–M4–

Mouvements de particules chargées

Questions de cours :

- Force de Lorentz : expression, puissance associée, conséquences. Comparaison avec le poids.
- Réalisation d'un champ électrique uniforme : principe, potentiel électrique en fonction de la position, lien entre la norme du champ E et la différence de potentiel U. Ordre de grandeur.
- Mouvement dans un champ électrique uniforme : type de trajectoire, expression de la norme de la vitesse atteinte par un électron placé entre deux plaques parallèles reliées à un générateur de tension U.
- Le cyclotron : principe, mouvement d'une particule dans un champ magnétique orthogonal au vecteur vitesse initial, pulsation cyclotron, applications.

Capacités exigibles du BO :

- Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
- Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
- Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant.
- Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
- Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.

Expériences :

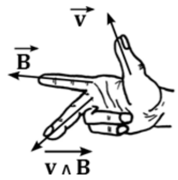
- Déviation d'électrons dans le canon à vide

On va étudier dans ce chapitre l'influence des champs électriques et magnétiques uniformes (indépendants de l'espace) et stationnaires (indépendant du temps). Ce sera en particulier l'occasion d'étudier quelques systèmes réels ayant de nombreuses applications en physique moderne, tout en ne s'attachant pas ici à la façon de créer ces champs électriques et magnétiques.

I. Effets des champs électromagnétiques sur les particules chargées

I.1 Force de Lorentz

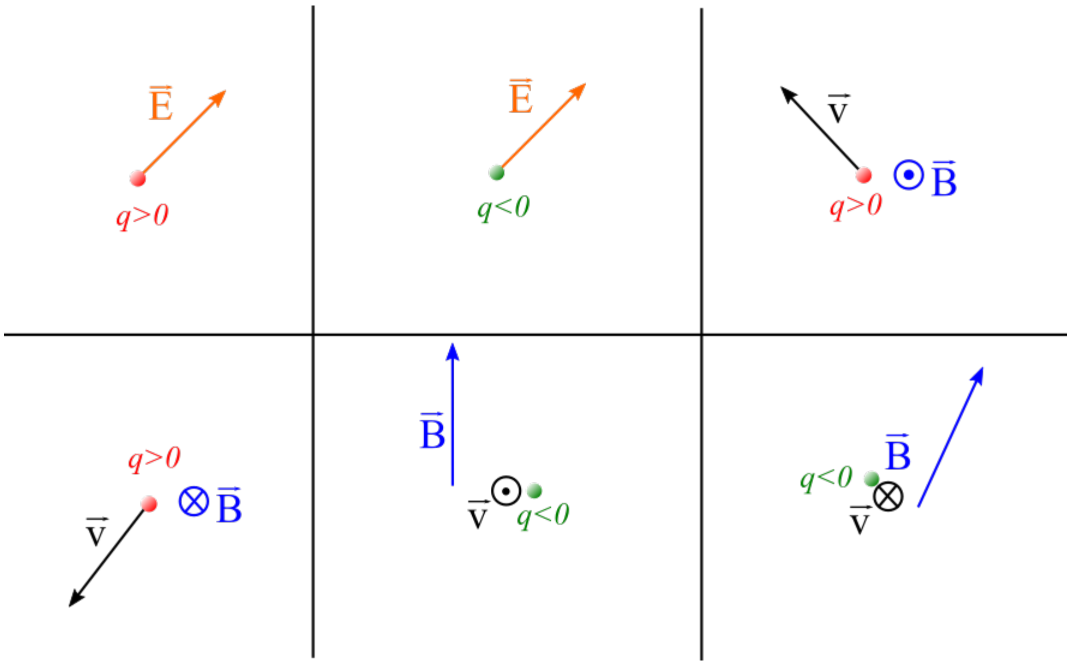
Lorsqu'une particule chargée de charge q et de masse m (par exemple un proton, un électron, mais aussi de grosses molécules ionisées), se déplace dans une zone de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$, elle subit une force appelée **force de Lorentz** :



Cette force est valable même si les champs dépendent du temps ou des coordonnées spatiales.

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{L}} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})} \tag{4.1}$$

décomposable en deux forces, l'une électrique $q\vec{E}$ et l'autre magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Exemples : représenter qualitativement la force électrique ou magnétique dans chacun des cas suivants :



I.2 Ordres de grandeurs

a) Ordres de grandeur des champs

On peut évoquer les ordres de grandeurs usuels des champs électriques et magnétiques d'unité respectives le $\mathrm{V\,m^{-1}}$ et le tesla (symbole T)

Un tel champ électrique permet la conduction électrique dans l'air, normalement isolant, mais un tel champ le fait devenir conducteur, l'air peut alors s'ioniser et faire apparaître un éclair.

- les champs électriques ont une norme variant de quelques $10\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ au sein d'un tube fluorescent, en passant par $10^3\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ dans certains appareils de laboratoire, et jusqu'à $10^6\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ pour le champ disruptif de l'air ;
- pour les champs magnétiques, on peut citer le champ terrestre de l'ordre de $5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$, des aimants de 0,1 T à 1 T jusqu'aux électroaimants supraconducteurs avec $B \sim 10\,\mathrm{T}$ (appareils à IRM).

b) Ordres de grandeur des forces

Avant d'établir l'ensemble des équations du mouvement, il est important de vérifier qu'une ou plusieurs forces ne sont pas négligeables devant une autre.

i) Effet de la pesanteur

La comparaison entre la force de Lorentz et le poids est sans appel : si on considère une particule massive telle que le proton, les deux forces sont de même norme si

$$\frac{m_p g}{qE} \sim 1 \Rightarrow E \sim \frac{m_\mathrm{p} g}{q} \sim 10^{-7}\,\mathrm{V\,m^{-1}} \tag{4.2}$$

* le **poids est donc largement négligeable devant la force électrique** dès qu'il y a un champ électrique présent. Concernant la force magnétique, un raisonnement similaire peut être conduit : il faut que $qvB \sim mg$ pour $vB \sim 10^{-7}\,\mathrm{N\,C^{-1}}$ (soit par exemple avec le champ magnétique terrestre, $B \sim 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$, il faut que $v \sim 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$).

ii) Comparaison entre les composantes de la force de Lorentz

On peut par exemple comparer les deux composantes de la force de Lorentz, en supposant $E \sim 10^6\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ et $B \sim 1\,\mathrm{T}$: on peut négliger la composante électrique à condition que :

$$\left\|\vec{v} \wedge \vec{B}\right\| \ll \left\|\vec{E}\right\| \Rightarrow vB \ll E \Rightarrow v \ll \frac{E}{B} \sim 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{4.3}$$

Ainsi en dessous de cette vitesse, le champ électrique est le plus adapté pour agir sur l'électron, tandis qu'au-delà le champ magnétique peut être plus efficace.

À retenir

*
- On peut quasiment toujours négliger le poids devant la force de Lorentz ;
- parfois il est envisageable de négliger une des deux composantes de la force de Lorentz, cela dépend des vitesses et des champs considérés.

I.3 Puissance de la force de Lorentz

* Calculons la puissance de cette force :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_\mathrm{L}) = q\vec{E} \cdot \vec{v} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} \tag{4.4}$$

Or si on applique le théorème de la puissance cinétique à une particule chargée, en négligeant l'effet du poids : $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F}_\mathrm{L})$. Par conséquent :

- la composante magnétique est, de par sa définition, orthogonale à la vitesse et donc à la trajectoire : cette force est associée à une puissance nulle et ne travaille pas (tout comme la tension du fil ou la réaction normale du support). Donc l'énergie cinétique est constante : **seule la direction de la particule pourra éventuellement changer, sans apport énergétique**.
- la composante électrique peut quant à elle délivrer de la puissance à une particule chargée : elle va agir à la fois sur la norme et la direction du vecteur vitesse, car l'énergie cinétique va varier.

À retenir

* La force électrique permet d'accélérer, freiner, modifier la trajectoire d'une particule chargée, alors que la force magnétique ne peut que la dévier de sa trajectoire initiale, sans changer la norme de sa vitesse.

II. Mouvement dans un champ électrique uniforme

On considère dans toute la suite uniquement la présence d'un champ électrique, <u>uniforme</u> dans l'espace, de direction constante $\vec{E} = E\vec{e_x}$.

II.1 Champ électrique et tension

a) Énergie potentielle et potentiel électrique

Par définition, le potentiel électrique V (rencontré en électricité) est relié à l'énergie potentielle électrique par :

$$\boxed{E_p = qV + \mathrm{cste}} \tag{4.5}$$

Ainsi le travail de la force électrique s'écrit $W_{A\to B}(\vec{F}_e) = E_\mathrm{p}(A) - E_\mathrm{p}(B) = q(V_A - V_B) = qU_{AB}$ avec U_{AB} la tension qui s'applique entre les points A et B.

b) Sens du champ électrique et tension

Propriété

En tout point de l'espace, le champ électrique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

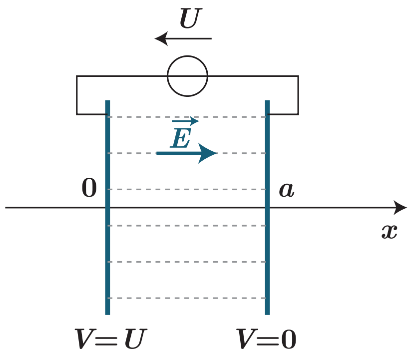
Exercice

Justifier cette affirmation au regard des deux expressions possibles du travail de la force électrique.

Le travail de la force électrique s'écrit aussi $W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = q\vec{E}\cdot\overrightarrow{AB} = qU_{AB}$. Ainsi $\vec{E}\cdot\overrightarrow{AB} = U_{AB}$, et si $U_{AB} > 0$, soit $V_A > V_B$, cela signifie que $\vec{E}$ est dans le sens $A \to B$, donc des potentiels décroissants.

c) Réalisation d'un champ électrique uniforme

Décrivons un moyen simple pour réaliser en pratique un tel champ électrique uniforme, utilisé par Millikan pour mesurer la charge électrique élémentaire. En branchant à un générateur de tension continue de fém importante U (dépassant souvent le kV) deux plaques métalliques planes et perpendiculaires à l'axe (Ox), distantes de a, on constate que le champ électrique est quasi-uniforme entre les plaques, dans le sens des potentiels décroissants. Il s'agit tout simplement d'un condensateur plan.



Démonstration

Déterminons l'expression du potentiel électrique en fonction de la position x, de la norme E du champ $\vec{E} = E\vec{e_x}$ et d'une constante.

Connaissant le champ électrique, on peut démontrer facilement l'expression de l'énergie potentielle et donc du potentiel électrique : le travail élémentaire s'écrit

$$\delta W(\vec{F}) = q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = qE\mathrm{d}x = -\mathrm{d}E_p \tag{4.6}$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -qE = q\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \quad\Rightarrow\quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -E \quad\Rightarrow\quad V(x) = -Ex + \mathrm{A} \tag{4.7}$$

On peut ainsi utiliser les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = a$: $V(0) = U = A$ et $V(a) = 0 = -Ea + U$, donc $U = Ea$.

À retenir

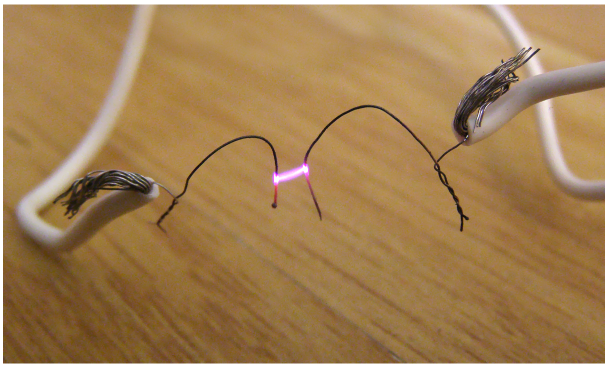
Le champ électrique créé entre deux plaques soumises à une tension U et distantes de a est dirigé **dans le sens des potentiels décroissants** et est de norme

$$\boxed{E = \frac{U}{a}}$$

Cela justifie d'ailleurs facilement l'unité du champ électrique : le $\mathrm{V\,m^{-1}}$.

Odg : $U \sim 1000\,\mathrm{V}$, $a \sim 1\,\mathrm{cm}$ donne $E \sim 10^5\,\mathrm{V\,m^{-1}}$.

Lorsque deux pièces métalliques avec une différence de potentiel fixée sont approchées l'une de l'autre, le champ $\vec{E}$ devient de plus en plus intense. Au delà d'une certaine valeur, le champ devient suffisant pour arracher des électrons aux molécules d'air : on obtient un arc électrique.



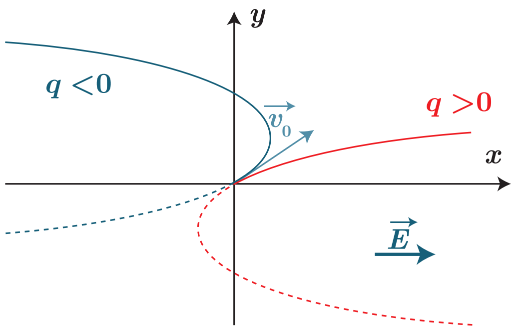
II.2 Trajectoire d'une particule chargée soumise à un champ électrique

Étudions ainsi ce qu'il se passe lorsqu'une particule chargée de charge q et de masse m est soumise à un tel champ. On étudie son mouvement dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le bilan des forces contient le poids, que l'on néglige devant la force de Lorentz électrique. Initialement la particule possède une vitesse $\vec{v}_0$ contenue dans le plan (xOy).

L'application de la LQM conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = q\vec{E} \Longleftrightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \qquad (4.8)$$

On a un **mouvement à vecteur accélération constant**, à l'instar d'une chute libre dans le plan (xOy) (plan contenant la vitesse initiale et le vecteur accélération), et donc une trajectoire parabolique ou rectiligne. Le sens de la trajectoire dépend par contre du signe de q : si q est positif, la particule est dirigée vers le champ électrique, sinon dans le sens opposé comme illustré ci-dessous :



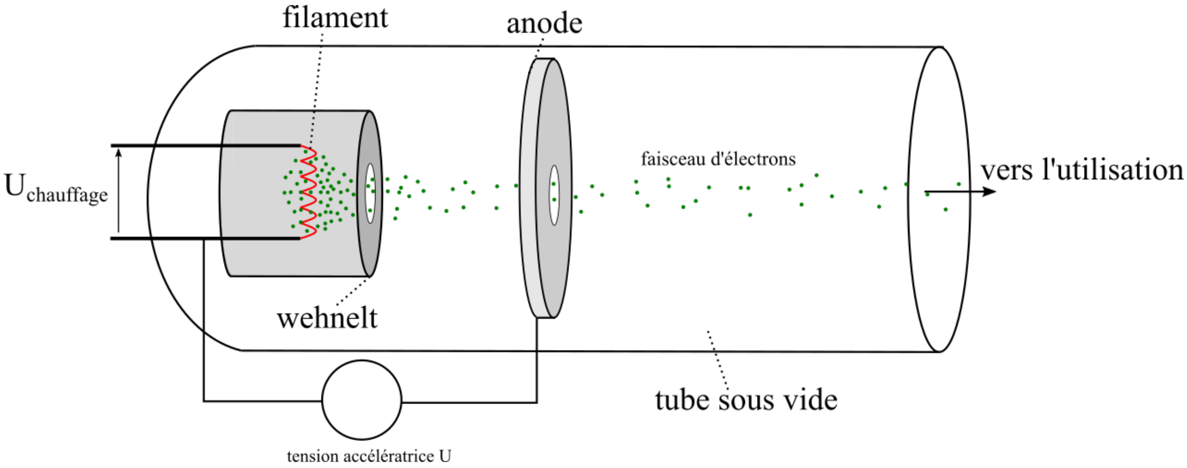
II.3 Application à l'accélération d'une particule d'un canon à électron

a) Présentation du canon à électron

Le canon à l'électron est un dispositif qui a pour but d'accélérer des électrons afin de pouvoir ensuite utiliser le faisceau d'électron ainsi crée dans diverses application, par exemple les microscopes électroniques.

Il est constitué des principaux éléments suivants :

- Le filament conducteur, qui est porté à haute température par effet Joule, et qui émet alors des électrons par effet thermoionique.
- Le Wehnelt, qui a pour but de focaliser le faisceau lors de sa sortie.
- l'anode, portée à un potentiel positif, a pour but d'accélérer les électrons entre l'ensemble filament + Wehnelt et elle-même.
- La zone de passage, située après l'anode, dans laquelle le champ électrique devient très faible.



Exercice

Identifier les différentes parties, déterminer le sens de la tension accélératrice nécessaire et le champ $\vec{E}$ entre le wehnelt et l'anode. Dans la suite, on admet que celui-ci est quasi-uniforme entre le wehnelt et l'anode.

Exercice

Quelle est la nature du mouvement des électrons dans les deux zones principales du canon ?

Entre le wehnelt et l'anode, le mouvement est rectiligne accéléré (car soumis à un champ électrique uniforme dans le même sens du mouvement), et après l'anode il est rectiligne uniforme, en négligeant l'effet du poids, car il n'y a plus de force (vide, pas de champ électrique).

b) Détermination de la vitesse de l'électron

Exercice

On note U la différence de potentiel entre le wehnelt et l'anode, et on néglige l'énergie cinétique des électrons lorsqu'ils quittent le wehnelt. Déterminer l'énergie cinétique et la vitesse des électrons v_f à leur passage par l'anode.

Pour le système électron, dans le référentiel galiléen, on peut appliquer entre le wehnelt (vitesse quasi-nulle et l'anode :

- soit le TEC : $E_{\mathrm{c,f}} - 0 = W_{AB}(\vec{F}_{\mathrm{e}}) = -e \times (-U) \iff \boxed{E_{\mathrm{c,f}} = eU}$;
- soit le TEM : $E_{\mathrm{c,i}} + (-e)V_i = E_{\mathrm{c,f}} + (-e)V_f$ soit avec $E_{\mathrm{c,i}} = 0$ et $U = V_f - V_i$, on trouve à nouveau : $\boxed{E_{\mathrm{c,f}} = eU}$

Ainsi $\frac{1}{2}mv_f^2 = eU \iff \boxed{v_f = \sqrt{\frac{2eU}{m}}}$.

Exercice

Faire l'application numérique pour v_f avec $U = 1\,\mathrm{kV}$, $U = 100\,\mathrm{kV}$, et $U = 500\,\mathrm{kV}$. Commenter chaque valeur.

On trouve, avec $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$:

- avec $U = 1\,\mathrm{kV}$ $v_f = 1{,}8 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$;
- avec $U = 100\,\mathrm{kV}$, $v_f = 1{,}8 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$;
- avec $U = 500\,\mathrm{kV}$, $v_f = 4{,}2 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Pour les deux dernières valeurs, on s'approche voire on dépasse la célérité de la lumière dans le vide, la modélisation n'est donc plus valide.

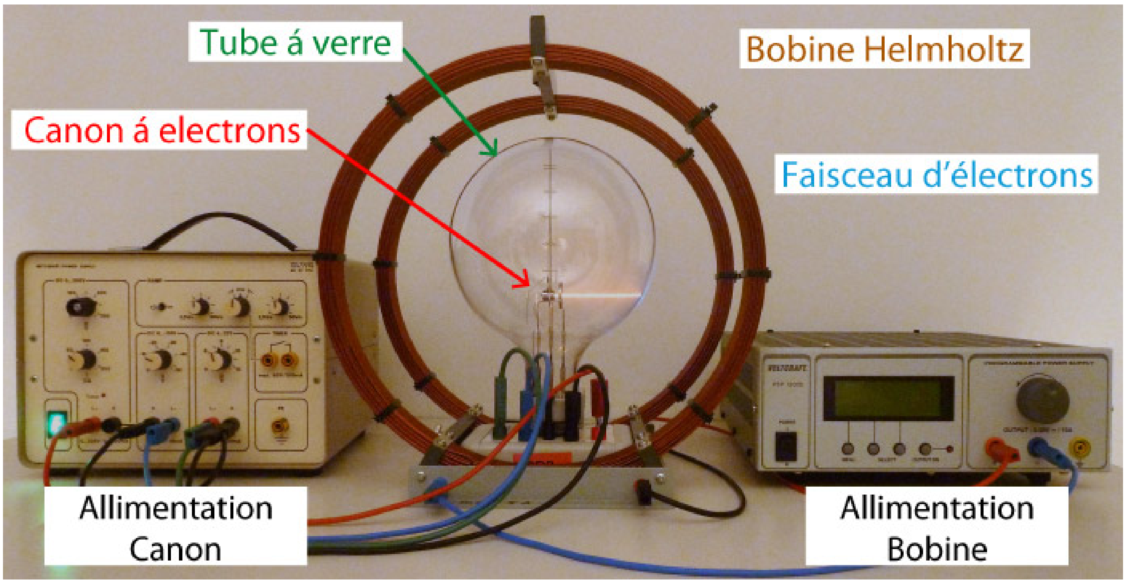
On donne couramment des valeurs d'énergie cinétique dans une unité secondaire car les énergies mises en jeu sont très faibles (souvent très inférieures à 10^{-10} J).On les exprime alors en électronvolt ($1\,\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J), car l'énergie cinétique acquise est $E_c = |q|\,U$, donc une tension de 1 kV implique une énergie cinétique acquise de 1 keV.

III. Mouvement dans un champ magnétique

La création de champs magnétiques uniformes fera l'objet d'un chapitre distinct, on ne présente donc ici que les conséquences d'un champ magnétique uniforme sur la trajectoire d'une particule chargée (et on va restreindre un peu l'étude en ne considérant que des mouvements plans).

III.1 Mouvement circulaire dans un champ magnétique

a) Expérience introductive



https://virtuelle-experimente.de/fr/b-feld/b-feld/experiment.php
On constate que :

- Plus le champ magnétique crée par les bobines est intense,
- Plus la vitesse initiale des électrons est élevée,

b) Mise en équation

On considère un électron de charge $(-e)$ soumis à un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e_z}$ uniforme. En négligeant le poids devant la force de Lorentz magnétique, on sait qu'alors la norme de la vitesse est inchangée avec un champ magnétique, car la puissance associée à la force de Lorentz magnétique est nulle.

De plus, le mouvement est nécessairement plan si **la vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique**. En effet, en appliquant dans le référentiel terrestre la loi de la quantité de mouvement en coordonnées cartésiennes, $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, soit $(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e_z} = 0$ $m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0$. Ainsi $v_z = \text{cste} = 0$ si la vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique.

On va utiliser le repère de Frenet $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{e_z})$, où on rappelle qu'on écrit alors $\vec{v} = v\vec{T}$ et $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + \dfrac{v^2}{R}\vec{N} = \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$ avec R le rayon de courbure car la norme de la vitesse est inchangée. On réécrit la LQM :

$$m\vec{a} = (-e)\vec{v} \wedge \vec{B} \Longleftrightarrow m\frac{v^2}{R}\vec{N} = -evB\vec{T} \wedge \vec{e_z} \tag{4.9}$$

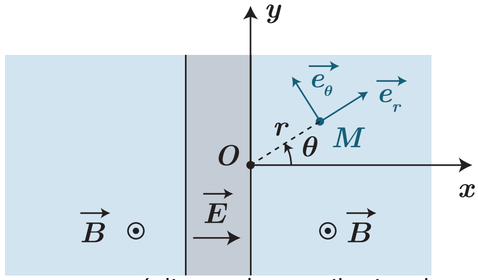
On en tire plusieurs propriétés :

* - **le sens de rotation dépend du signe de la charge et du sens du champ** : $\vec{T} \wedge \vec{e_z} = \pm\vec{N}$ (suivant le sens de la courbure), soit en projection suivant $\vec{N}$, comme $v^2/R > 0$, il vient $\dfrac{mv^2}{R} = +evB$ et donc $\vec{T} \wedge \vec{e_z} = -\vec{N}$ permettant d'indiquer que le sens de rotation est le sens trigonométrique (si la charge avait été positive ou le champ magnétique inversé, le sens aurait été inversé) :
- **la valeur du rayon de la trajectoire** vaut donc $R = \dfrac{mv}{eB}$. Le mouvement est donc bien circulaire. Avec $v = R\omega$, la vitesse angulaire vérifie $\omega = \dfrac{eB}{m} = \omega_c$ appelée pulsation cyclotron.

Dans un cadre plus général, la trajectoire possible pour une particule chargée soumise à un champ magnétique sera une hélice "s'enroulant" autour du champ, combinant le mouvement de rotation à un mouvement de translation. C'est le cas lorsque la vitesse n'est pas initialement perpendiculaire au champ magnétique, et où la vitesse selon l'axe du champ magnétique n'est pas modifiée par la force.

III.2 Application : étude d'un accélérateur

a) Principe

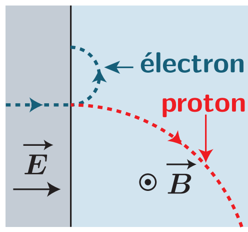


On va s'intéresser à un certain type d'accélérateur de particules appelé cyclotron (celui de Nantes s'appelle Arronax). Le système étudié est constitué d'une zone possédant un champ électrique uniforme dirigé selon $\vec{e_x}$ et de deux zones où on a un champ magnétique uniforme dirigé perpendiculairement au plan, $\vec{B} = B\vec{e_z}$.

Qualitativement, on peut prévoir quel va être le mouvement en négligeant la contribution du poids. Considérons une vitesse initiale $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$; la force de Lorentz s'exprime par :

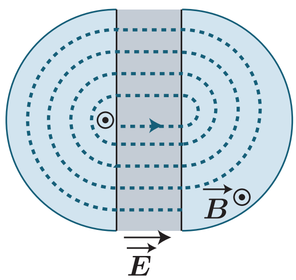
$$\vec{F}_{\mathrm{L}} = -e\vec{v_0} \wedge \vec{B} = -ev_0\vec{e_x} \wedge B\vec{e_z} = ev_0B\vec{e_y} \tag{4.10}$$

car $\vec{e_x} \wedge \vec{e_z} = -\vec{e_y}$. On a donc une force orientée vers le haut. D'après ce qui précède, on a une trajectoire circulaire, on tourne donc dans le sens trigonométrique jusqu'à ressortir de la zone de champ magnétique. La pulsation cyclotron, qui est la vitesse de rotation, peut ainsi atteindre $\omega_c = 1{,}8 \cdot 10^{10}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ pour un électron.



Pour un proton, ou toute charge positive, on obtient évidemment le même mouvement, le cercle est juste parcouru dans le sens horaire et non trigonométrique, et à vitesse égale le rayon est beaucoup plus grand car la masse du proton est plus importante.

b) Conséquences et ordres de grandeur



Quel est l'intérêt de ce type de système en comparaison d'un accélérateur de particules linéaires, alors que le champ magnétique ne permet pas d'accélérer une particule ? Elle réside dans le fait que l'on peut refaire passer un grand nombre de fois une particule par la zone de champ électrique. Il faut néanmoins modifier l'orientation du champ électrique à chaque demi-tour de la particule (en utilisant un générateur de tension sinusoïdal de pulsation égale à ω_c).

La conservation de l'énergie mécanique entre le demi-tour n et $n+1$ conduit à

$$E_{\mathrm{c},n+1} - eV_1 = E_{\mathrm{c},n} - eV_2 \tag{4.11}$$

soit en appelant $U = V_1 - V_2$ la différence de potentiel entre les deux plaques définissant la zone linéaire

$$E_{\mathrm{c},n+1} - E_{\mathrm{c},n} = eU \tag{4.12}$$

On reconnaît une suite, et donc avec $E_{c,0} = 0$, $E_{c,n} = neU$. La vitesse après n demi-tours est donc $v_n = \sqrt{\dfrac{2neU}{m}}$.

Pour un cyclotron de taille $R = 1$ m avec un champ magnétique $B \sim 0{,}1$ T, on peut effectuer près de $n_{\max}/2 = 5000$ tours. **Tout se passe donc comme si on accélérait une particule sous une différence de potentiel de $n_{\max}U$** ! On peut ainsi assez facilement atteindre des vitesses relativistes ($E_c \sim 5$ MeV pour un électron), la seule contrainte étant de pouvoir réaliser un champ magnétique uniforme sur une grande surface. Le LHC permet par exemple d'obtenir des protons ayant une énergie de 7 TeV !

Quelques applications à ces accélérateurs sont à souligner :

*

- la création de particules dans les collisionneurs (après avoir été accélérés) ;
- l'émission de lumière avec une fréquence réglable, dans la gamme des rayons X pour le synchrotron Soleil (Saclay) par exemple : toute particule accélérée rayonne un champ électromagnétique ;
- la production de radioisotopes en médecine : des protons accélérés sont bombardés sur des atomes.

Exercices

4.1 Questions sur les particules

On considère une particule ponctuelle, de charge q et de masse m, de vitesse initiale $\vec{v}_0$ à l'entrée d'une zone où peuvent régner un champ électrique $\vec{E}$ ou magnétique $\vec{B}$ (et jamais les deux en même temps). On suppose ces champs uniformes et indépendants du temps, et on néglige tout autre force que celles provoquées par ces champs. Dans chaque situation, il faut se demander quel champ permet l'obtention d'un tel mouvement.

1. La particule décrit une droite et possède une accélération constante $a \neq 0$.

   (a) Déterminer la direction et la norme du ou des champs qui provoquent cette trajectoire.

   (b) Déterminer le vecteur position de la particule en fonction du temps.

2. La particule décrit une trajectoire circulaire de rayon R_0 dans un plan xOy.

   (a) Déterminer la direction du ou des champs qui provoque cette trajectoire.

   (b) Déterminer l'équation de la trajectoire et la relation entre la norme du champ, V_0 et R_0.

---

1. (a) On reconnaît le cas où l'on a un champ électrique, seule possibilité pour avoir une accélération constante et une trajectoire rectiligne. Avec $\vec{a} = \overrightarrow{\text{cste}}$, on écrit $\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0$. La trajectoire reste donc rectiligne si le vecteur vitesse initiale est colinéaire au vecteur accélération. Enfin, avec $m\vec{a} = q\vec{E}$, on en déduit donc que $\vec{E}$ est colinéaire à $\vec{v}_0$, et de norme $E = \dfrac{ma}{q}$.

   (b) On écrit donc enfin la position comme $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM}(t=0)$.

   Rque : on pourrait avoir un champ magnétique dans cette situation, mais tel qu'il soit colinéaire à la trajectoire de sorte que la force de Lorentz magnétique soit nulle ($\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$). Cependant dans ce cas, l'accélération serait nulle.

2. (a) Un mouvement circulaire est forcément dû à un champ magnétique **perpendiculaire au vecteur vitesse initial**. Étant donné que la trajectoire est dans le plan (xOy), cela signifie donc que $\vec{B}$ est porté par $\vec{e_z}$ et $\vec{v}_0$ est dans le plan (xOy).

   (b) Le mouvement est nécessairement uniforme car le champ $\vec{B}$ ne modifie pas la norme de la vitesse. On a par conséquent en appliquant la LQM dans un repère polaire

   $$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qR_0\dot{\theta}\vec{e_\theta} \wedge \vec{e_z} \Longleftrightarrow -mR_0\dot{\theta}^2\vec{e_r} = qR_0\dot{\theta}B\vec{e_r} \tag{4.13}$$

   conduisant à

   $$\dot{\theta} = -\frac{qB}{m} \quad \text{et} \quad v_0 = R_0\left|\dot{\theta}\right| \Rightarrow R_0 = \frac{mv_0}{qB} \tag{4.14}$$

4.2 Action d'un champ magnétique sur un proton ou sur un électron

Un électron ou un proton de même énergie cinétique décrivent des trajectoires circulaires dans un champ magnétique uniforme. Comparer :

- leur vitesse,
- le rayon de leur trajectoire,
- leur période.

Sachez refaire la démonstration complète du rayon de la trajectoire dans un champ magnétique uniforme.

Dans le cadre d'un mouvement de rotation, on a dans tous les cas une trajectoire circulaire uniforme, d'après le cours. De plus, à énergie cinétique égale, comme $m_e \ll m_p$:

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 = \frac{1}{2}m_p v_p^2 \Rightarrow \boxed{v_e \gg v_p} \tag{4.15}$$

Le rayon de la trajectoire s'exprimant par $R = \dfrac{mv}{|q|\, B}$,

$$\frac{R_e}{R_p} = \frac{m_e v_e}{m_p v_p} = \frac{m_e v_e^2}{m_p v_p^2}\frac{v_p}{v_e} = \frac{v_p}{v_e} \tag{4.16}$$

(à l'aide de l'égalité des énergies cinétiques) donc $\boxed{R_e \ll R_p}$. Enfin concernant leur période, avec la vitesse angulaire pour ce mouvement circulaire $\omega = \dfrac{|q|\, B}{m}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{|q|\, B} \tag{4.17}$$

donc $\dfrac{T_e}{T_p} = \dfrac{m_e}{m_p}$ d'où $\boxed{T_e \ll T_p}$.

4.3 Canon à électrons

1. Établir l'expression de l'énergie cinétique des électrons accélérés par un champ électrostatique uniforme $E = 100\,\text{kV}\,\text{m}^{-1}$ régnant dans un condensateur de longueur $d = 3\,\text{cm}$. Les électrons émis à proximité de la plaque chargée négativement ont une vitesse quasi-nulle. On fera un schéma et on flèchera la tension (positive).
2. Déterminer la durée du trajet dans le condensateur.
3. Calculer la vitesse de sortie de l'électron. Une correction relativiste est-elle nécessaire ? Si oui, calculer la vraie vitesse.

Données : énergie cinétique relativiste $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ avec c la célérité de la lumière dans le vide, et facteur relativiste $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ avec v la vitesse de l'objet.

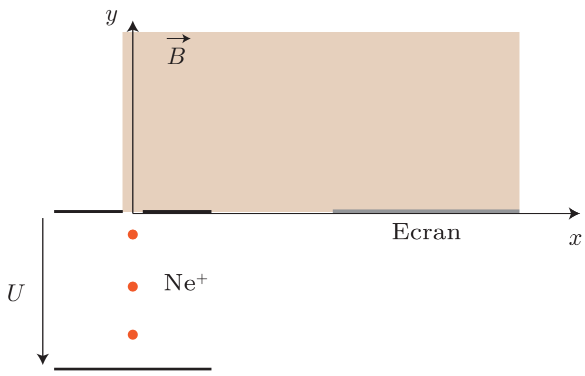
- 1) Appliquer la conservation de l'énergie mécanique entre les deux plaques.
- 2) Si on parle de durée, il faut forcément utiliser la LQM !

---

1. Dans un condensateur, on a vu dans le cours que $|E| = \dfrac{U}{d}$ avec U la différence de potentiel entre les deux électrodes. Ainsi $U = Ed = 3000\,\text{V}$. Pour obtenir l'énergie cinétique, il suffit d'appliquer la conservation de l'énergie mécanique à l'électron, dans un référentiel galiléen, et soumis à des forces conservatives (force électrique de Lorentz et poids négligé) :
$$0 + qV_1 = E_c + qV_2 \iff E_c = -e(V_1 - V_2) = eU \tag{4.18}$$
En effet, il faut forcément que $U = V_2 - V_1 > 0$ pour que $E_c > 0$, ce qui implique une contrainte sur l'orientation du champ électrique pour aller dans la bonne direction ($\vec{E}$ orienté dans **le sens opposé au mouvement de l'électron**). Donc $E_c = eU = 3\,\text{keV} = 4{,}8 \cdot 10^{-16}\,\text{J}$.
2. Pour déterminer des durées, l'approche énergétique ne convient pas. Il faut donc utiliser la LQM. On suppose que le champ électrique s'écrit $\vec{E} = -E\vec{e_x}$. Alors $m\vec{a} = -e(-E\vec{e_x})$ soit $m\ddot{x} = eE$, puis par intégrations successives $\dot{x} = \dfrac{eE}{m}t$ et $x = \dfrac{eE}{2m}t^2$. Ainsi l'électron sort du condensateur pour un temps vérifiant l'équation $d = \dfrac{eEt_s^2}{2m}$ soit $t_s = \sqrt{\dfrac{2dm}{eE}} = 1{,}9\,\text{ns}$.
3. On calcule la vitesse en considérant que $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ soit $v = \sqrt{\dfrac{2E_c}{m}} = 3{,}25 \cdot 10^7\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$, soit 10% de la vitesse de la lumière : on doit considérer que la particule est relativiste.
On calcule donc $\gamma = 1 + \dfrac{E_c}{mc^2} = 1{,}00585$ puis $v = c\sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} = 2{,}99 \cdot 10^7\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

4.4 Spectroscopie de masse

Dans un spectroscope, on accélère initialement des ions chargés de néon Ne^+ par une différence de potentiel $U = 1000\,\text{V}$, puis on les soumet à l'action d'un champ magnétique de $0{,}100\,\text{T}$.



1. Justifier le choix du sens de la tension appliquée dans le dispositif accélérateur. Quelle doit être la direction et le sens de $\overrightarrow{B}$ pour que les ions impactent sur l'écran ?
2. Expliquer qualitativement ce qui va changer dans le système pour des masses différentes.
3. Sachant que le faisceau comporte des atomes de $^{20}Ne^+$ et $^{22}Ne^+$, montrer que la distance d entre les impacts observés sur la plaque photographique en fonction des masses, de U, e et B s'écrit :

$$d = 2\sqrt{\frac{2U}{eB^2}}(\sqrt{m_{22}} - \sqrt{m_{20}}) \tag{4.19}$$

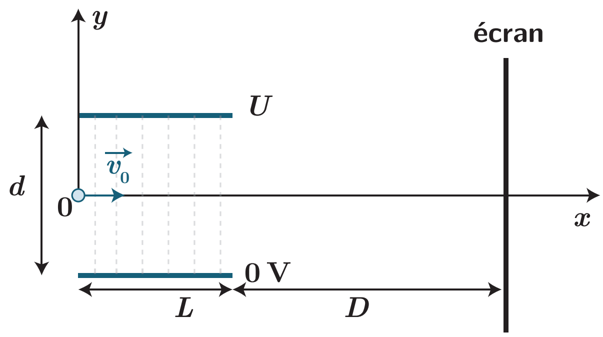
   Effectuer l'application numérique.
4. Quelle demi-étendue Δv peut-on accepter sur la vitesse du faisceau incident pour observer deux tâches distinctes ordonnées par masse croissante si en sortie de la zone accélératrice la vitesse de chaque type de particule de néon est précise à $\pm\Delta v$ quelle que soit sa masse ?

Données : 1 u.m.a $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg, $m(^{20}\mathrm{Ne}) = 19{,}99$ u m a $m(^{22}\mathrm{Ne}) = 21{,}99$ u m a

- 2) Chercher à décomposer chaque action (différence de potentiel, champ magnétique) sur les ions.
- 3) Calculer le rayon de la trajectoire circulaire dans la zone de champ magnétique en fonction de U, e, B, et la masse. Puis faites un schéma de deux trajectoires de masse différentes pour représenter d.
- 4) quelle est l'influence de la vitesse sur la position de l'impact ? Se demander alors à quelle condition les deux particules vont arriver au même endroit.

4.5 Déflection électrique

Un faisceau d'électrons arrive en O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0 = v_0\overrightarrow{e_x}$ où $v_0 = 1{,}0 \cdot 10^7$ m s^{-1}. Ils entrent dans un condensateur de longueur $L = 2{,}0$ cm et d'épaisseur $d = 1{,}0$ cm, soumis à une différence de potentiel $U = 105$ V. On observe les impacts d'électrons sur un écran luminescent situé à la distance $D = 50$ cm après la plaque.



1. Démontrer le lien entre champ électrique E et tension U dans le condensateur. Calculer numériquement E.
2. Donner les coordonnées du point, noté A, où le faisceau sort du champ électrique.
3. Déterminer alors $\tan\alpha$ avec α l'angle de déviation du faisceau d'électron par rapport à l'horizontal, en sortie du condensateur, en fonction de e, E, L, la masse de l'électron m_e et v_0.
4. Démontrer l'équation de la trajectoire d'un électron une fois sorti du condensateur.

5. Montrer que la position des impacts sur l'écran est proportionnelle à U. Quel est l'intérêt ?

Indications :

- 3) Faites un schéma avec le vecteur vitesse juste en sortie de la zone de champ électrique, et l'angle α.
- 4) Chercher l'équation de la droite à partir des coordonnées de A et de $\tan\alpha$ (qu'est-ce que cette quantité représente pour la droite ?)
- 5) on doit trouver comme position verticale de l'impact $y = \dfrac{eL(L/2+D)}{m_e d v_0^2}U$.