G(x + ct) \quad (8.5)$$

À noter enfin que pour passer d'une représentation spatiale à une représentation temporelle, il faut non seulement tracer le symétrique de la courbe par rapport à la verticale, mais aussi réfléchir à quelle partie du signal sera effectivement déjà propagée, et enfin changer d'abscisse où le facteur de conversion entre coordonnée spatiale et temporelle est la célérité  $c$  :



## Exercice

Un dispositif vibrant commandé en tension permet d'exercer un mouvement d'une corde horizontale en  $x = 0$  selon la fonction représentée ci-contre.



Prévoir l'évolution temporelle en un point  $x = 1,0$  m si la vitesse de propagation des ondes dans la corde est de  $c = 0,40 \text{ m s}^{-1}$ . Prévoir l'évolution de la forme de la corde à 3,1 s

### III. Cas de l'onde progressive sinusoïdale

On a vu que tout signal périodique pouvait s'écrire sous la forme d'une somme de sinusoïdes de fréquences multiples du fondamental. Étudions une seule de ces composantes pour pouvoir en retirer quelques propriétés, et ensuite généraliser.

#### III.1 Expression d'une onde progressive sinusoïdale

Considérons dans toute la suite une onde progressive se propageant selon  $\vec{e}_x$ , de fréquence  $f$  et pulsation  $\omega$ . On parle d'**onde sinusoïdale** si en tout point de l'espace, elle prend la forme

$$s(x, t) = S_0 \cos(2\pi ft + \varphi(x)) = S_0 \cos(\omega t + \varphi(x)) \quad (8.6)$$

où  $S_0$  est l'amplitude en tout point (on ne considère pas d'atténuation) et  $\varphi(x)$  est la phase à l'origine des temps de l'onde au point d'abscisse  $x$ .

Cette onde se propageant à la célérité  $c$ , elle est donc l'image de la vibration issue de  $x = 0$  mais avec un retard  $\tau = \frac{x}{c}$ , soit  $s(x, t) = s(0, t - \tau)$  d'où on conclut que :

#### Définition

Une **onde progressive sinusoïdale** se propageant dans le sens des  $x$  croissants admet pour expression

$$s(x, t) = S_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right) \quad (8.7)$$

$$= S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (8.8)$$

\* où  $k = \frac{\omega}{c}$  est appelé **nombre d'onde** et  $\varphi_0 = \varphi(x = 0, t = 0)$  la phase à l'origine des temps et du repère d'espace.

Dans le cas où l'onde se propage dans le sens  $-\vec{e}_x$ , les expressions précédentes doivent être modifiées en substituant  $-x$  à  $x$ , soit

$$s(x, t) = S_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_0)$$

#### III.2 Périodicité spatiale : la longueur d'onde

##### Propriété

L'onde plane progressive sinusoïdale possède une périodicité spatiale, de période  $\lambda = \frac{c}{f} = cT = \frac{2\pi}{k}$  appelée **longueur d'onde**.

#### Démonstration

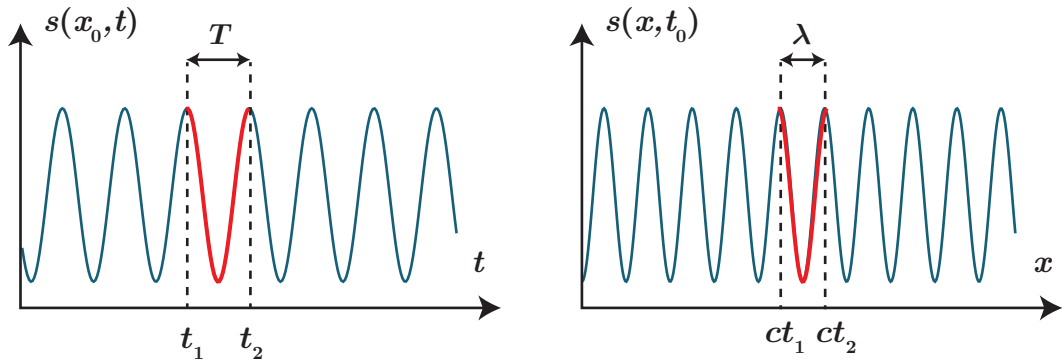
Le signal précédemment introduit est périodique pour la variable temporelle, de période  $T = \frac{1}{f}$ , mais on constate qu'il existe également une périodicité spatiale. En effet, fixons le temps et regardons l'évolution spatiale de la fonction  $s(x, t_0)$  :

$$s(x, t_0) = S_0 \cos(-kx + \omega t_0 + \varphi_0) = S_0 \cos(-kx + \varphi(t_0)) \quad (8.9)$$

$$= S_0 \cos\left(-\frac{\omega x}{c} + \varphi(t_0)\right) = S_0 \cos\left(-\frac{2\pi f x}{c} + \varphi(t_0)\right) \quad (8.10)$$

\*

La formule  $\lambda = cT$  se comprend physiquement : au bout d'un temps  $T$ , le front de l'onde a parcouru spatialement une période, correspondant à une distance  $cT$  :



On parle alors de **double-périodicité** pour une onde progressive sinusoïdale, l'écriture qui suit permettant de faire apparaître les deux formes mises en jeu :

$$s(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = S_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right) \quad (8.11)$$



### Exercice

Donner la période  $T$ , la fréquence  $f$ , la pulsation  $\omega$ , l'amplitude  $S_0$ , la longueur d'onde  $\lambda$  et la célérité  $c$  de l'onde décrite mathématiquement par  $s(x, t) = 6 \sin(3,2 \cdot 10^3 \pi t - 5\pi x + 5\pi)$ .

On identifie  $\omega = 3,2 \cdot 10^3 \pi = 1,0 \cdot 10^4 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $k = 5\pi = 15,7 \text{ m}^{-1}$  et  $S_0 = 6$ . On en déduit la fréquence par  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3,2 \cdot 10^3}{2} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ Hz}$ ,  $T = \frac{1}{f} = 6,2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ . En utilisant  $k = \frac{\omega}{c}$ , il vient  $c = \frac{\omega}{k} = \frac{3,2 \cdot 10^3}{5} = 540 \text{ m s}^{-1}$  et  $\lambda = cT = 0,33 \text{ m}$ .



### Exercice

Lorsque ces ondes se propagent dans l'eau plutôt que dans l'air, quelles sont les caractéristiques modifiées parmi la célérité, la fréquence, la longueur d'onde et la période ?

Fréquence et période inchangés (car caractéristique de la source émettant l'onde), mais  $\lambda$  pourra changer si  $c$  diffère selon le milieu : ici c'est bien le cas entre l'air et l'eau.

## III.3 Vitesse de phase et milieu non dispersif

On définit la phase totale de l'onde par  $\Psi(x, t) = \omega t - kx + \varphi$ . À phase totale égale, les vibrations sont égales. On peut chercher à quelle vitesse, appelée **vitesse de phase**  $v_\varphi$ , se propagent les points de phase égale en cherchant la durée nécessaire pour la vibration en  $M' (x + dx)$  à l'instant  $t + dt$  soit la même qu'en  $M (x)$  à l'instant  $t$  :

\*

$$d\Psi = \Psi(x + dx, t + dt) - \Psi(x, t) = 0 \iff \omega dt - k dx = 0 \implies \frac{dx}{dt} = v_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad (8.12)$$

Dans de nombreux cas, la vitesse de phase est une constante ne dépendant que des caractéristiques du milieu, mais pas de la fréquence de l'onde : on parle de **milieu non dispersif**. On observe ici que  $v_\varphi = c$ .

### III.4 Déphasage

On peut enfin étudier le déphasage entre deux points différents  $x_1$  et  $x_2$ , dû à la propagation, au même instant  $t$ . Avec en chaque point  $x_i$  ( $i = 1, 2$ )  $s(x_i, t) = S_0 \cos(\omega t - kx_i + \varphi_0)$ , le déphasage est donc

$$\Delta\Psi = \Psi(x_2, t) - \Psi(x_1, t) = (\omega t - kx_2 + \varphi_0) - (\omega t - kx_1 + \varphi_0) = k(x_1 - x_2) \quad (8.13)$$

$$= \boxed{2\pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda}} = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{cT} = \boxed{2\pi \frac{\tau}{T}} \quad (8.14)$$

avec  $\tau = \frac{x_1 - x_2}{c}$  le retard temporel entre les deux positions.

On en tire plusieurs conséquences :

- \*
  - deux points en lesquels l'onde est en phase ( $\Delta\varphi_{2/1} = 2n\pi$ ) sont distants d'un multiple entier de  $\lambda$  car  $2n\pi = 2\pi\Delta x/\lambda \iff \Delta x = n\lambda$ ;
  - deux points en opposition de phase ( $\Delta\varphi_{2/1} = (2n + 1)\pi$ ) sont distants de  $(n + \frac{1}{2})\lambda$  avec  $n$  entier.

## IV. Phénomène d'interférence

### IV.1 Interférence entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence

Les phénomènes d'**interférences** en acoustique sont relativement communs et n'ont pas besoin de matériel de laboratoire pour être observés. On va considérer ici la superposition de deux signaux **de même nature** et de même fréquence. On constate alors que ces signaux s'additionnent, mais **l'amplitude résultante dépend de la position**.

#### a) Expérience

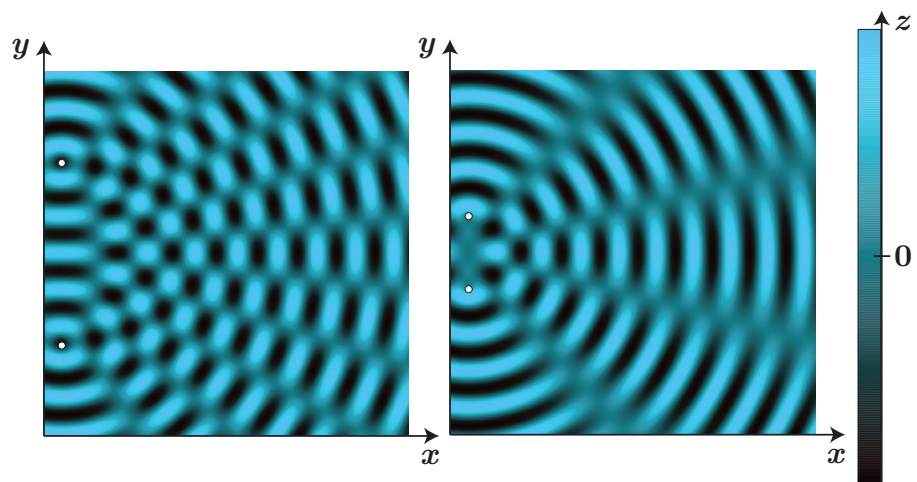
Lançons un caillou à la surface de l'eau : il crée une onde progressive harmonique qui se propage radialement autour du lieu de l'impact. Si on en lance un deuxième non loin, les deux ondes ainsi créées se superposent et forment des motifs bien particuliers, des zones où la surface de l'eau reste constamment immobile, d'autres où la surface oscille.

#### Manipulation

Cuve à onde [http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/0ndes/cuve\\_ondes/interference\\_ondes\\_circulaires.php](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/0ndes/cuve_ondes/interference_ondes_circulaires.php)

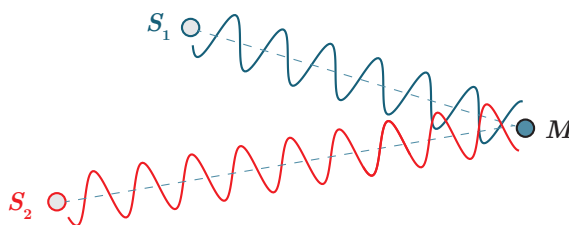
Afin d'étudier un peu plus en détail, on peut se servir d'une cuve à ondes. On a représenté ci-dessous le résultat de l'expérience avec deux sources dont l'éloignement diffère. Plusieurs constatations :

- il y a des zones où il n'y a pas de variation de surfaces au cours du temps alors que chaque signal produit une onde dans tout l'espace : on parle d'**interférences destructives** ;
- ailleurs l'onde résultante possède une amplitude plus importante que pour l'onde issue de chaque source : on parle d'**interférences constructives** ;
- ces zones possèdent une répartition spatiale dépendant de la distance entre les deux sources : ainsi changer les caractéristiques des sources (éloignement ou fréquence) impose des changements sur la figure observée.



### b) Modélisation mathématique

Plaçons-nous dans un cas un peu restrictif mais simplificateur de deux signaux de même amplitude, de même fréquence qui arrivent au même point  $M$  de l'espace. On note  $\varphi_1(M)$  la phase de l'onde 1, et  $\varphi_2(M)$  celle de l'onde 2.



Écrivons la somme des deux signaux :

$$s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi_1(M)) + S_0 \cos(\omega t + \varphi_2(M)) \quad (8.15)$$

\* et servons-nous de  $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$  :

$$s(M, t) = 2S_0 \cos\left(\frac{\varphi_1(M) - \varphi_2(M)}{2}\right) \times \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1(M) + \varphi_2(M)}{2}\right) \quad (8.16)$$

On constate donc :

- \* que la somme de ces deux signaux sinusoïdaux est elle aussi sinusoïdale et de même pulsation ;
- \* que l'amplitude résultante dépend du déphasage entre les deux signaux  $\Delta\varphi_{2/1}(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ , et donc de la position du point  $M$ . L'amplitude vaut  $2S_0 \cos(\Delta\varphi_{2/1}/2)$ .

On peut aller plus loin et discuter des conditions d'interférences constructives ou destructives :

- \* les **interférences sont constructives** si  $|2S_0 \cos(\Delta\varphi_{2/1}/2)|$  est maximal, soit encore :

$$\cos(\Delta\varphi_{2/1}/2) = \pm 1 \iff \Delta\varphi_{2/1}/2 = p\pi, p \in \mathbb{Z} \quad (8.17)$$

donc pour  $\Delta\varphi_{2/1} = 0[2\pi]$  c'est-à-dire pour des signaux en phase ;

- \* les interférences sont destructives si  $|2S_0 \cos(\Delta\varphi_{2/1}/2)|$  est minimal, soit encore

$$\cos(\Delta\varphi_{2/1}/2) = 0 \iff \Delta\varphi_{2/1}/2 = \frac{\pi}{2} + p\pi, p \in \mathbb{Z} \quad (8.18)$$

donc pour  $\Delta\varphi_{2/1} = \pi[2\pi]$ , c'est-à-dire pour des signaux en opposition de phase.

### c) Différence de marche

Terminons le raisonnement en considérant que les signaux sont émis en phase depuis les points sources  $S_1$  et  $S_2$ . Ainsi on peut écrire :

\*  $\varphi_i(M) = -kS_iM \implies \Delta\varphi_{2/1} = k(S_1M - S_2M) = \frac{2\pi}{\lambda}(S_1M - S_2M) \quad (8.19)$

### Propriétés

On introduit  $\delta = S_1M - S_2M$  la **différence de marche**. La différence de phase s'écrit alors

$\Delta\varphi_{2/1} = k\delta = 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$  Selon sa valeur, l'amplitude résultante de la somme de deux signaux

sinusoïdaux synchrones de même amplitude pourra passer par des valeurs diverses dont :

- une amplitude maximale (double de chaque amplitude) lorsque  $\Delta\varphi_{2/1} = 0 [2\pi]$  soit encore lorsque  $\delta$  est un multiple entier de  $\lambda$ , lors d'interférences **constructives**,
- une amplitude minimale nulle lorsque  $\Delta\varphi_{2/1} = \pi [2\pi]$  avec  $\delta$  de la forme  $(n + \frac{1}{2})\lambda$  lors d'interférences **destructives**.

On peut généraliser ce qui vient d'être vu à deux signaux synchrones d'amplitude différente. On remarquera que les conclusions sont inchangées quant aux conditions d'interférences, la seule différence majeure provenant du fait que l'amplitude minimale n'est pas nulle.

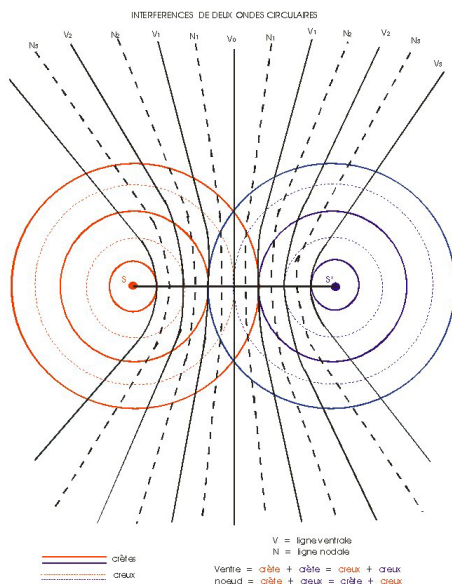
### Exercice

Quelle doit être la distance minimale à appliquer entre deux hauts-parleurs en vis-à-vis alimentés par le même signal sinusoïdal de pulsation  $\omega$  pour obtenir entre eux-ci une interférence constructive? destructive? On calculera la différence de marche en un point quelconque entre les deux hauts-parleurs.

Introduisons un axe  $(Ox)$  où le premier haut-parleur est en  $x = 0$ , le second en  $x = \ell$ . À un point  $x$  quelconque, la différence de marche vaut  $\delta = (\ell - x) - x = \ell - 2x \in [-\ell; \ell]$ . On a donc, quel que soit  $\ell$ , une interférence constructive en  $x = \ell/2$ . Pour avoir des interférences destructives, il faut au minimum que  $\ell = \lambda/2$  (et donc interférences destructives en  $x = 0$  et  $x = \ell$ ).

### d) Application à la cuve à onde

Dans le schéma ci-dessous sont représentés en ligne pleine les lieux des interférences constructives et en pointillées les lieux des interférences destructives dans le cas de la cuve à onde.

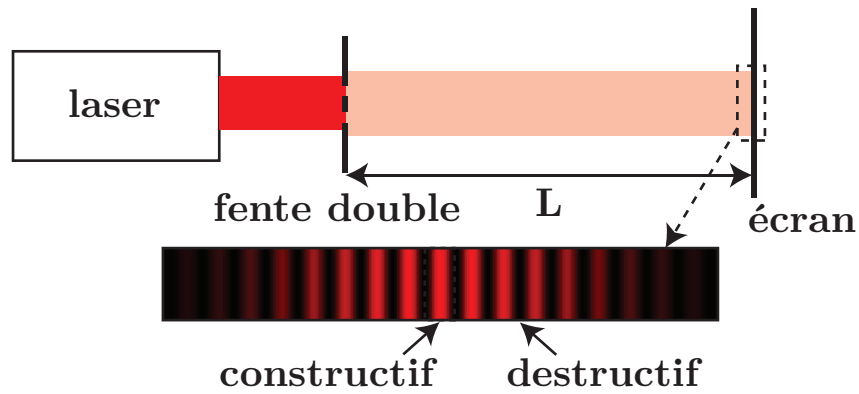


## IV.2 Interférence entre deux ondes lumineuses de même fréquence

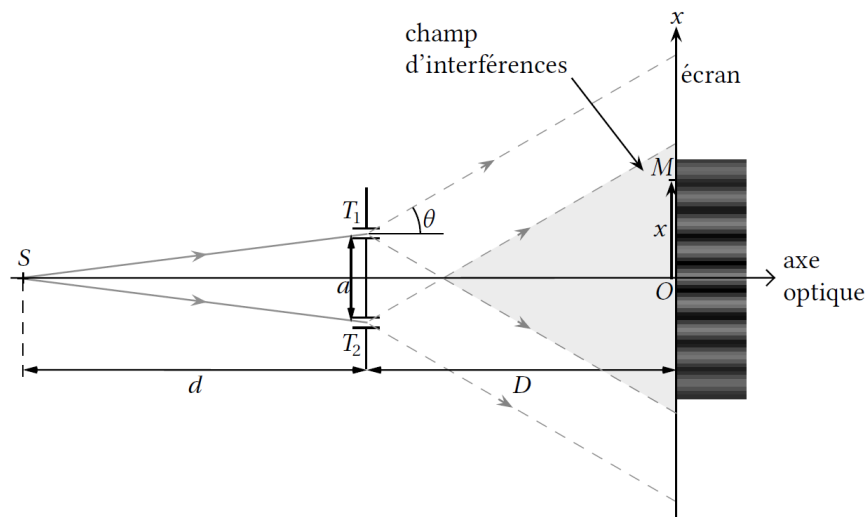
### a) Expérience des trous d'Young

Outre les interférences d'ondes mécaniques à la surface de l'eau, notons que le même phénomène se produit avec des ondes acoustiques de même fréquence, mais également avec la lumière. Prenons l'expérience classique consistant à envoyer un faisceau laser sur deux fentes très proches l'une de l'autre :

Pour une superposition d'ondes de fréquences légèrement décalées on observe le phénomène de battements



- \* On constate sur l'écran loin du dispositif une suite de franges sombres et brillantes, indiquant les lieux d'interférences respectivement destructives et constructives.
- \* En effet, une fois le laser passé dans les deux fentes, ces dernières jouent le rôle de sources de lumière secondaire d'intensité et de déphasage à l'origine identiques. Du fait de la diffraction, chaque source est relativement large. Par conséquent les interférences destructives sont d'amplitude nulles.



## b) Différence de marche

Pour justifier plus quantitativement l'observation expérimentale, en particulier l'alternance régulière entre des franges brillantes et sombres, on va calculer la différence de marche.

### i) Chemin optique

En optique, la différence de marche doit tenir compte du milieu dans lequel l'onde lumineuse se propage. Comme il s'agit de propagation des ondes, on a vu que la vitesse de la lumière dans un milieu dépendait de ce milieu *via* l'indice optique  $v = \frac{c}{n}$ .

#### Définition

Dans un milieu homogène et isotrope d'indice optique  $n$ , les lois de l'optique géométrique indiquent que la lumière se propage en ligne droite. On appelle **chemin optique** entre deux points  $S$  et  $M$  de ce milieu la quantité :

$$(SM) = nSM$$

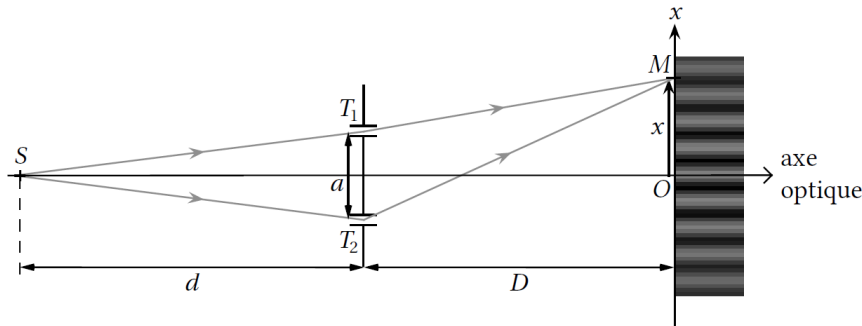
où  $SM$  représente la longueur du segment  $[SM]$ .

- \* Ainsi ici la différence de marche s'écrit-elle  $\delta = [(ST_1) + (T_1M)] - [(ST_2) + (T_2M)] = ST_1 + T_1M - ST_2 - T_2M$  car les indices optiques sont ici ceux de l'air, approximés à 1. Par symétrie,  $ST_1 = ST_2$  comme  $S$  se trouve sur l'axe optique. Il vient donc  $\delta = T_1M - T_2M$ .

On peut ainsi prévoir que les interférences sont constructives là où on ne s'y attendait "pas", au niveau de la projection orthogonale sur l'écran du milieu des deux fentes : la distance entre les deux fentes et ce point est la même par symétrie, donc la différence de marche est nulle et les interférences sont constructives.

### ii) Calcul dans l'approximation paraxiale

On va faire l'hypothèse que  $D \gg x$  et  $D \gg a$ , c'est-à-dire que l'on regarde très loin des sources d'interférence. Ainsi les rayons arrivent avec un petit angle au niveau de l'écran, d'où le nom d'**approximation paraxiale** (similaire aux conditions de Gauss).



On peut ici utiliser le théorème de Pythagore :  $T_1M = \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$  et  $T_2M = \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2}$ . Ainsi, en factorisant par  $D$ , la différence de marche s'écrit :

$$\delta = D \left( \sqrt{1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2} \right) \quad (8.20)$$

L'approximation paraxiale permet de faire une simplification de calcul, car  $\sqrt{1 + \varepsilon} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  pour

$\varepsilon \ll 1$ . Ici  $\frac{x \pm \frac{a}{2}}{D} \ll 1$ , d'où :

$$* \quad \delta \simeq D \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - \frac{a}{2}}{D} \right)^2 \right) - \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x + \frac{a}{2}}{D} \right)^2 \right) \right] \quad (8.21)$$

soit en développant précautionneusement les carrés :

$$\delta \simeq D \left[ \left( 1 + \frac{1}{2D^2} \left( x^2 + \frac{a^2}{4} - ax \right) \right) - \left( 1 + \frac{1}{2D^2} \left( x^2 + \frac{a^2}{4} + ax \right) \right) \right] = \boxed{-\frac{ax}{D}} \quad (8.22)$$

## c) Intensité lumineuse

### i) Formule de Fresnel

Les détecteurs lumineux délivrent un signal proportionnel à l'intensité de l'onde correspondant à la puissance par unité de surface et qui s'exprime en  $\text{W m}^{-2}$ . À la différence des ondes mécaniques, les ondes lumineuses ont des fréquences très importantes ( $10^{15}$  Hz). Les détecteurs les plus rapides ont des temps de réponse de l'ordre de  $10^{-12}$  s et sont donc beaucoup trop lents pour suivre les oscillations temporelles de l'onde lumineuse. Il s'en suit que les détecteurs d'ondes lumineuses ne sont sensibles qu'à l'intensité moyenne  $I$  de l'onde, elle-même proportionnelle à la moyenne du carré du champ électromagnétique portant le signal.

C'est donc à cette quantité qu'il faut s'intéresser pour décrire une expérience d'interférences lumineuses.

#### Propriété

L'intensité  $I$  en un point  $M$  de l'onde lumineuse résultant de la superposition de deux ondes

d'intensité  $I_1$  et  $I_2$  est donnée par la **formule de Fresnel** :

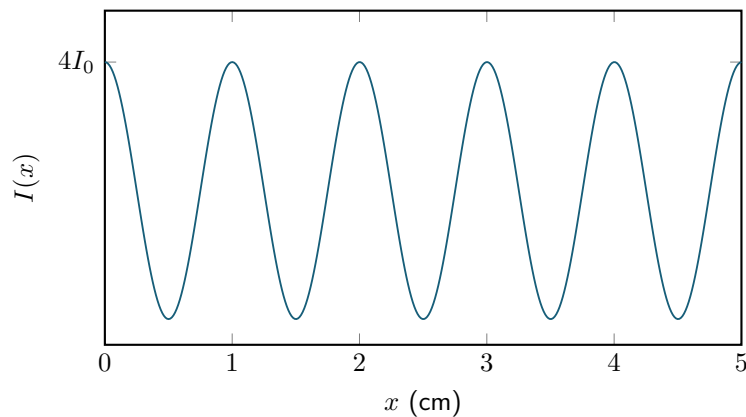
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right)$$

où  $\delta$  est la différence de marche entre les deux ondes lumineuses qui se superposent.

En appliquant cette propriété à la situation physique des fentes d'Young, où les sources secondaires sont de même intensité  $I_0$  :

\* 
$$I(x) = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}\right) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}\right)\right) \quad (8.23)$$

L'intensité lumineuse évolue donc sinusoidalement selon l'axe ( $Ox$ ) de l'écran, expliquant l'alternance de franges brillantes et sombres.



### ii) Interfrange

On peut chercher à caractériser la figure d'interférence, par l'**interfrange**, correspondant à la distance entre deux franges brillantes successives (ou deux franges sombres successives). Les franges brillantes correspondent à un maximum d'intensité, obtenu pour  $x$  vérifiant :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}\right) = 1 \iff \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax_n}{D} = 2n\pi \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \iff x_n = n \frac{\lambda D}{a} \quad (8.24)$$

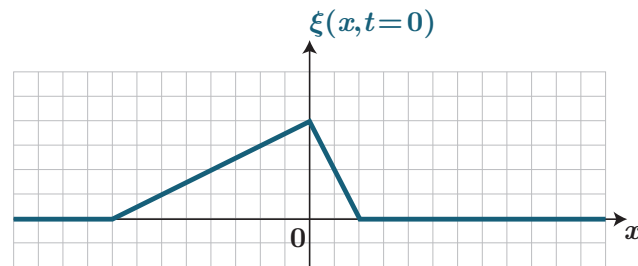
\* Ainsi l'interfrange  $i$  est défini comme  $i = x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda D}{a}$  (interprété comme la période du signal  $I(x)$  également).

Par exemple avec  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $a = 50 \mu\text{m}$  et  $D = 1,0 \text{ m}$ ,  $i = 1,0 \text{ cm}$ .

Une telle expérience d'interférence permet donc de déterminer  $\lambda$  ou  $a$  en mesurant avec précision l'interfrange.

## 8.1 Onde sur une corde d'escalade

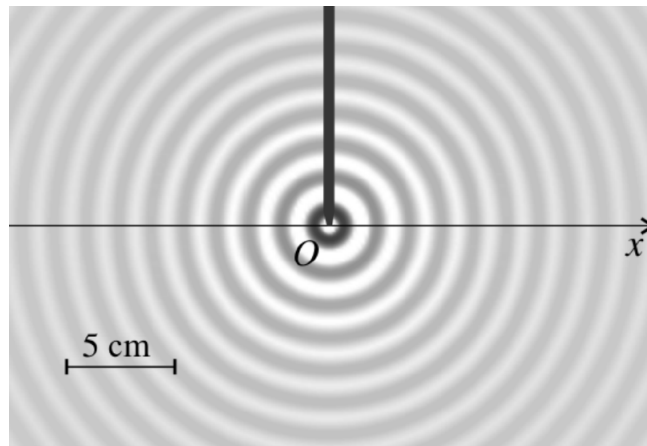
Une onde est générée sur une longue corde d'escalade tendue. On suppose qu'elle se propage de la gauche vers la droite, sans déformation, à la célérité  $c = 50 \text{ cm s}^{-1}$ . La figure ci-dessous représente schématiquement l'allure d'une photo de la corde prise à un instant que nous prendrons comme origine des temps  $t = 0$ . Une graduation d'abscisse représente 10 cm alors qu'une graduation d'ordonnée représente 1 cm.



1. Représenter l'allure du profil de la corde 1 s après la prise de la photo.
2. Représenter l'allure du chronogramme de l'ébranlement  $\xi(x = x_A, t)$  au point  $A$  d'abscisse  $x_A = 40 \text{ cm}$ . Même question au point  $B$  d'abscisse  $x_B = -40 \text{ cm}$ .

- 1) On est toujours sur une représentation spatiale, à un temps différent.
- 2) On passe à une représentation temporelle, donc l'abscisse est le temps. Ne pas oublier l'inversion de la courbe verticale.

## 8.2 Cuve à onde



La figure ci-avant représente la surface d'une cuve à ondes éclairée en éclairage stroboscopique. L'onde est générée par un vibreur de fréquence  $f = 20 \text{ Hz}$ . L'image est claire là où la surface de l'eau est convexe (bosse), et foncée là où elle est concave (creux). Ainsi le niveau de gris indique la hauteur d'eau dans la cuve.

1. En mesurant sur la figure, déterminer la longueur d'onde.
2. En déduire la célérité des ondes à la surface de l'eau.
3. Supposons l'onde harmonique, d'amplitude  $H$ . Donner une expression mathématique pour la hauteur  $h(x, t)$ . On distinguera les cas  $x < 0$  et  $x > 0$ .
4. Expliquer pourquoi l'amplitude  $H$  n'est en fait pas constante.

1. On observe sur la figure la propagation radiale d'une onde issue de  $O$ . Le vibreur se déplaçant périodiquement, il crée une onde dont l'étendue spatiale est reliée à la longueur d'onde  $\lambda$  : cela correspond à la distance entre deux motifs (entre deux creux, ou deux bosses par exemple). Afin d'obtenir  $\lambda$ , on mesure la distance entre le **maximum de motifs**, afin de diminuer l'incertitude de pointé. Soit après conversion à l'aide de l'échelle :

$$8\lambda = 12,0 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 1,5 \text{ cm}$$

2. Ainsi, avec la relation  $\lambda = cT = \frac{c}{f}$ , on obtient  $c = \lambda f = 30 \text{ m s}^{-1}$ .
3. On reconnaît ici le cas de la propagation d'une onde progressive harmonique. Il faut distinguer le cas des  $x$  positifs, où la propagation s'effectue dans le sens  $+\vec{e}_x$ , soit  $h(x, t) = H \cos(\omega t - kx)$  avec  $\omega = 2\pi f$  et  $k = \frac{\omega}{c}$ . Si  $x < 0$ , l'onde se propage dans le sens des  $x$  décroissants, on écrit donc mathématiquement  $h(x, t) = H \cos(\omega t + kx)$ . D'où :

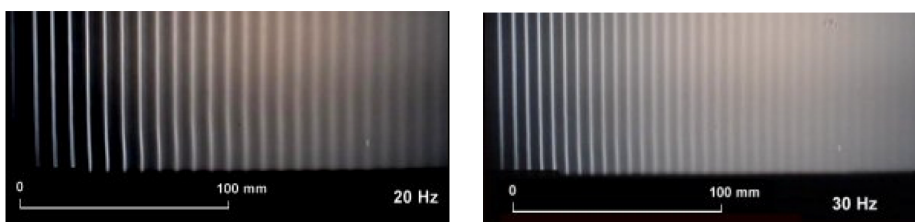
$$h(x, t) = H \cos(\omega t - k|x|)$$

4. En réalité, du fait de la dissipation des ondes à la surface de l'eau, l'amplitude décroît à mesure que l'on s'éloigne de la source.

- 1) Mesurer plusieurs longueurs d'onde !

### 8.3 Caractère dispersif de la cuve à onde

À l'aide d'une baguette accrochée à un pot vibrant, on réalise des ondes bidimensionnelles dans une cuve à onde remplie par 5 cm d'eau. À l'aide des deux photographies, montrer que la cuve est un milieu dispersif.



Que veut dire dispersif ? Que la célérité dépend de la fréquence. Il faut donc mesurer la célérité dans les deux cas.

### 8.4 Houle

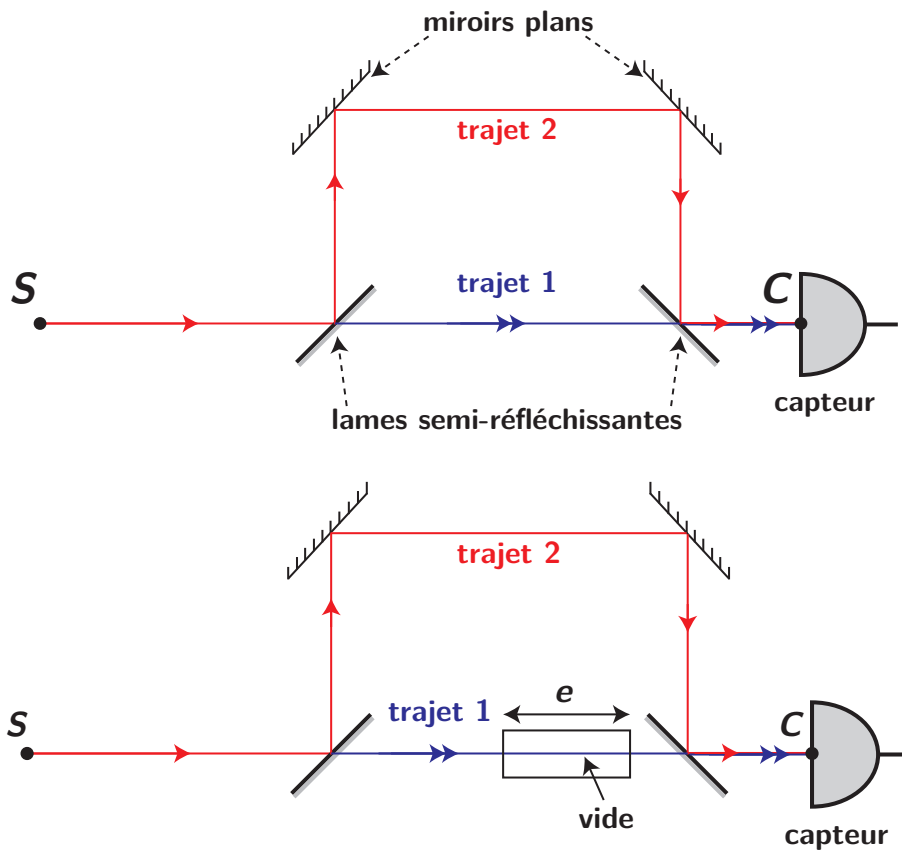
La houle se traduit en surface par une onde progressive sinusoïdale à la surface libre du fluide. Un observateur sur un bateau amarré en  $x = 0$  mesure la période d'oscillation du bateau sous l'effet de la houle, il trouve  $T = 15 \text{ s}$ . La célérité des ondes de surface est  $c = 9,2 \text{ m s}^{-1}$ , et les ondes se déplacent dans le sens des  $x$  croissants.

1. Déterminer la longueur d'onde de la houle.
2. Déterminer la forme mathématique de cette onde  $h(x, t)$  (on notera  $H$  l'amplitude de l'oscillation et on prendra le bateau comme référence de phase).
3. Une bouée est située à  $d = 104 \text{ m}$ , dans la direction de propagation de la houle. Déterminer littéralement et numériquement le déphasage entre l'oscillation du bateau et celle de la bouée. Représenter, en respectant les proportions, la situation à un instant donné, puis une demi-période après.
4. Tracer sur un autre graphe l'allure de l'altitude de l'eau au niveau du bateau et au niveau de la bouée, en fonction du temps.

### 8.5 Mesure de l'indice de l'air

Un faisceau LASER de longueur d'onde  $\lambda = 600,000 \text{ nm}$  éclaire une lame semi-réfléchissante et sépare le faisceau en deux. La partie du faisceau transmise à travers la lame va directement sur un capteur d'intensité lumineuse. La seconde partie est déviée et guidée par deux miroirs avant d'arriver sur le capteur. L'ensemble de l'expérience est réalisée dans l'air.

1. On constate que dans la situation ci-dessus, le capteur perçoit un maximum d'intensité. Que peut-on en conclure sur le lien entre les longueurs  $(SC)_1$  (par le trajet 1) et  $(SC)_2$  (par le trajet 2) ?



2. Le système étant initialement dans la situation décrite à la question précédente, on place alors un dispositif nommé cellule à vide sur le trajet 1. Une cellule à vide est un cellule hermétique en matériau transparent (dont on négligera l'épaisseur dans la suite) enfermant de l'air dont on peut faire varier la pression, jusqu'au vide. En partant d'une situation où la cellule est remplie d'air, on fait progressivement le vide dans la cellule d'épaisseur  $e$ . Expliquer sommairement mais précisément pourquoi l'intensité reçue par le capteur va être modifiée.

3. Au début de l'expérience, la cellule est remplie d'air et le capteur perçoit un maximum d'intensité. A partir de cette situation, on réalise progressivement le vide dans la cellule et on relève l'intensité délivrée par le capteur. On obtient une courbe donnant l'intensité en fonction du temps oscillante et comportant exactement 50 maxima d'intensité - sans compter le premier observé au début - entre le début (air dans la cellule) et la fin de l'expérience (vide dans la cellule). Pour l'expérience choisie, la longueur de la cellule à vide est de  $e = 11,0 \text{ cm}$ .

En déduire l'expression littérale de  $n_{air}$  en fonction de  $\lambda$  et  $e$ , puis la valeur numérique de  $n_{air} - 1$ . On donnera le résultat avec 2 chiffres significatifs.

4. On admet que l'incertitude-type sur  $e$  et celle sur  $n_{air}$  sont liées par la relation  $u(n_{air}) = (n_{air} - 1) \frac{u(e)}{e}$  (en négligeant l'incertitude sur  $\lambda$ ). Trouver alors la valeur de  $n_{air}$  avec son incertitude sachant que l'on a mesuré la longueur de  $e$  avec une règle graduée au millimètre.

▪ 3) Les 50 maxima successifs se traduisent par une différence de différence de marche de  $50\lambda$ .

1. Lorsque le capteur perçoit une intensité maximale, cela signifie que les deux ondes arrivent en phase. Cela implique que la différence de marche est un multiple de  $\lambda$  :

$$(SC_2) = (SC_1) + p\lambda \text{ avec } p \in \mathbb{Z}$$

2. Si on commence à faire le vide dans la cellule, la longueur  $(SC_2)$  reste identique, mais  $(SC_1)$  est modifiée à cause de la modification de l'indice traversé par la lumière dans la cellule. Les ondes n'arrivent alors plus nécessairement en

phase sur le capteur, ce qui implique une modification de l'intensité relevée, la superposition des deux ondes n'étant plus nécessairement constructive.

3. Lorsque l'on fait le vide, la longueur de  $(SC_1)$  diminue de  $n_{air}e - e$ . Comme on voit passer 50 maxima de lumière, on en déduit qu'entre le début et la fin de l'expérience, les ondes ont été 50 fois en phase (sans compter le début). Ainsi,  $(SC_1)$  a varié de  $50\lambda$ .

$$(n_{air} - 1)e = 50\lambda$$

$$n_{air} = 1 + 50 \frac{\lambda}{e}$$

Application numérique :

$$(n_{air} - 1) = \frac{50 \times 6 \cdot 10^{-7}}{11 \cdot 10^{-2}} = 2,7 \cdot 10^{-4}$$

4.  $e$  étant mesuré avec une règle graduée, on peut dire que  $u(e) = \frac{0,5}{\sqrt{3}} = 0,29$  mm

Application numérique :

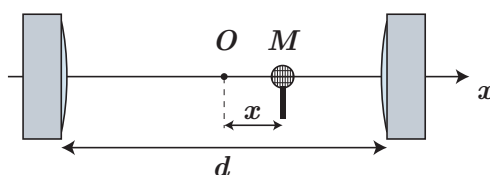
$$u(n_{air}) = (n_{air} - 1) \frac{u(e)}{e} = 2,7 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{0,29}{110} = 7,1 \cdot 10^{-7}$$

Finalement :

$$n_{air} = 1,0002700 \pm 0,0000071$$

L'écriture la plus pertinente reste celle de  $n_{air} - 1 = (2,7000 \pm 0,0071) \times 10^{-4}$

## 8.6 Interférences sonores



Deux petits haut-parleurs sont disposés à une distance  $d = 1$  m l'un de l'autre le long d'un axe  $Ox$ , symétriquement par rapport au point  $O$ . On place également sur cet axe un micro au point  $M$  d'abscisse  $x$ , entre les deux haut-parleurs que l'on alimente avec un même signal sinusoïdal de fréquence  $f = 500$  Hz. On visualise la tension délivrée par le micro après l'avoir amplifiée.

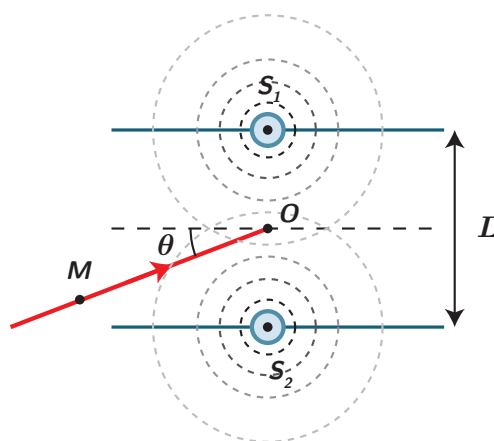
1. Quelle est la nature des interférences au point  $O$  ?
2. Exprimer la position des maxima et des minima d'intensité le long de l'axe  $Ox$  en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ .
3. Lorsqu'on déplace le micro le long de l'axe en partant du point  $O$ , l'amplitude du signal commence par décroître, puis elle augmente avant de passer par un maximum en  $x_1 = 341$  mm. Interpréter cette observation et en déduire la vitesse du son dans l'air à la température de l'expérience.
4. On constate qu'entre le point  $O$  et le premier maxima sur l'axe, l'amplitude du signal ne prend pas la même valeur. On fait l'hypothèse que l'amplitude de l'onde sonore décroît avec la distance à la source selon une loi en  $A(r) = \frac{k}{r}$ , où  $k$  est une constante et  $r$  la distance entre la source et le point considéré. Déterminer le rapport entre l'amplitude  $A_1$  du signal total au premier maxima décentré et celle  $A_0$  du point central. Cette variation est-elle perceptible ?

- 4) Exprimer l'amplitude totale lors d'interférences constructives sachant qu'il s'agit de la somme des amplitudes des deux ondes.

## 8.7 Au secours, j'ai raté la piste ! ★

(d'après Olympiades Internationales de Physique 2005)

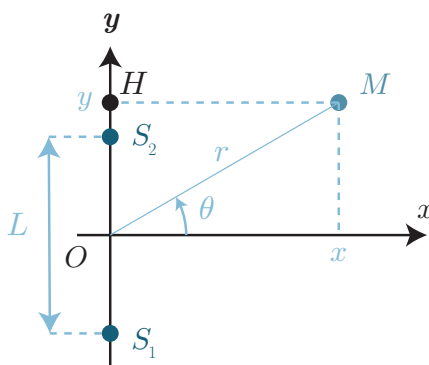
Sur une piste d'atterrissage, deux antennes de guidage sont séparées de  $L = 100$  m. Elles émettent deux signaux radio de même intensité  $I_0$ , en phase, de fréquence  $f_0 = 12$  MHz. Un avion se dirige vers la piste avec une vitesse  $v$  et vise le milieu des deux antennes en faisant un angle  $\theta$  avec la piste.



1. Montrer que la différence de marche entre les deux sources, pour un point M quelconque repéré par l'angle  $\theta$  et la distance  $r \gg L$  du point O, s'écrit  $\delta \simeq -L \sin \theta$ . On calculera d'abord  $S_2M^2 - S_1M^2 = \delta(S_1M + S_2M)$ .
2. En déduire alors l'intensité du signal combiné des deux antennes, reçue par l'avion, pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Pour quel angle minimal l'avion ne reçoit-il aucun signal ?
3. L'avion fait une erreur de trajectoire : il se dirige vers l'une des deux antennes et non vers le milieu de la piste, avec  $\theta = 0$ . L'intensité du signal reçu commence à diminuer. À quelle distance de l'antenne la plus proche se trouve-t-il quand l'intensité est minimale ?
4. L'avion produit un signal de référence à 12 MHz qui est en permanence comparé au signal reçu par l'antenne visée.
  - (a) On rappelle que par effet Doppler, la fréquence de l'onde reçue par un objet lorsque l'émetteur est en mouvement à la vitesse  $v$  est  $f' = f_0 \left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$  où  $f_0$  est la fréquence de l'onde émise, et  $c$  la célérité de l'onde dans le milieu. Quel signe choisir dans l'expression de  $f'$  dans la situation étudiée ? Justifier.
  - (b) Exprimer la fréquence  $\Delta f$  entre le signal de référence et le signal reçu par l'avion.
  - (c) On mesure  $|\Delta f| = 10$  Hz, déterminer la vitesse de l'avion.

1) Faire une approximation comme  $r \gg L$  :  $S_1M + S_2M \simeq 2OM = 2r$ .

1. Calculons d'abord  $S_2M^2 - S_1M^2$  comme précisé dans l'énoncé. On introduit le point H comme le projeté orthogonal de M sur la droite  $(S_1S_2)$ , et on réalise un schéma (important !):



Grâce au théorème de Pythagore dans les triangles  $S_2HM$  et  $S_1HM$ , et avec  $y = r \sin \theta = OH$  :

$$S_2M^2 - S_1M^2 = (S_2H^2 + HM^2) - (S_1H^2 + HM^2) \quad (8.25)$$

$$= S_2H^2 - S_1H^2 \quad (8.26)$$

$$= (OH - S_2O)^2 - (OH + S_1O)^2 \quad (8.27)$$

$$= \left(\frac{L}{2} - r \sin(\theta)\right)^2 - \left(\frac{L}{2} + r \sin(\theta)\right)^2 \quad (8.28)$$

$$= -2rL \sin(\theta) \quad (8.29)$$

Or,  $S_2M^2 - S_1M^2 = (S_2M - S_1M)(S_2M + S_1M) = \delta(S_1M + S_2M) \simeq 2r\delta$  car quand  $r \gg d$ ,  $S_1M$  et  $S_2M$  sont proches de  $r$ . Il vient

$$\delta = -L \sin(\theta) \quad (8.30)$$

2. Pour  $\theta = 0$ , l'interférence est constructive et l'intensité résultante est la somme des intensités des deux sources :  $2I_0$ . Pour  $\theta = \pi/2$ ,  $\delta = -L$ . Or  $\lambda = c/f = (3 \cdot 10^8)/(12 \cdot 10^6) = 25$  m. Donc  $\delta = -4\lambda$  et l'interférence est aussi constructive. Pour que l'interférence soit destructive, il faut au minimum que  $\delta = \pm\lambda/2$  soit  $\sin(\theta) = \pm\lambda/(2L) = \pm 0,125$  c'est-à-dire

$$\theta = \pm 7,2^\circ \quad (8.31)$$

3. En considérant que l'avion vise  $S_1$ , la nouvelle différence de marche vaut  $\delta = \sqrt{d^2 + L^2} - d$  avec  $d$  la distance entre l'avion et l'antenne visée. Il y a des interférences destructives si  $\delta = \lambda/2$ .  $d$  s'obtient alors en résolvant

$$\delta = \frac{\lambda}{2} = \sqrt{d^2 + L^2} - d \iff \frac{\lambda}{2} + d = \sqrt{d^2 + L^2} \iff \left(\frac{\lambda}{2} + d\right)^2 = d^2 + L^2 \quad (8.32)$$

soit en développant :

$$\frac{\lambda^2}{4} + \lambda d + d^2 = d^2 + L^2 \quad (8.33)$$

ce qui mène à

$$d = \frac{L^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} = 394 \text{ m} \quad (8.34)$$

4. Notons  $(Ox)$  l'axe suivant lequel l'avion se dirige. Sur cet axe, le signal émis par une antenne a pour forme

$$s(x, t) = S_0 \cos(2\pi ft - kx + \varphi_0) \quad (8.35)$$

L'avion ayant pour équation de position quelque chose du type  $x_{\text{avion}}(t) = \pm vt$  (avec  $v$  la norme de sa vitesse, on peut ajouter une constante pour plus de généralité) selon qu'il s'approche des sources ou qu'il s'éloigne, il reçoit ainsi le signal :

$$s(x_{\text{avion}}(t), t) = S_0 \cos(2\pi ft \pm kvt + \varphi_0) \quad (8.36)$$

$$= S_0 \cos\left(2\pi\left(f \pm \frac{v}{\lambda}\right)t + \varphi_0\right) \quad (8.37)$$

$$= S_0 \cos\left(2\pi f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)t + \varphi_0\right) \quad (8.38)$$

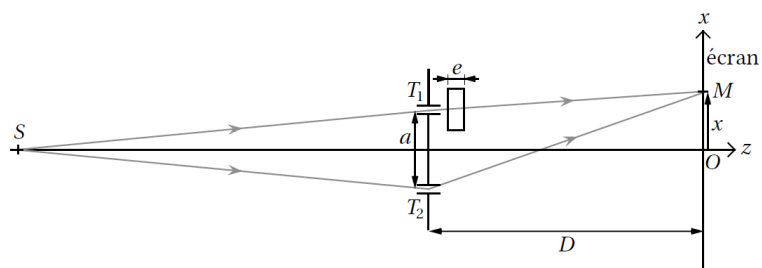
soit une fréquence

$$f' = f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \quad (8.39)$$

$f'$  est plus aiguë que  $f$  lorsque l'avion se rapproche, et plus grave lorsqu'il s'éloigne de la source : c'est l'effet Doppler.

## 8.8 Mesure de l'épaisseur d'une lame de verre

On considère un dispositif de trous de Young composé de deux trous  $T_1$  et  $T_2$  séparés d'une distance  $a = 100 \mu\text{m}$ . Ce dispositif est éclairé par une source ponctuelle  $S$  monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 532 \text{ nm}$  située sur l'axe optique. La figure d'interférence est observée sur un écran situé à une distance  $D = 1,00 \text{ m}$  du plan des trous. Une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur  $e$  inconnue et d'indice  $n_v = 1,57$  est positionnée en sortie du trou  $T_1$ . L'indice optique de l'air est supposé égal à 1.



Dans toute la suite, on se place dans l'approximation paraxiale  $x, a \ll D$  et on suppose que  $e \ll D$  si bien qu'en première approximation, on considère que le rayon lumineux traverse la lame perpendiculairement à ses faces.

1. Montrer que la différence de marche  $\delta$  en un point  $M$  de l'écran s'écrit  $\delta = \frac{ax}{D} - (n_v - 1)e$ .
2. Déterminer la position  $x_c$  sur l'écran de la frange centrale correspondant à  $\delta = 0$ . De quelle distance s'est déplacée cette frange par rapport au cas où la lame est absente? Exprimer l'épaisseur  $e$  de la lame en fonction de  $x_c$ ,  $a$ ,  $n_v$  et  $D$ .
3. Calculer  $e$  pour  $x_c = 28,5$  cm.
4. Expliquer pourquoi en réalité la position de la frange centrale ne peut être connue que modulo l'interfrange  $i$ . Qu'est-ce que cela implique sur  $e$ ? L'expérience vous paraît-elle réalisable?