–T4–

# Introduction aux machines thermiques



## Questions de cours :

- Pour une machine cyclique ditherme, énoncer les deux premiers principes et en déduire l'inégalité de Clausius. Justifier ainsi l'impossibilité de construire un moteur thermique monotherme.
- Pour le système au choix du khôlleur (moteur, pompe à chaleur, machine frigorifique), expliciter le sens des échanges thermiques, définir le rendement / efficacité et montrer sa borne supérieure (Carnot). Donner un ordre de grandeur du rendement / efficacité réel(le).
- Sur l'exemple du moteur à essence, expliquer les différentes étapes en lien avec le cycle de Beau de Rochas.
- Expliquer les étapes de fonctionnement d'une machine réceptrice, ses différents éléments constitutifs et leur rôle (compresseur, condenseur, détendeur, évaporateur).

## Capacités exigibles du BO :

- Donner le sens des échanges énergétiques pour un moteur ou un récepteur thermique ditherme.
- Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme.
- Définir un rendement ou une efficacité et la relier aux énergies échangées au cours d'un cycle.
- Justifier et utiliser le théorème de Carnot.
- Citer quelques ordres de grandeur des rendements des machines thermiques réelles actuelles.
- Expliquer le principe de la cogénération.

Une machine thermique est un dispositif destiné à réaliser une conversion entre travail et chaleur. Le chapitre précédent a mis en lumière la différence fondamentale entre ces deux types d'énergie. Historiquement, les deux principes de la thermodynamique sont le fruit d'une volonté d'amélioration des performances de ces machines thermiques. Nous verrons que leur application à des cas concrets nous donne de précieux renseignements et aiguille sur les modifications à apporter pour les rendre plus efficaces.

# I. Cadre d'étude

## I.1 Principe général

Cherchant à réaliser des échanges énergétiques de diverses natures, on emploie un **fluide** (air, réfrigérant) qui circule dans des tuyaux et peut :

- être mis en contact avec des milieux de température plus ou moins élevée ou chauffés par l'intermédiaire d'une réaction chimique (modélisés par des **thermostats**) ;
- **recevoir du travail** par le biais d'un compresseur (pour augmenter la pression) ou au contraire en donner en entraînant une hélice ou une turbine.

Les changements d'états sont un très bon moyen de stocker de l'énergie pour la restituer ensuite, d'ailleurs.

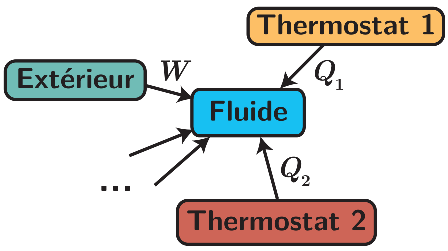
L'état physique des fluides est rarement purement liquide (car difficilement compressible), mais l'intérêt d'utiliser une phase liquide est dû à la plus grande capacité thermique qu'un gaz. En général, des machines thermiques exploiteront les deux états physiques.

Ces machines sont en général **cycliques** : après un régime transitoire, le fluide d'une machine revient exactement dans le même état : ceci est très bien vérifié pour un réfrigérateur (une fuite du réfrigérant entraînant une efficacité moindre, voire un arrêt définitif). Cependant de nombreux moteurs admettent de l'air "frais" : ce sont des systèmes ouverts, étudiés de manière approfondie en deuxième année.

## I.2 Principes de la thermodynamique

On peut modéliser les différents échanges d'énergie au cours du cycle d'un fluide de la manière suivante :

- échanges d'énergie sous forme de chaleur $Q_i$ avec des thermostats à la température $T_i$ ;
- échanges de travail tout au long du cycle, noté $W$.




Selon le signe de W, on distingue deux types de machines :

- les machines **réceptrices** $(W > 0)$ telles que les réfrigérateurs ou les pompes à chaleur permettant de réchauffer ou refroidir : elles sont branchées à une source d'énergie électrique qui permet de forcer des transferts thermiques non naturels ;
- les **moteurs** thermiques $(W < 0)$ ayant pour but de fournir un travail mécanique à partir d'une source de chaleur par exemple.

* On peut appliquer les deux premiers principes de la thermodynamique au fluide durant le cycle :

$$W + Q_1 + Q_2 + ... = \Delta U = 0 \tag{4.1}$$

comme $U$ est une fonction d'état, ne dépendant que de l'état du fluide, et non du type de transformation. Cette relation traduit la conservation des énergies apportées ou cédées au fluide au cours d'un cycle.
Le second principe s'applique également au cours du cycle :

$$\Delta S = 0 = S_{\text{ech}} + S_{\text{créée}} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} + S_{\text{créée}} \tag{4.2}$$

ce qui amène à l'**inégalité de Clausius**

$$\boxed{\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0} \qquad (4.3)$$

*

comme $S_{\text{créée}} \geq 0$. C'est elle en particulier qui va limiter les rendements des machines. **Il y aura égalité dans le cas d'un fonctionnement réversible**. Néanmoins pour aller plus loin il faut préciser les modalités de fonctionnement de la machine et le nombre de thermostats.

### I.3 Cas de la machine monotherme

Le cas le plus simple serait de considérer un unique thermostat. Les deux principes donneraient alors pour un cycle $W + Q = 0$ et $\frac{Q}{T} \leq 0$ soit $W \geq 0$. **Une machine monotherme est forcément réceptrice**, par exemple un radiateur électrique convertit intégralement la puissance électrique en pertes par effet Joule. Mais le contraire est impossible, d'après le second principe.

Par la suite on va donc s'intéresser à des machines dithermes, c'est-à-dire dont le fluide peut être en contact avec deux thermostats de température différente, l'un appelé "source chaude" de température $T_C$ et l'autre "source froide" de température $T_F$.

## II. Approche générale des moteurs dithermes

### II.1 Construction du moteur "parfait"

#### a) Échanges d'énergie

Pour une machine motrice, $W \leq 0$, soit *via* le premier principe

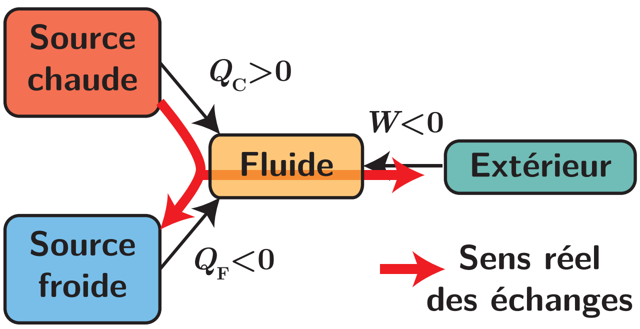
$$Q_F + Q_C \geq 0 \Leftrightarrow Q_C \geq -Q_F \qquad (4.4)$$

*

Or l'inégalité de Carnot permet d'écrire que

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0 \Longleftrightarrow -\frac{Q_F}{T_F} \geq \frac{Q_C}{T_C} \geq -\frac{Q_F}{T_C} \Longleftrightarrow Q_F\left(\frac{1}{T_F} - \frac{1}{T_C}\right) \leq 0 \qquad (4.5)$$

On peut alors conclure que $Q_F \leq 0$, comme $T_F \leq T_C$.




**Moteur ditherme**

Un moteur ditherme est tel qu'un fluide caloporteur (air ou mélange air-carburant) reçoit un transfert thermique de la source chaude (réaction chimique, rayonnement solaire, thermostat, ...) $Q_C > 0$ et cède un transfert thermique à la source froide (air extérieur, eau,...) $Q_F < 0$ tout en cédant un travail à des parties mobiles (piston, turbines, ...), $W < 0$. **Le sens des transferts thermiques est le sens naturel**.

#### b) Description

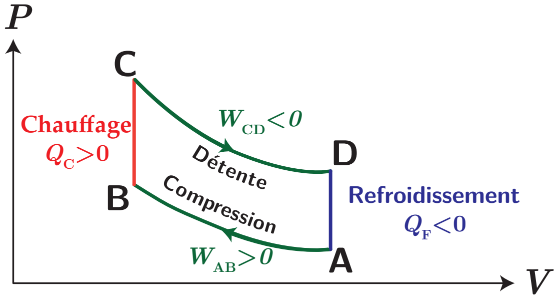
##### i) Première tentative : cycle de Beau de Rochas

Cherchons maintenant à construire le cycle d'un moteur optimisé, à partir d'un fluide simple qu'est un gaz parfait. Pour échanger du travail avec la machine, il paraît naturel d'employer des **transformations adiabatiques réversibles** (= **isentropiques**) : on échange uniquement du travail et on s'assure de ne pas avoir de pertes du fait d'une irréversibilité mécanique. On effectue donc :

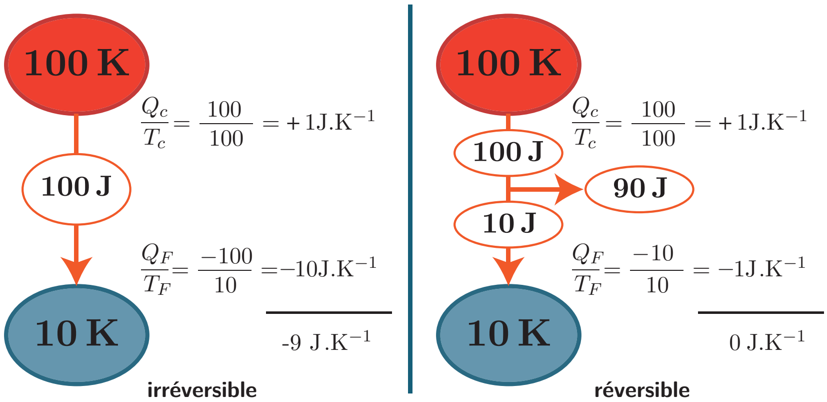
Rappelons que **le travail fourni par le moteur durant un cycle correspond à l'aire du cycle dans un diagramme en coordonnées P-V**. Par conséquent, un cycle **parcouru dans le sens horaire est moteur**.

- une compression isentropique au cours de laquelle le fluide reçoit du travail (A-B).
- une détente isentropique au cours de laquelle il en cède (C-D).

Évidemment pour que le travail global soit moteur, la détente doit se faire à plus haute température que la compression, d'où le positionnement des courbes dans le diagramme de Clapeyron. On peut refermer le cycle de plusieurs façons, la plus naturelle étant une évolution **isochore** : on aboutit au cycle dit de Beau de Rochas, où à chaque étape correspond un échange bien précis d'énergie. Il décrit assez bien les moteurs à essence.




Cependant le rendement n'est pas le meilleur car les évolutions isochores ne sont pas réversibles, vu qu'il y a à chaque fois **déséquilibre thermique entre le fluide et les thermostats**. On peut alors chercher à optimiser les pertes vers la source froide. Il faut donc faire en sorte que lors des échanges thermiques avec les thermostats, il n'y ait pas seulement un transfert thermique mais aussi un échange de travail :

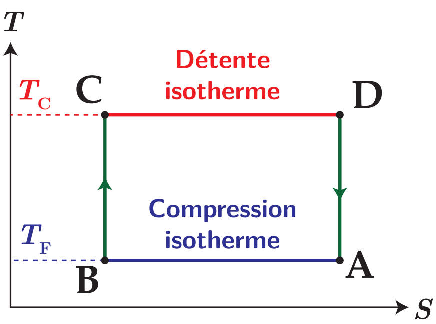


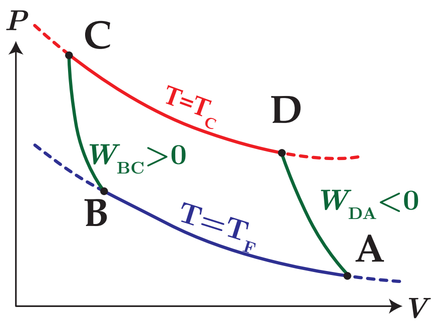

Il est par contre impossible de convertir entièrement l'énergie thermique $Q_c$ en travail, car alors on aurait $Q_C/T_C + S_{\text{créée}} = 0$ avec $Q_c > 0$, donc $S_{\text{créée}} < 0$ lors du cycle.

On constate qu'en diminuant le transfert thermique reçu à la source froide il est possible d'avoir une évolution réversible.

#### ii) Deuxième tentative : cycle de Carnot

L'idée est donc de rendre les transferts thermiques réversibles. La solution la plus simple consiste alors à considérer des transformations **isothermes réversibles** lors du contact avec les thermostats, tout en fermant le cycle avec des transformations isentropiques. Ci-dessous l'allure du cycle dans les coordonnées T-S et P-V, où l'on constate que les étapes isothermes comportant des échanges de chaleur s'accompagnent maintenant de travail supplémentaire.

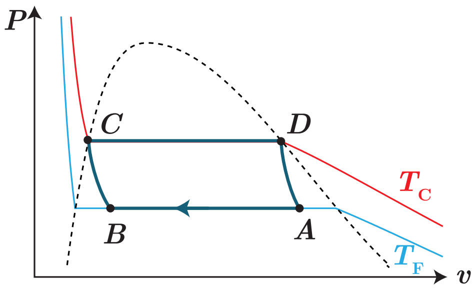



Il s'agit du **cycle de Carnot**, cycle idéal pour obtenir un moteur réversible. On montrera en exercice que c'est celui ayant le meilleur rendement.

#### iii) Exemple de cycle de Carnot avec changement d'état

Il se peut que l'on rencontre des cycles où se produit un changement d'état (souvent partiel). On a alors besoin du diagramme de Clapeyron liquide-vapeur rencontré au chapitre T1, où l'on a représenté les deux isothermes correspondant aux sources chaudes et froides, ainsi que les deux transformations isentropiques :




## II.2 Rendement d'un moteur

Le rendement d'un moteur correspond au **rapport entre l'énergie utile**, ici $W$, **et l'énergie coûteuse**, ici l'apport énergétique de la source chaude $Q_C$ soit

*

$$\boxed{\eta_{\text{mot}} = \frac{-W}{Q_C}} \tag{4.6}$$

le signe étant lié au fait que $W < 0$.

Les deux premiers principes vont nous permettra de mettre en évidence le fait que le rendement d'un moteur est nécessairement limité :

### Démonstration

*

- d'après le premier principe où $-W = Q_C + Q_F$,

$$\eta_{\text{mot}} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} \tag{4.7}$$

- puis à l'aide de l'inégalité de Clausius liée au second principe, comme $\frac{Q_F}{T_F} \leq -\frac{Q_C}{T_C}$ :

$$\frac{Q_F}{Q_C} \leq -\frac{T_F}{T_C} \iff \eta_{\text{mot}} \leq 1 - \frac{T_F}{T_C} = \eta_C \tag{4.8}$$

le cas d'égalité signifie que le cycle est réversible et on appelle $\eta_C$ le rendement associé, correspondant à celui du cycle de Carnot.

**Théorème de Carnot**

Un moteur ditherme fonctionnant entre une source chaude de température $T_C$ et une source froide de température $T_F$ possède un rendement inférieur ou égal à celui d'une machine réversible

$$\boxed{\eta_{\text{mot}} = \frac{-W}{Q_C} \leq \eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

Ce rendement ne dépend que des températures des sources, on a donc intérêt à **augmenter le plus possible l'écart de température** entre les deux sources.

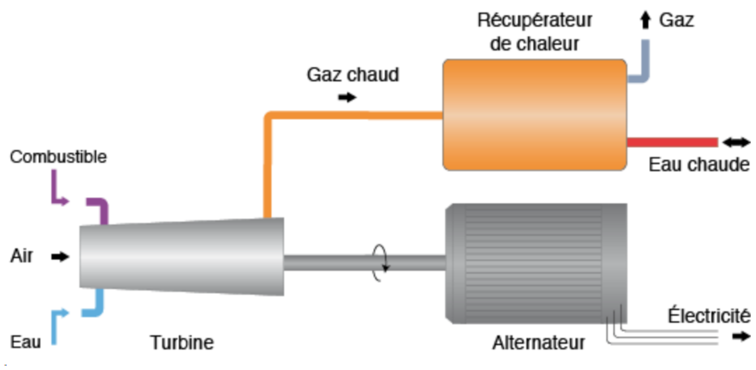
**Exemple :** Prenons le cas d'une turbine de centrale nucléaire : $T_C = 325\,°\text{C}$ est la température de la vapeur d'eau tandis que la source froide est l'eau d'une rivière à $T_F = 25\,°\text{C}$.

⚠ Il faut mettre les températures en kelvin lors d'une application numérique

Ici on trouve $\eta_C = 0.5$. En pratique le rendement est plutôt de l'ordre de 30 à 40% en raison des irréversibilités et de diverses pertes.

## II.3 Cogénération

Dans le rendement, par exemple pour une centrale qui produit de l'énergie mécanique (convertie ensuite en énergie électrique *via* un alternateur), on ne tient pas compte de la chaleur fournie à la source froide car il s'agit d'un terme de perte qui ne nous intéresse pas. Cette définition est historique et date de la naissance de la thermodynamique. Aujourd'hui, la chaleur perdue est considérée comme une perte à éviter. Par exemple, on utilise aujourd'hui la cogénération qui consiste à produire en même temps et dans la même installation de l'énergie thermique et de l'énergie mécanique. La chaleur est utilisée pour le chauffage et la production d'eau chaude à l'aide d'un échangeur. L'énergie mécanique est transformée en énergie électrique grâce à un alternateur.



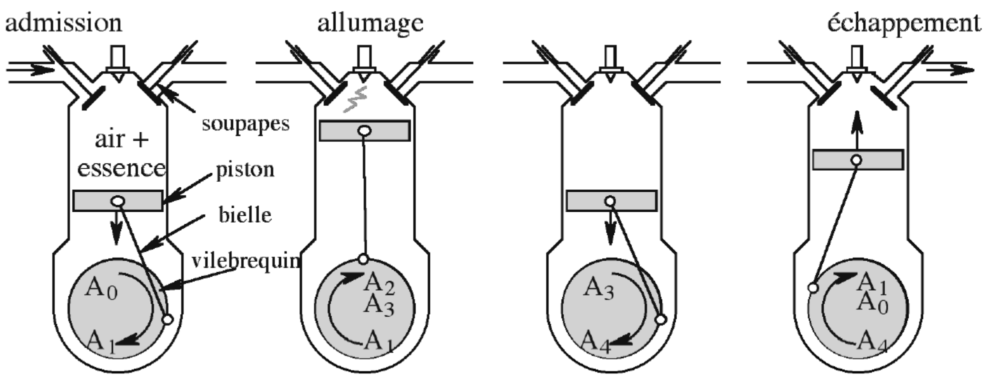

La cogénération a pour objectif de limiter les déperditions énergétiques, et donc d'utiliser l'énergie perdue (la chaleur de combustion). En plus d'être écologique, ce procédé a l'avantage d'offrir un excellent rendement global, qui est de l'ordre de 80 à 90 %.

## II.4 Exemple du moteur à essence (4 temps)

Nous avons déjà tracé à peu de choses près le cycle décrivant au mieux le moteur à essence, encore appelé moteur à explosion (car nécessitant une bougie pour provoquer l'inflammation du mélange air-carburant) : c'est le cycle de Beau de Rochas.

- La source chaude est modélisée par la réaction chimique interne de dégradation d'hydrocarbures (prévus pour supporter une forte compression sans s'enflammer de manière spontanée) majoritairement en $CO_2$ et en eau ;
- la source froide est modélisée par l'atmosphère extérieure ;
- le système à considérer est le mélange air+essence.

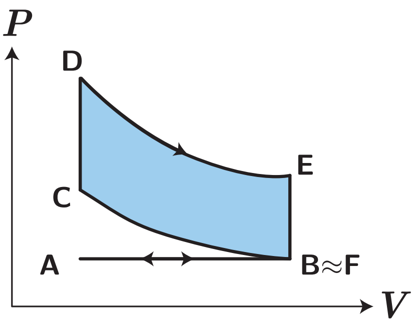
D'un point de vue mécanique, la chambre est constituée d'un **piston** qui se translate suite à l'explosion du mélange, la différence de volume entre la position la plus basse et la plus haute constitue la **cylindrée** du moteur. Pour convertir ce mouvement en un mouvement de rotation, le piston est relié à une bielle.

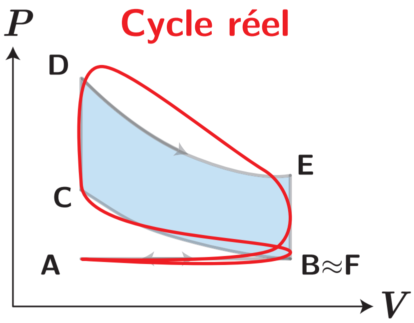



D'un point de vue thermodynamique, on distingue plusieurs transformations (qui ne coinçident pas avec les 4 temps des mécaniciens, à savoir les 4 demi-tours du moteur dont une explosion) :

- **premier temps** : admission du mélange air/essence (étape AB) ;

- **deuxième temps** : compression, modélisée par une adiabatique réversible (étape BC) ;
- **troisième temps** : combustion (isochore CD), suivi d'une détente adiabatique réversible (étape DE) ;
- **quatrième temps** : éjection des gaz (ouverture d'une soupape EF) très rapide (donc supposée isochore), suivi d'un refoulement du gaz chaud (FA).




À noter qu'une partie du cycle se déroule avec un système ouvert, que l'on ne peut modéliser cette année. On peut déjà s'attendre à ce que le rendement du moteur soit inférieur à $\eta_C$, du fait des transformations isochores. Le calcul donne $\eta_{\text{mot}} = 1 - \left(\dfrac{V_{\text{min}}}{V_{\text{max}}}\right)^{\gamma-1}$ avec $\gamma$ le coefficient adiabatique du gaz parfait. L'intérêt de ces calculs théoriques est que l'**on peut prévoir quels paramètres modifier pour augmenter le rendement** : ici il est judicieux d'augmenter la cylindrée du moteur et diminuer le volume minimal.

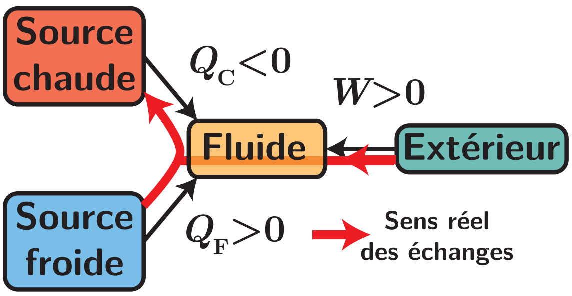
On ne peut pas trop réduire $V_{\text{min}}$ car cela sous-entend que la pression du mélange {air + essence} augmente, et avec cela le risque d'avoir une inflammation brusque et non liée à la bougie !

# III. Machines réceptrices

## III.1 Principe de fonctionnement

### a) Généralités

Les systèmes frigorifiques et les pompes à chaleur sont en général des systèmes à condensation, comportant un fluide caloporteur (typiquement le tétrafluoroéthane R-134a) subissant des changements d'états (vaporisation et liquéfaction). Si on reprend le premier principe, avec $W \geq 0$, trois cas se posent pour les transferts de chaleur, mais seul le cas où on prélève de la chaleur à la source froide pour en donner à la source chaude ($Q_c < 0$ et $Q_F > 0$) est utile (les autres cas étant réalisés naturellement).




**Récepteur ditherme**

* Un récepteur ditherme est tel qu'un fluide caloporteur reçoit un travail $W > 0$ (piston du compresseur) permettant de forcer un transfert thermique de la source froide $Q_F > 0$ vers le fluide puis du fluide vers la source chaude $Q_C < 0$, ce sens n'étant pas naturel d'après le second principe (d'où l'apport énergétique).

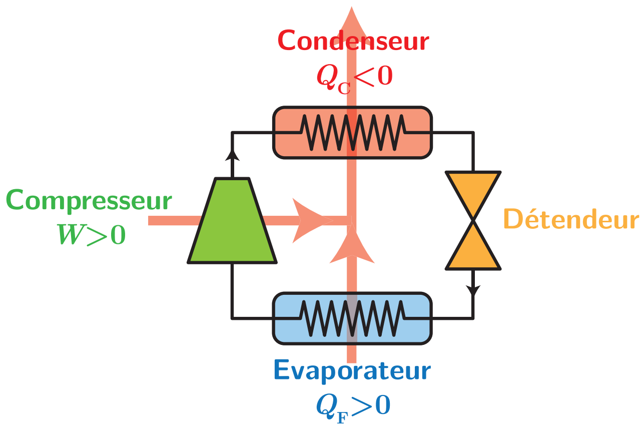
Types de sources :

- froides : air intérieur du réfrigérateur, air intérieur de la voiture (climatisation), air extérieur en hiver (pompe à chaleur), air intérieur en été (climatisation)... ce sont des systèmes qui doivent être maintenues au froid, d'où le prélèvement d'énergie.
- chaudes : air extérieur du réfrigérateur, air extérieur de la voiture, air intérieur en hiver, air extérieur en été,... ce sont des systèmes qui doivent être maintenues au chaud, d'où l'apport d'énergie.

### b) Étapes de fonctionnement

Il y a 4 étapes fondamentales dans ce type de machine :

- la **compression** (en général modélisée par une transformation adiabatique réversible) utilisant un piston pour augmenter la pression du fluide (état gazeux), s'accompagnant d'une augmentation de température (alors **supérieure à celle de la source chaude**) ;
- la **condensation**, changement d'état **libérant de l'énergie** à l'extérieur du fait d'une température supérieure à celle de la source chaude ; à la sortie le fluide est à l'état liquide ;
- la **détente** permettant de diminuer la pression et la température du liquide (alors **inférieure à celle de la source froide**), qui se vaporise partiellement ;
- la **vaporisation**, changement d'état nécessitant de l'énergie prélevée à la source froide, possible car le fluide est alors plus froid que la source froide.



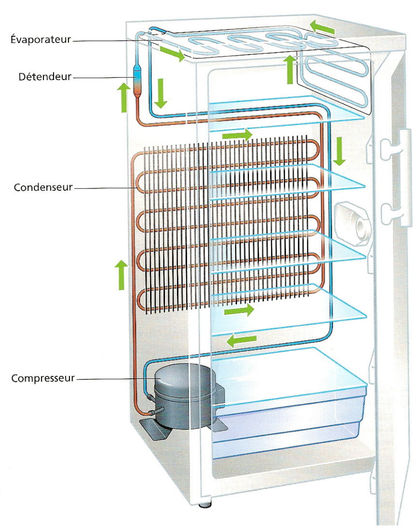

On a alors deux types de machines qui peuvent nous intéresser :

- les climatiseurs, réfrigérateurs, etc. où la zone à refroidir est en contact avec l'évaporateur ;
- les pompes à chaleur où la zone à réchauffer est en contact avec le condenseur.

## III.2 Efficacité des machines

On définit alors une **efficacité**, l'analogue du rendement pour les machines réceptrices, quantité sans dimension **pouvant être plus grande que 1** (il vaut mieux, d'ailleurs), qui caractérise le rapport entre l'énergie utile prélevée ou apportée et l'énergie électrique apportée au compresseur. Détaillons pour chaque type de fonctionnement :

### a) Machine frigorifique



On cherche ici à refroidir un espace ou une pièce (réfrigérateur, ou climatiseur), et il nous importe d'extraire le maximum depuis la source froide. Alors

*
$$\boxed{e_{\text{frig}} = \frac{Q_F}{W}} \tag{4.9}$$

**Exercice**

Déterminer l'efficacité maximale d'une machine frigorifique.

D'après le premier principe : $e_{\text{frig}} = -\dfrac{Q_F}{Q_C + Q_F} = \dfrac{-1}{1 + \dfrac{Q_C}{Q_F}}$. Avec l'inégalité $\dfrac{Q_C}{Q_F} \leq -\dfrac{T_C}{T_F}$ on aboutit à

$$\boxed{e_{\text{frig}} = \frac{Q_F}{W} \leq e_{\text{C,frig}} = \frac{T_F}{T_C - T_F}} \tag{4.10}$$

où $e_{\text{C,frig}}$ est appelée efficacité de Carnot d'une machine frigorifique correspondant à l'évolution réversible du système.

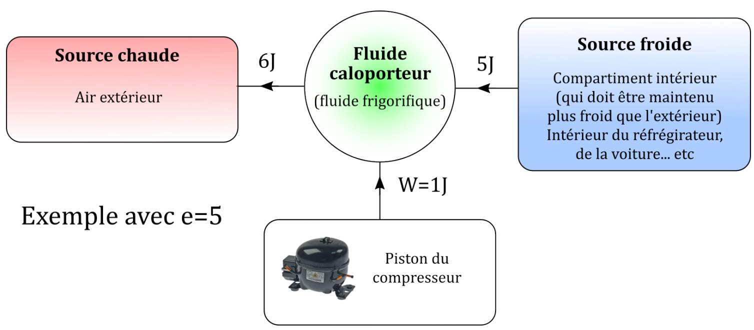
### b) Interprétation de l'efficacité d'une machine frigorifique

Considérons l'exemple d'un congélateur domestique, en prenant pour la source chaude $T = 20\,°\text{C} = 293\,\text{K}$ (température de l'air d'une cuisine) et $T_F = -18\,°\text{C} = 255\,\text{K}$ (température de l'intérieur d'un congélateur).

Le théorème précédent nous indique par exemple que l'efficacité d'une telle machine est nécessairement inférieure à $e_{\text{max}} = \dfrac{255}{293 - 255} = 6,7$.

En pratique, les meilleures machines frigorifiques possèdent rarement une efficacité réelle supérieure à 5.

Considérons maintenant une machine frigorifique réelle d'efficacité 5. Cela signifie en pratique que $e = \dfrac{Q_F}{W} = 5$ : l'énergie thermique prélevée à la source froide est donc 5 fois plus importante que le travail fourni au fluide caloporteur par le compresseur, ce que l'on peut résumer sur le schéma suivant :




Pour un joule apporté au fluide sous forme de travail mécanique, 5 joules sont prélevés à la source froide... et 6 joules sont fournies à la source chaude sous forme d'énergie thermique.
Considérée de manière globale, une machine frigorifique est donc un radiateur qui dégrade du travail en énergie thermique... ce qui est cohérent avec le second principe.

### c) Pompe à chaleur

On souhaite maintenant chauffer un local, on cherche alors à maximiser le transfert vers la source chaude, et on définit alors l'efficacité pour une pompe à chaleur (PAC) par

*
$$\boxed{e_{\text{PAC}} = \frac{-Q_C}{W}} \tag{4.11}$$

On peut effectuer le même raisonnement que précédemment, et l'on aboutit à

$$e_{\text{PAC}} \leq e_{\text{C,PAC}} = \frac{T_C}{T_C - T_F} \tag{4.12}$$

En général, les pompes à chaleur vendues dans le commerce ont une **efficacité comprise entre 2 et 3** (mais cela dépend évidemment de la température de la source froide : par exemple il peut ne pas être approprié d'installer une pompe à chaleur dans le but de chauffer une habitation au Sud de la France).

Il va de soi que l'on ne crée pas de l'énergie, on ne fait que la **déplacer d'une source à une autre**, mais avec un coût moindre qu'un chauffage électrique où toute l'énergie apportée est restituée sous forme de chaleur, équivalent donc à une efficacité $e_{\text{chauf}} = 1$ !

# Exercices

## 4.1 Rendement du cycle de Carnot

On considère un cycle thermodynamique pour un gaz parfait de coefficient adiabatique $\gamma$, suivant les étapes suivantes, considérées comme réversibles :

- une compression isotherme $AB$ à la température $T_1$ ;
- une compression adiabatique $BC$ jusqu'à atteindre la température $T_2$ ;
- une détente isotherme $CD$ à la température $T_2$ ;
- une détente adiabatique $DA$.

Les étapes isothermes impliquent un contact thermique avec des thermostats : la source chaude à la température $T_2$ et la source froide à la température $T_1 < T_2$.

1. Exprimer le rendement de cette machine thermique dont on donnera sa fonction en fonction des échanges thermiques avec la source chaude $Q_2$ et froide $Q_1$.
2. Montrer que le taux de compression $\alpha = \dfrac{V_A}{V_B}$ est aussi égal à $\dfrac{V_D}{V_C}$.
3. À l'aide du premier principe, déterminer $Q_1$ et $Q_2$ en fonction de la quantité de matière gazeuse $n$, de $T_1$ ou $T_2$ et de $\alpha$.
4. Montrer alors que le rendement de la machine est égal au rendement de Carnot $\eta_c = 1 - \dfrac{T_1}{T_2}$.
5. Retrouver ce résultat à l'aide des deux principes de la thermodynamique appliqués au cycle.

- 2) Utiliser la loi de Laplace peut être utile sur les étapes BC et DA, en utilisant les informations des deux autres transformations.

## 4.2 Cycle de Beau de Rochas

On s'intéresse ici au fonctionnement d'un moteur à explosion de voiture, qui suit un cycle appelé de Beau de Rochas. Il s'agit d'un moteur à quatre temps, dont les étapes schématisées Fig. 4.1 sont les suivantes :

- *Admission*. Le cylindre est rempli d'air ambiant et d'une petite quantité d'essence. On arrive à l'état $A$.
- *Compression*. Le piston mobile comprime ce gaz et l'amène à l'état $B$.
- *Explosion puis détente*. Des étincelles sont créées au niveau de la bougie, qui démarrent la combustion de l'essence (état $C$). Le piston mobile est ensuite repoussé vers sa position initiale (état $D$).
- *Échappement*. Les résidus de combustion sont expulsés, filtrés dans le pot d'échappement puis rejetés dans l'air.

Les molécules inertes de l'air (diazote) étant largement majoritaires dans le cylindre, on suppose que la présence d'essence a pour seule conséquence d'agir comme une source chaude lors de la combustion. On modélisera donc l'intérieur du cylindre par un gaz parfait diatomique. En $A$, le gaz occupe un volume $V_{\max}$, à température $T_{\mathrm{f}}$ et pression $P_A$. La transformation $A \to B$ est supposée adiabatique et réversible, diminuant le volume du système à $V_{\min} < V_{\max}$.

1. Montrer que, dans le diagramme de Clapeyron, cette étape correspond à une courbe de la forme $P(v) = \mathrm{cste} \times v^a$, et donner la valeurs de $a$.
2. Établir une relation entre $T_B$, $T_A$, $V_{\min}$ et $V_{\max}$.
3. Calculer le transfert thermique $Q_{AB}$.

L'étape $B \to C$ de combustion est modélisée par une mise en contact avec un thermostat de température $T_{\mathrm{c}}$. L'évolution est isochore.

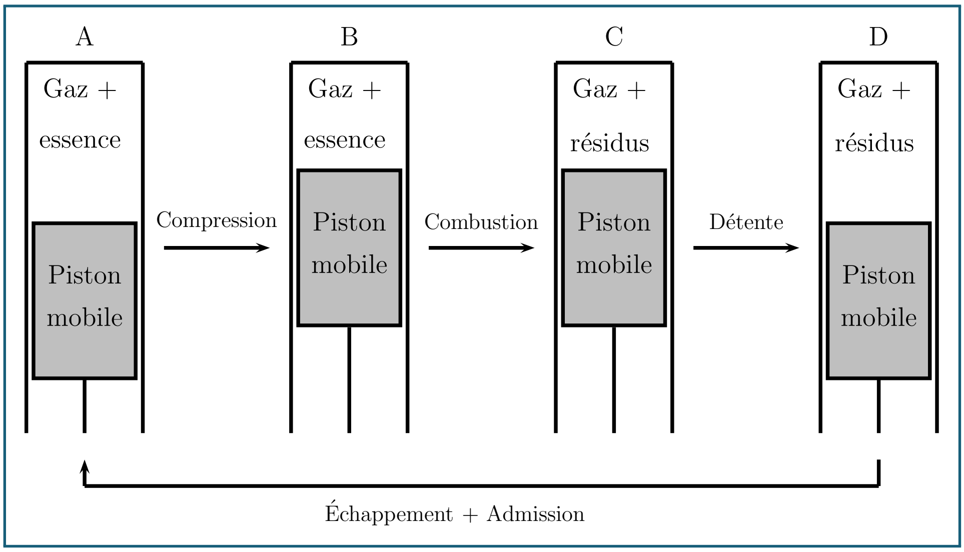



**Figure 4.1** – Étapes d'un moteur à quatre temps

4. Comment se représente cette étape dans un diagramme de Clapeyron ?
5. Exprimer $Q_{BC}$ et $W_{BC}$ littéralement.

La transformation $C \to D$ est une détente que l'on suppose adiabatique et réversible, augmentant le volume du gaz de $V_{\text{min}}$ à $V_{\text{max}}$.

6. Quelle est la forme de cette transformation dans le diagramme de Clapeyron ?
7. Établir une relation entre $T_D$, $T_C$, $V_{\text{min}}$ et $V_{\text{max}}$.
8. Calculer le transfert thermique $Q_{CD}$.

Les étapes d'échappement et d'admission, renouvelant le gaz, sont ici équivalentes à une mise en contact avec un thermostat de température $T_{\text{f}}$ (température de l'air ambiant). L'évolution est isochore.

9. Calculer le transfert thermique $Q_{DA}$ et le travail $W_{DA}$ en fonction notamment de $T_A$ et $T_D$

On peut maintenant calculer le rendement $\eta$ d'un moteur à explosion.

10. En utilisant le premier principe, exprimer le travail du moteur sur un cycle $W$ en fonction des différentes températures.
11. Définir puis exprimer $\eta$ en fonction du taux de compression $\alpha = V_{\text{max}}/V_{\text{min}}$.
12. Faire l'application numérique pour $\alpha = 10$.
13. Représenter le cycle de Beau de Rochas sur le diagramme de Clapeyron.

Pour comparer ce rendement à un moteur de Carnot, on évalue l'entropie créée sur un cycle. On admet que l'entropie d'un gaz parfait est donnée par :

$$S(T,V) = S_0 + C_{\text{v}} \ln(TV^{\gamma-1}) \tag{4.13}$$

14. Pour chaque étape, calculer la variation d'entropie $\Delta S$, l'entropie créée $S_{\text{créé}}$ et l'entropie échangée $S_{\text{ech}}$.
15. Montrer que l'entropie créée sur un cycle s'écrit

$$S_{\text{créé}} = C_{\text{v}} \frac{\left(T_{\text{f}}\alpha^{(\gamma-1)/2} - T_{\text{c}}\alpha^{(1-\gamma)/2}\right)^2}{T_{\text{c}}T_{\text{f}}} \tag{4.14}$$

16. On appelle $\bar{\alpha}$ la valeur du paramètre $\alpha$ pour laquelle l'entropie créée s'annule. Exprimer $\bar{\alpha}$ en fonction de $T_{\text{c}}$ et $T_{\text{f}}$. Faire l'application numérique pour $T_{\text{c}} = 600\,°\text{C}$ et $T_{\text{f}} = 20\,°\text{C}$.
17. Des valeurs réalistes de $\alpha$ sont autour de 10 : que peut-on en déduire sur le rendement de ce moteur par rapport à celui de Carnot ?
18. Calculer le rendement de ce moteur $\eta$ ainsi que le travail sur un cycle $W$ pour $\alpha = \bar{\alpha}$. Commenter les valeurs obtenues.

1. Lors d'une transformation adiabatique réversible, donc isentropique, l'évolution d'un gaz parfait vérifie $PV^{\gamma} = \text{cste.}$, avec $\gamma = C_\text{p}/C_\text{v}$. En passant en grandeur massique, nous avons donc

$$\boxed{P(v) = \text{cste.} \times v^{-\gamma}} \tag{4.15}$$

avec **$\Omega\gamma = 7/5$ pour un gaz parfait diatomique.**

2. La relation $PV^{\gamma} = \text{cste.}$ s'écrit encore, avec $P = nRT/V$, $TV^{\gamma-1} = \text{cste.}$, ce qui donne

$$\boxed{T_f V_\text{max}^{\gamma-1} = T_B V_\text{min}^{\gamma-1}} \tag{4.16}$$

3. La transformation étant adiabatique, $\boldsymbol{\Omega Q_{AB} = 0}$.
4. Cette étape étant isochore, le volume massique reste contant : **il s'agit d'une droite verticale dans le diagramme de Clapeyron.**
5. L'évolution étant isochore, $\boldsymbol{\Omega W_{BC} = 0}$. Le premier principe devient alors, en supposant les états initial et final au repos ($\Delta\mathcal{E}_\text{c} = 0$),

$$\boxed{Q_{BC} = \Delta U = C_\text{v}(T_\text{c} - T_B)} \tag{4.17}$$

6. Pour les mêmes raisons qu'à la question 1, $P(v) = \text{cste.} \times v^{-\gamma}$, avec $\gamma = -7/5$.
7. Pour les mêmes raisons qu'à la question 2,

$$\boxed{T_\text{c} V_\text{min}^{\gamma-1} = T_D V_\text{max}^{\gamma-1}} \tag{4.18}$$

8. L'évolution étant adiabatique, $Q_{CD} = 0$.
9. L'évolution étant isochore, $W_{DA} = 0$. Enfin, le transfert thermique $Q_{DA}$ s'obtient avec le premier principe,

$$\boxed{Q_{DA} = C_\text{v}(T_\text{f} - T_D)} \tag{4.19}$$

10. On applique le premier principe au gaz sur un cycle. Les variations des fonctions d'état sont nulles ($\Delta U = \Delta\mathcal{E}_\text{c} = 0$) car les états initial et final sont identiques, et ainsi,

$$0 = W + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} \tag{4.20}$$

À l'aide des expressions de ces transferts thermiques déjà démontrées, on obtient

$$\boxed{W = C_\text{v}(T_B - T_\text{c} + T_D - T_\text{f})} \tag{4.21}$$

11. Par définition,

$$\eta = -\frac{W}{Q_\text{c}} \tag{4.22}$$

où $W$ est le travail sur un cycle, calculé à la question précédente, et $Q_\text{c}$ le transfert thermique avec la source chaude, à savoir $Q_{BC}$. Ainsi,

$$\eta = \frac{T_\text{c} - T_B + T_\text{f} - T_D}{T_\text{c} - T_B} = 1 + \frac{T_\text{f} - T_D}{T_\text{c} - T_B} \tag{4.23}$$

On peut simplifier ces expressions à l'aide de (4.16) et (4.18), qui donnent respectivement $T_B = T_\text{f} \times \alpha^{\gamma-1}$ et $T_D = T_\text{c} \times \alpha^{1-\gamma}$. Ainsi,

$$\eta = 1 + \left(\frac{T_\text{f} - T_\text{c}\alpha^{1-\gamma}}{T_\text{c} - T_\text{f}\alpha^{\gamma-1}}\right) = 1 + \alpha^{1-\gamma}\left(\frac{T_\text{f} - T_\text{c}\alpha^{1-\gamma}}{T_\text{c}\alpha^{1-\gamma} - T_\text{f}}\right) \tag{4.24}$$

Au final,

$$\boxed{\eta = 1 - \alpha^{1-\gamma}} \tag{4.25}$$

12. Avec $\alpha = 10$ et $\gamma = 7/5$, on calcule $\boldsymbol{\Omega\eta = 0.60}$, soit un rendement de $60\%$.

**13.** D'après les réponses précédentes, les différentes étapes du cycle sont les suivantes :

- $A \to B$ : diminution de volume massique avec $P(v) \propto v^{-\gamma}$ et $\gamma = 7/5$.
- $B \to C$ : augmentation de pression à volume constant.
- $C \to D$ : augmentation du volume massique avec $P(v) \propto v^{-\gamma}$ et $\gamma = 7/5$.
- $D \to A$ : diminution de pression à volume constant.

Le cycle $A \to B \to C \to D \to A$ est représenté FIG. 4.2.

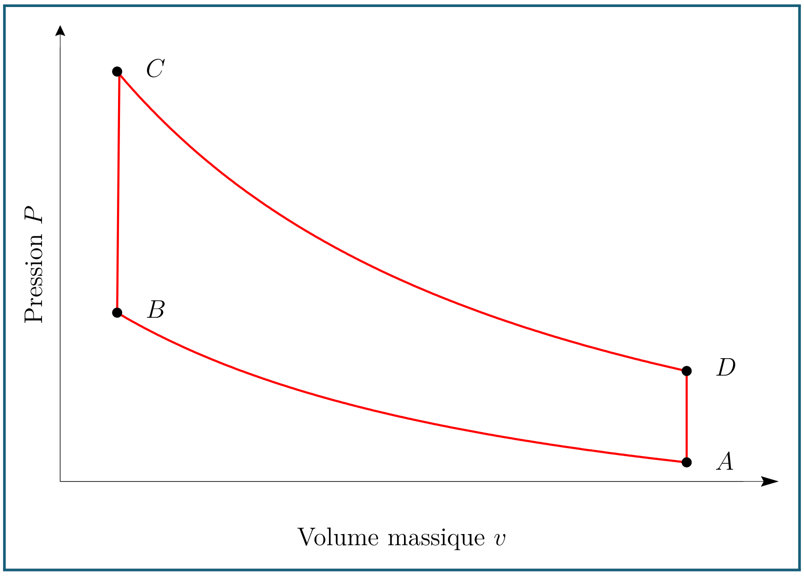



**Figure 4.2** – Cycle de Beau de Rochas pour un gaz parfait diatomique

**14.** Les transformations $A \to B$ et $C \to D$ sont adiabatiques (aucune entropie échangée) et réversibles (aucune entropie créée). La variation d'entropie totale est donc nulle : $\boldsymbol{\Omega \Delta S = S_{\text{créé}} + S_{\text{ech}} = 0}$.
Pour la transformation $B \to C$, le transfert thermique $Q_{BC}$ calculé (4.17) est échangé avec la source chaude à $T_{\text{c}}$, d'où une entropie échangée

$$\boxed{S_{\text{ech}}^{BC} = \frac{Q_{BC}}{T_{\text{c}}} = \frac{C_{\text{v}}(T_{\text{c}} - T_B)}{T_{\text{c}}}} \tag{4.26}$$

La variation d'entropie s'évalue avec la formule de l'énoncé :

$$\boxed{\Delta S_{BC} = C_{\text{v}} \ln\left(\frac{T_{\text{c}} V_{\text{min}}^{\gamma-1}}{T_B V_{\text{min}}^{\gamma-1}}\right) = C_{\text{v}} \ln\left(\frac{T_{\text{c}}}{T_B}\right)} \tag{4.27}$$

L'entropie créée est la différence entre ces deux quantités,

$$\boxed{S_{\text{créé}}^{BC} = \Delta S_{BC} - S_{\text{ech}}^{BC} = C_{\text{v}}\left(\ln\left(\frac{T_{\text{c}}}{T_B}\right) - 1 + \frac{T_B}{T_{\text{c}}}\right)} \tag{4.28}$$

Les entropies relatives à la transformation $D \to A$ s'évaluent exactement de la même manière, on obtient

$$\boxed{S_{\text{ech}}^{DA} = \frac{C_{\text{v}}(T_{\text{f}} - T_D)}{T_{\text{f}}}, \qquad \Delta S_{DA} = C_{\text{v}} \ln\left(\frac{T_{\text{f}}}{T_D}\right)} \tag{4.29}$$

et enfin

$$\boxed{S_{\text{créé}}^{DA} = C_{\text{v}}\left(\ln\left(\frac{T_{\text{f}}}{T_D}\right) - 1 + \frac{T_D}{T_{\text{f}}}\right)} \tag{4.30}$$

**15.** L'entropie créée sur un cycle est la somme de l'entropie créée sur chaque portion, d'où

$$S_{\text{créé}} = C_{\text{v}} \left( \ln \left( \frac{T_{\text{c}}}{T_B} \right) - 1 + \frac{T_B}{T_{\text{c}}} \right) + C_{\text{v}} \left( \ln \left( \frac{T_{\text{f}}}{T_D} \right) - 1 + \frac{T_D}{T_{\text{f}}} \right) \tag{4.31}$$

c'est-à-dire

$$S_{\text{créé}} = C_{\text{v}} \left( \ln \left( \frac{T_{\text{c}} T_{\text{f}}}{T_B T_D} \right) - 2 + \frac{T_B}{T_{\text{c}}} + \frac{T_D}{T_{\text{f}}} \right) \tag{4.32}$$

Avec $T_B = T_{\text{f}} \alpha^{\gamma-1}$ et $T_D = T_{\text{c}} \alpha^{1-\gamma}$ on montre que le logarithme s'annule et que

$$S_{\text{créé}} = C_{\text{v}} \left( \frac{T_{\text{f}}^2 \alpha^{\gamma-1} + T_{\text{c}}^2 \alpha^{1-\gamma} - 2 T_{\text{c}} T_{\text{f}}}{T_{\text{c}} T_{\text{f}}} \right) \tag{4.33}$$

En factorisant, on obtient la formule de l'énoncé.

**16.** L'entropie créée s'annule pour

$$T_{\text{f}} \bar{\alpha}^{(\gamma-1)/2} = T_{\text{c}} \bar{\alpha}^{(1-\gamma)/2} \tag{4.34}$$

Ce qui donne

$$\boxed{\bar{\alpha} = \left( \frac{T_{\text{c}}}{T_{\text{f}}} \right)^{1/(\gamma-1)} \simeq 15} \tag{4.35}$$

**17.** Les valeurs de $\alpha$ considérées habituellement sont plus basses que $\bar{\alpha}$ : il y a donc création d'entropie. S'agissant d'un moteur ditherme irréversible, nous avons donc nécessairement

$$\eta < 1 - \frac{T_{\text{f}}}{T_{\text{c}}} \tag{4.36}$$

avec $\eta_{\text{c}} = 1 - T_{\text{f}}/T_{\text{c}}$ le rendement de Carnot. L'inégalité stricte vient de la production strictement positive d'entropie.

**18.** Avec (4.25) et (4.35), on obtient

$$\boxed{\eta(\alpha = \bar{\alpha}) = 1 - \frac{T_{\text{f}}}{T_{\text{c}}} = \eta_{\text{c}}} \tag{4.37}$$

**Le moteur devenant réversible pour $\Omega\alpha = \bar{\alpha}$, son rendement doit être égal à celui de Carnot.** Le travail produit sur un cycle est donné par (4.21),

$$W = C_{\text{v}}(T_B - T_{\text{c}} + T_D - T_{\text{f}}) = C_{\text{v}}(T_{\text{f}} \alpha^{\gamma-1} - T_{\text{c}} + T_{\text{c}} \alpha^{1-\gamma} - T_{\text{f}}) \tag{4.38}$$

Pour $\alpha = \bar{\alpha}$, on trouve

$$\boxed{W(\alpha = \bar{\alpha}) = 0} \tag{4.39}$$

**Dans sa limite réversible, le cycle de Beau de Rochas ne produit pas de travail.** En effet, l'irréversibilité vient des différences de températures entre les points $B$ et $C$ d'une part, $D$ et $A$ d'autre part : lorsque le cycle devient réversible, ces points sont confondus. D'après la FIG. 4.2, l'aire dans le cycle est alors nul, et ce moteur n'en est plus un.

## 4.3 Pompe à chaleur avec un gaz parfait

On cherche à étudier une pompe à chaleur effectuant le cycle suivant, appelé cycle de Joule :

- L'air pris dans l'état $A$ de température $T_0$ et pression $P_0$ est comprimé suivant une adiabatique réversible jusqu'au point $B$ où il atteint la pression $P_1$ ;
- il est ensuite refroidi à pression constante et atteint la température finale de la source chaude $T_1$ correspondant à l'état $C$ ;
- l'air est encore refroidi dans une turbine suivant une détente adiabatique réversible pour atteindre l'état $D$ de pression $P_0$ ;
- il se réchauffe enfin à pression constante au contact de la source froide et retrouve son état initial.

L'air est considéré comme un gaz parfait de rapport des capacités thermiques $\gamma = \dfrac{7}{5}$ indépendant de la température. On pose $\beta = 1 - \dfrac{1}{\gamma}$ et $a = \dfrac{P_1}{P_0}$. On prendra pour les applications numériques $T_0 = 283\,\text{K}$, $T_1 = 298\,\text{K}$, $a = 5$.

**1.** Représenter le cycle parcouru par le gaz dans un diagramme de Clapeyron.

2. Rappeler les conditions nécessaires pour assurer la validité des formules de Laplace. Donner la formule de Laplace relative à la pression et la température.

3. En déduire l'expression des températures $T_B$ et $T_D$ en fonction de $T_0$, $T_1$, $a$ et $\beta$. Préciser leurs valeurs numériques.

4. Exprimer l'efficacité $e$ de la pompe à chaleur en fonction des transferts thermiques.

5. En déduire l'expression de $e$ en fonction de a et $\beta$. Donner sa valeur numérique.

6. Quelles doivent être les transformations du gaz si on fait fonctionner la pompe à chaleur suivant un cycle de Carnot réversible ? Quelle est l'efficacité théorique associée ?

7. Donner sa valeur numérique et comparer.

8. Déterminer l'expression de l'entropie créée pour une mole d'air au cours du cycle de Joule en fonction de $R$, $\beta$ et $x = a^{\beta}\dfrac{T_0}{T_1}$.

9. Étudier son signe en fonction de $x$. Était-ce prévisible ?

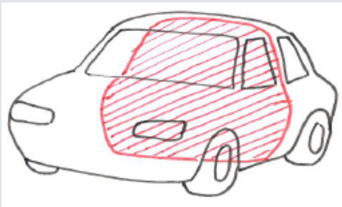
10. Sachant qu'en régime permanent les fuites thermiques s'élèvent à $P_f = 20\,\mathrm{kW}$, calculer la puissance du couple compresseur-turbine qui permet de maintenant la température de la maison constante.

- 3) Loi de Laplace !
- 5) Chercher à factoriser numérateur et dénominateur de sorte à faire apparaître un rapport simple en fonction de $a$ et $\beta$.
- 10) Utiliser l'efficacité pour trouver la puissance à fournir pour obtenir le transfert thermique permettant de compenser les pertes. Sachant que le rapport d'énergie est aussi un rapport de puissance si ces dernières sont constantes.

## 4.4 Résolution de problème : rendement d'une voiture

**Problématique :** Estimer le rendement énergétique d'une voiture se déplaçant sans dénivellation à la vitesse constante d'environ $v = 90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

**Document 1 : résistance de l'air**



Pour une voiture, toutes conditions égales par ailleurs (vitesse, température et pression atmosphériques), l'aptitude à la pénétration dans l'air d'un véhicule ne dépend que de deux paramètres : la surface frontale, également appelée maître-couple $S$, et la traînée, caractérisée par le $C_x$. Cette dernière dépend de plusieurs phénomènes :

- la forme de l'avant de la carrosserie et du pare-brise, où l'air exerce une pression directe ;
- la forme de la surface de la carrosserie où l'air glisse ;
- les turbulences engendrées par les divers obstacles (encadrements de vitres, rétroviseurs, passages de roues,...) ;
- la pénétration de l'air à l'intérieur de la carrosserie pour alimenter le moteur en oxygène (une puissance de 100 chevaux nécessite pour le moteur une absorption de 60 litres d'air par seconde) ; mais aussi refroidir le ventilateur et ventiler l'habitacle.

Le coefficient de traînée est un nombre sans dimension qui renseigne sur la traînée globale d'un objet quelconque, et est compris entre 0,07 (forme ovoïde) et 1,4 (demi-sphère creuse). Grâce à des méthodes empiriques basées sur des maquettes à petite échelle, le $C_x$ moyen des voitures de tourisme n'a cessé de progresser. Voisin de 0,45 dans les années 60, il est aujourd'hui inférieur à 0,30. C'est un facteur d'autant plus important qu'il influence la consommation moyenne de carburant, en 2014 d'environ 7 L/100km pour une voiture, du fait qu'il gouverne la force de traînée $R$ : $C_x = \dfrac{2R}{\rho S v^2}$ avec $\rho$ la masse volumique de l'air et $v$ la vitesse du véhicule.

**Document 2 : propriétés physico-chimiques de l'essence**

Caractéristiques issues de Wikipédia :

- Masse volumique $0{,}70\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ;
- Masse molaire moyenne $120\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ ;
- Pression de vapeur saturante à 20 °C : 1,3 kPa
- Température de fusion $< -60$ °C ;
- Température d'ébullition, de 20 °C à 200 °C ;
- Température d'auto-inflammation : environ 250 °C ;
- Pouvoir calorifique inférieur (PCI) ou enthalpie de combustion massique (correspondant à l'énergie thermique libérée par la combustion d'un kg d'essence de manière isobare) $\Delta_{\mathrm{comb}}h = 44{,}4\,\mathrm{MJ\,kg^{-1}}$
- Solubilité dans l'eau : nulle.

Il faut repartir de la définition du rendement, et questionner la quantité d'énergie à apporter pour se déplacer à vitesse constante (il faut compenser les frottements !).